Hội Toán Học Việt Nam

THÔNG TIN TOÁN HỌC

Tháng 3 Năm 2021 Tập 25 Số 1

THÔNG TIN TOÁN HỌC

Newsletter of the Vietnamese Mathematical Society

Bìa 1. László Lovász, đồng chủ nhân giải Abel 2021. Ảnh: Renate Schmid/Viện Nghiên cứu Toán Oberwolfach.

THỂ LỆ GỬI BÀI

Bài viết bằng tiếng Việt. Tất cả các bài, thông tin về sinh hoạt toán học ở các khoa (bộ môn) toán, về hướng nghiên cứu hoặc trao đổi về phương pháp nghiên cứu và giảng dạy đều được hoan nghênh. Bản tin cũng nhận đăng các bài giới thiệu tiềm năng khoa học của các cơ sở cũng như các bài giới thiệu các nhà toán học.

Bài viết xin gửi về tòa soạn theo địa chỉ email của một trong các biên tập viên, hoặc địa chỉ bưu điện ở trên. Nếu bài được đánh máy tính, xin gửi kèm theo file với phông chữ unicode. Toà soạn khuyến khích các tác giả sử dụng chương trình soạn thảo Latex và gói tiếng Việt vntex.

ĐỊA CHỈ BƯU ĐIỆN

Bản tin **Thông Tin Toán Học**,
Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học
và Công nghệ Việt Nam,
18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy,
10307 Hà Nội

BẢN ĐIỆN TỬ CỦA TẤT CẢ CÁC SỐ TẠP CHÍ CÓ THỂ TRUY CẬP TỪ TRANG MẠNG CỦA HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM
www.vms.org.vn

Tổ hợp như một phong cách làm toán: Phỏng vấn GS. Vũ Hà Văn[1]

Toufik Mansour[2]

Giáo sư Vũ Hà Văn sinh ra và học hết trung học phổ thông tại Việt Nam. Năm 1994, anh nhận bằng cử nhân tại Đại học Eötvös Loránd, Budapest. Năm 1998, anh hoàn thành chương trình tiến sĩ tại ĐH Yale dưới sự hướng dẫn của Giáo sư László Lovász. Anh hiện là giáo sư Toán tại ĐH Yale, Hoa Kỳ. Trước khi được bổ nhiệm ghế Giáo sư Percey F. Smith ở Yale, anh đã có nhiều năm làm việc ở Viện Nghiên cứu cao cấp (IAS) Princeton, Viện nghiên cứu Microsoft Research, ĐH California ở San Diego, và ĐH Rutgers. Giáo sư Văn là diễn giả tại nhiều hội nghị, trong đó có Đại hội Toán học Quốc tế (ICM) năm 2014, nơi anh đọc báo cáo mời. Giáo sư Văn đã được trao tặng một số giải thưởng quan trọng, như giải Sloan Fellowship (2002), giải Polya (2008) và giải Fulkerson (2012). Năm 2012, anh trở thành thành viên danh dự (fellow) của Hội Toán học Hoa Kỳ. Năm 2020 anh là hội viên danh dự của Viện Thống kê Toán học. Anh cũng là thành viên ban biên tập các tạp chí Combinatorica và Journal of Combinatorial Theory, Series A.

Toufik Mansour: *Cảm ơn anh đã nhận lời tham gia và dành thời gian cho buổi phỏng vấn hôm nay. Thưa giáo sư Văn, anh có thể cho chúng tôi biết một cách khái quát tổ hợp là gì không?*

Vũ Hà Văn: Với tôi, tổ hợp là một phong cách làm toán hơn là một lĩnh vực toán học riêng biệt. Tư duy tổ hợp là tư duy trên những đối tượng rời rạc, không liên tục. Lúc đầu, một cách tự nhiên, tư duy này chỉ áp dụng cho những bài toán đặc thù về những đối tượng rời rạc như đồ thị. Nhưng về sau, một số nguyên lý tổ hợp tổng quát được hình thành (điển hình như Bổ đề đều Szemerédi [1]), và được áp dụng sang nhiều lĩnh vực khác.

Anh nghĩ gì về sự phát triển mối quan hệ giữa tổ hợp và phần còn lại của toán học?

Trong những năm gần đây, tư duy tổ hợp đã được sử dụng trong nhiều chuyên ngành toán học, đôi khi mang lại hiệu quả đáng kinh ngạc. Hóa ra trong nhiều nghiên cứu ở các lĩnh vực khác nhau, cốt lõi của đối tượng nghiên cứu là một vấn đề tổ hợp sâu sắc, vì thế các ý tưởng và công cụ từ tổ hợp trở nên rất cần thiết. Ví dụ, khái niệm giả ngẫu nhiên (*pseudo-randomness*), vốn bắt nguồn từ công trình về đồ thị của Thomasson [2] và Graham-Chung-Wilson [3], là điểm cực kỳ quan trọng trong Định lý Green [4] – Tao [5] nói rằng dãy số nguyên tố chứa cấp số cộng độ dài bất kì. Bổ đề đều Szemerédi cũng được sử dụng khá phổ biến trong giải tích và xác suất. Nhiều công trình của tôi về giá trị riêng của ma trận ngẫu nhiên (random matrix) và nghiệm của hàm ngẫu nhiên dựa trên lý thuyết phi tập trung (anti-concentration) hiện đại, vốn là một lý thuyết được xây dựng dựa trên lý thuyết các tổng tập con (subset sums) và định lý đảo ngược của Freiman [6] trong lý thuyết số tổ hợp.

Ban đầu, các nhà tổ hợp đã mượn rất nhiều công cụ từ bên ngoài để chứng

---

[1]Bản dịch từ bài phỏng vấn GS. Vũ Hà Văn của Toufik Mansour trên Tạp chí Enumerative Combinatorics and Applications (số ECA 1:2 (2021) Interview #S3I10). Một phiên bản khác của bản dịch, với một tiêu đề khác, đã đăng trên https://blog.vinbigdata.org/bai-phong-van-giao-su-vu-ha-van/.

[2]Toufik Mansour là giáo sư Toán học tại ĐH Haifa, Israel.

minh các định lý của mình (phương pháp xác suất, phương pháp tô pô, v.v.). Bây giờ, tôi có thể tự hào nói rằng chúng tôi đang bắt đầu báo đáp một cách tương xứng.

Những mục tiêu nghiên cứu chính của anh là gì?

Giống như mọi người, tôi thích giải các bài toán lớn/nổi tiếng. Tuy nhiên, song song với việc này, tôi chú trọng hơn vào việc phát triển các công cụ và phương pháp mới, hoặc tìm ra các khái niệm mới, có thể sử dụng cho nhiều mục đích khác nhau. Các công cụ, phương pháp, và khái niệm mới, chứ không phải bản thân việc một số giả thuyết nào đó là đúng, mới là thứ thúc đẩy toán học tiến lên phía trước.

Chúng tôi muốn biết về giai đoạn khởi nghiệp của anh. Những trải nghiệm đầu tiên của anh về toán học là gì? Anh có chịu ảnh hưởng từ gia đình hay một ai đó không?

Cũng như hầu hết các nhà toán học khác, tôi học trường chuyên từ khi còn nhỏ (khoảng 10 tuổi). Một cô giáo tiểu học đã nhận ra năng khiếu của tôi và cho bố mẹ tôi biết, vì thế bố mẹ đã khuyến khích tôi chuyển trường.

Có bài toán đặc biệt nào khiến anh bắt đầu quan tâm đến tổ hợp không?

Sau khi tốt nghiệp trung học, tôi nhận được học bổng du học ở Budapest, nhưng đó là học bổng của một trường đại học kỹ thuật. Ở Budapest, một trong những giáo viên toán của tôi, cô Kati Vesztergombi (vợ của László "Laci" Lovász) có mở một câu lạc bộ toán và giới thiệu cho tôi bài toán Erdös (tôi nhớ đó là bài toán khoảng cách phân biệt[3]). Tôi rất hứng thú với bài toán này (nhưng chỉ có thể đạt được một số bước tiến mười năm sau đó). Tôi cũng tham gia cuộc thi Schweitzer nổi tiếng và sau đó khoảng một năm thì Kati và Laci thuyết phục và giúp đỡ tôi chuyển sang học toán.

GS. Vũ Hà Văn. Ảnh: Viện NCCC về Toán.

Đâu là lý do khiến anh chọn làm luận án tiến sĩ tại Yale với László Lovász?

Vào thời điểm đó, Đông Âu vừa bước ra khỏi bức màn sắt và tôi không biết nhiều về hoạt động nghiên cứu cũng như các trường đại học Hoa Kỳ. Tôi chọn Lovász là thầy hướng dẫn của mình không chỉ vì đó là một điều tự nhiên, dựa trên mối liên hệ sẵn có giữa chúng tôi, mà còn vì phong cách làm toán của ông đã gây cho tôi ấn tượng mạnh.

Lúc đó (1994) tổ hợp còn khá mới lạ ở Yale, và hầu hết các nghiên cứu sinh khác đều không biết tôi đang làm gì. Lúc xin học bổng tiến sĩ, tôi cũng nhận được

[3] Giả thuyết khoảng cách phân biệt trong mặt phẳng của Erdös: Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng, gọi $G(n)$ là số tối thiểu các khoảng cách đôi một khác nhau giữa các điểm này. Khi đó phải chăng $G(n) = \Omega(n/\log(n))$, tức là $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{G(n)}{(n/\log(n))} > 0$? (BBT)

thư mời từ Viện Công nghệ Massachusetts (MIT). Tôi nhớ là chủ nhiệm khoa bên đó gọi điện và hỏi tôi có muốn tới học ở MIT không. Ông ấy tỏ ra rất ngạc nhiên khi tôi nói mình muốn đến Yale để làm tổ hợp, nên hỏi thăm về người hướng dẫn của tôi. Khi được biết đó là Lovász, ông ấy thở phào và nói "Ồ, vậy cậu gặp đúng người rồi".

Trong luận án tiến sĩ, anh làm việc với những bài toán gì?

Có hai bài toán. Bài đầu tiên là xác định xem nghịch đảo của một ma trận $(0, 1)$ cỡ n có thể lớn như thế nào. Câu hỏi này xuất phát từ một nghiên cứu của Dmitry Kozlov [7] và tôi về một bài toán cân đồng xu có vẻ tương đối đơn giản. Chúng tôi đã giải được bài toán này cùng Noga Alon [8]. Bài toán thứ hai là bài toán Segre về cung trong hình học hữu hạn. Kích thước tối thiểu của một cung cực đại trên một mặt phẳng xạ ảnh hữu hạn là gì? (Một cung cực đại là một tập hợp các điểm trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, và nó là cực đại với tính chất này). Tôi đã làm việc cùng với Jeong Han Kim [9] để giải bài toán này, và vẫn rất thích các kết quả đạt được hồi đó.

Kim chỉ nam trong nghiên cứu của anh là gì? Một câu hỏi lý thuyết tổng quát hay một bài toán cụ thể?

Tôi thường hứng thú với các bài toán cụ thể, vì chúng có thể là mấu chốt của một lý thuyết lớn hơn. Tất nhiên, khi giải quyết xong một bài toán khó, bạn được cộng đồng ghi nhận và điều đó có ích cho sự nghiệp. Nhưng giá trị thật sự của lời giải lại là những ý tưởng và công cụ mới mà người ta có thể sử dụng cho những bài toán khác, đôi khi hoàn toàn không liên quan đến vấn đề của bạn.

Lúc nghĩ về một bài toán, anh có tin chắc một điều gì đó là đúng trước khi tìm ra chứng minh không?

Đa số các giả thuyết của chúng ta là đúng. Tôi không nghi ngờ giả thuyết Riemann hay giả thuyết cặp số nguyên tố sinh đôi. Thách thức thật sự là tìm ra lý do tại sao giả thuyết đó lại đúng. Tôi cho rằng điều thực sự quan trọng là tìm ra được những hiện tượng và góc nhìn mới hàm chứa bài toán (hay mấu chốt kỹ thuật của nó) như là một trường hợp đặc biệt. Đầu cuộc phỏng vấn, tôi đã nhắc đến công trình của Green [4] và Tao [5] về các số nguyên tố. Điều tuyệt vời họ tìm ra là mệnh đề Green–Tao là một hiện tượng về cấp số cộng, hơn là về số nguyên tố. Về cơ bản, họ đưa ra một điều kiện cần để một tập các số nguyên chứa các cấp số cộng dài tùy ý. Đó là phát hiện then chốt, đạt được nhờ khái niệm giả ngẫu nhiên trong tổ hợp. Việc kiểm chứng các điều kiện cần nói trên đối với tập số nguyên tố là khá dễ dàng, nhờ các công cụ quen biết của lý thuyết số giải tích.

Theo anh, ba kết quả có ảnh hưởng lớn nhất của tổ hợp trong ba mươi năm qua là gì?

Đầu tiên, tôi nghĩ phải nhắc đến Định lý đảo ngược của Freiman [6]. Tiếp theo là Bổ đề đều Szemerédi [1]. Cả hai đã được chứng minh hơn ba mươi năm trước, nhưng chúng có tác động rõ ràng nhất trong ba mươi năm qua và trong rất nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học. Thứ ba là sự phát triển của phương pháp nhấm nháp (nibble method) và các biến thể và cải tiến của nó (chẳng hạn như phương pháp vi phân (differential method) hoặc phương pháp hấp thụ (absorbing method)). Tôi nghĩ phương pháp nhấm nháp bắt đầu từ một bài báo của Ajtai, Komlós, và Szemerédi [10], và hầu hết các chuyên gia hàng đầu về tổ hợp xác suất đã áp dụng phương pháp này và bổ sung nhiều ý tưởng mới quan trọng để khiến nó mạnh hơn.

Theo anh, ba câu hỏi mở quan trọng hàng đầu là gì?

Tôi đoán chúng ta đều muốn biết tại sao giả thuyết Riemann lại đúng. Thứ hai là liệu có tiếp cận nào khác với định lý bốn màu (và nhiều bài toán khác tương tự) hay không? Một tiếp cận thuyết phục với định lý này cần phải dựa trên một số kết quả căn bản. Cuối cùng là một lời giải cho bài toán khoảng cách phân biệt cho số chiều bất kỳ, vì nó gợi tôi nhớ đến những kỷ niệm đẹp từ thời kỳ Budapest. (Gần đây Guth và Katz [11] đã giải quyết trường hợp hai chiều.)

Trong tương lai mười đến hai mươi năm tới, anh kỳ vọng vào sự phát triển của những ngành toán học nào?

Như tôi đã đề cập trước đó, tổ hợp bắt đầu tạo ra các phương pháp và công cụ được các nhà nghiên cứu từ nhiều lĩnh vực khác nhau quan tâm. Tôi thực sự muốn xu hướng này tiếp tục. Cách đây không lâu, hầu hết mọi người đều xem tổ hợp như một tập hợp các bài toán và ý tưởng thông minh, nhưng đặc thù và lẻ tẻ. Quan niệm này cần phải thay đổi. Chúng ta phải xây dựng thêm nhiều lý thuyết, phương pháp và công cụ có sức ảnh hưởng vượt qua ranh giới giữa các chuyên ngành toán học.

So với các lĩnh vực toán học khác, tổ hợp có lợi thế lớn là khá gần với các ứng dụng thực tế. Khi một người làm ứng dụng giải thích vấn đề mình đang gặp phải cho một nhà toán học, tôi dám chắc là một chuyên gia tổ hợp sẽ có nhiều khả năng nắm bắt vấn đề hoặc thậm chí đề xuất một giải pháp, hơn là một chuyên gia trong một lĩnh vực trừu tượng. Tôi hy vọng sẽ có những ứng dụng sâu sắc hơn nữa của tổ hợp vào các lĩnh vực bên ngoài toán học. Ứng dụng của đồ thị De Brujin trong việc nghiên cứu về gen là một ví dụ tuyệt vời.

Theo anh trong toán học có những "dòng chính", những lĩnh vực cốt lõi không? Phải chăng có một số chủ đề quan trọng hơn những chủ đề khác?

Tôi nghĩ đây là vấn đề mang tính chủ quan, và mỗi ngành toán học có giá trị riêng của nó. Tuy nhiên, từ quan điểm ứng dụng, tôi nghĩ rằng xác suất và thống kê ngày càng trở nên quan trọng. Trong tương quan với khoa học tổng quát và công nghiệp ngày nay, chúng có thể có vai trò quan trọng tương đương với giải tích vào thời Newton.

Thưa anh Vân, anh nghĩ gì về sự phân biệt giữa toán thuần túy và toán ứng dụng mà một số người nêu ra? Nó có ý nghĩa đối với anh không? Anh thấy mối quan hệ giữa cái gọi là toán "thuần túy" và toán "ứng dụng" ra sao?

Không, thậm chí tôi còn không chắc có thể dựa vào đâu để đặt ra sự phân biệt đó. Cá nhân tôi đánh giá cao các vấn đề toán học có thể giải thích được và tiếp cận được đối với nghiên cứu sinh (ít nhất là về nguồn gốc vấn đề và kết quả đạt được), bất kể trong lĩnh vực đặc thù nào và được gán mác gì, "thuần túy" hay "ứng dụng". Khi nào toán học có ý nghĩa thì nó hấp dẫn và đẹp đẽ. Thật không may, khá nhiều ngành toán học trở nên ngày càng trừu tượng hơn, và bây giờ có quá nhiều bài giảng khiến phần đông khán thính giả lạc lối chỉ sau ba phút. Là người phụ trách chương trình sau đại học của khoa Toán ở Yale, tôi buộc phải đề cập tới việc này vì đó là mối bận tâm lớn của sinh viên.

Anh có lời khuyên gì cho những bạn trẻ đang muốn theo đuổi con đường nghiên cứu toán học?

Theo tôi, hầu hết các nhà toán học yêu việc họ làm, bởi vì họ được làm những gì họ yêu thích. Đây là phần thưởng giá trị nhất cho chúng tôi. Nếu một người làm toán để tìm kiếm hào quang, thì nhiều khả năng người đó sẽ thất vọng.

Terry Tao từng viết một tiểu luận thú vị "Bạn có cần có những khả năng thật đặc biệt để làm toán?"(4). Được viết bởi một tài năng lớn như Terry, tiêu đề ấy có vẻ hơi trái khoáy. (Câu trả lời của anh ấy là Không, nhưng câu trả lời ấy chắc sẽ thuyết phục hơn nhiều nếu tác giả bài viết là một người như tôi chẳng hạn). Nhưng tôi hoàn toàn đồng ý với các luận điểm của Terry và đặc biệt khuyến khích các bạn trẻ tìm đọc bài tiểu luận.

Anh có sở thích nào ngoài toán học không?

Tôi hay đi du lịch và rất thích thể thao và phim ảnh. Khoảng mười năm trước, tôi bắt đầu viết một trang blog bằng tiếng Việt. Tôi thấy việc viết blog giúp mình thư giãn và có thêm cảm hứng.

Trước khi kết thúc cuộc phỏng vấn với một trong những chuyên gia tổ hợp hàng đầu này, tôi muốn hỏi anh một số vấn đề chuyên môn cụ thể. Tính phổ dụng (universality) trong lý thuyết ma trận ngẫu nhiên nghĩa là gì? Liên quan đến tính phổ dụng, những kết quả quan trọng là gì? Trong hướng nghiên cứu này, còn những bài toán lớn nào?

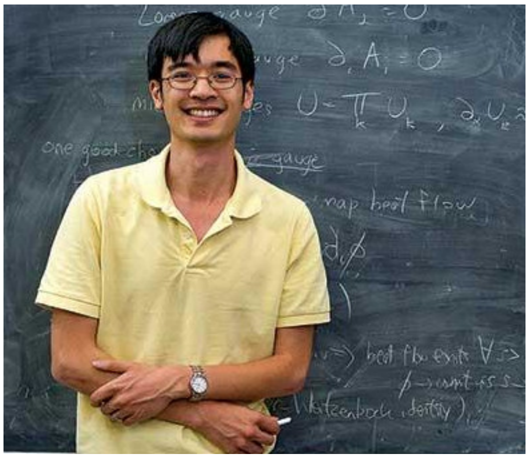
Câu chuyện xoay quanh khái niệm 'tính phổ dụng' khá thú vị. Có hai cách hiểu khác nhau. Ban đầu, lý thuyết ma trận ngẫu nhiên được nghiên cứu chủ yếu bởi các nhà vật lý, những người đặc biệt quan tâm đến sự tương tác giữa các giá trị riêng lân cận nhau. Sự tương tác này có thể được thể hiện qua một tham số gọi là hàm tương quan. Do các tính chất đặc biệt của phân phối Gauss, có thể tính toán chính xác hàm tương quan cho các ma trận mà các phần tử có phân phối Gauss. Giả thuyết nguyên bản về tính phổ dụng nói rằng hàm tương quan của các giá trị riêng không phụ thuộc vào hàm phân bố của các phần tử của ma trận. Ví dụ, nếu chúng ta thay phân phối Gauss bằng một phân phối khác, một cách tiệm cận, chúng ta vẫn nhận được cùng một hàm tương quan. Đây là giả thuyết chính trong cuốn "Ma trận ngẫu nhiên" của Mehta [12], một tài liệu tham khảo quan trọng trong nhiều thập kỷ.

Terry Tao và tôi bắt đầu làm việc với tính chất phổ của ma trận ngẫu nhiên từ mười lăm năm trước. Thực ra chúng tôi không biết nhiều về những nghiên cứu bên vật lý. Tiếp cận của chúng tôi đơn thuần là đại số tuyến tính. Nói chung, chúng tôi nghĩ rằng tất cả các phân phối giới hạn liên quan đến các tham số phổ của ma trận ngẫu nhiên (như giá trị riêng, véctơ riêng, định thức...) là phổ dụng, cụ thể là chúng sẽ không phụ thuộc vào hàm phân phối của các phần tử. "Tính phổ dụng" này đúng trong hầu hết các trường hợp được xem xét cho đến nay, bao gồm cả trường hợp hàm tương quan.

Hai mươi năm vừa qua chúng ta đã chứng kiến một khối lượng khổng lồ các công trình liên quan đến ma trận ngẫu nhiên, với một số đột phá dẫn đến lời giải cho các bài toán lâu đời và nổi tiếng. Theo tôi, hầu hết các câu hỏi chính về phân phối giới hạn phổ đã được giải quyết (cho các mô hình ma trận ngẫu nhiên được nghiên cứu nhiều nhất), ví dụ như giả thuyết luật đường tròn (Circular law) [13] (giả thuyết này là một tương tự trong trường hợp phi Hermit của luật bán nguyệt Wigner [14, 15]) hay giả thuyết Mehta đã nhắc đến phía trên. Tuy

(4)Xem Thông tin Toán học tập 16 số 1 (2012), trang 12-13 (BBT).

vậy, một số câu hỏi quan trọng vẫn còn để ngỏ, ví dụ như giả thuyết địa phương hóa của Anderson [16]. Với câu hỏi này, chúng ta cần nghiên cứu một mô hình ma trận ngẫu nhiên hoàn toàn khác, mà theo tôi là gần gũi hơn với vật lý so với toán tổ hợp.



Terence Tao. Ảnh: Reed Hutchinson, ĐH California, Los Angeles.

Việc nghiên cứu các đa thức ngẫu nhiên, do Marc Kac khởi xướng, cũng đã thúc đẩy nhiều chương trình nghiên cứu và một số lượng lớn các công trình. Anh có thể điểm qua các kết quả hay nhất trong lịch sử nghiên cứu đa thức ngẫu nhiên không? Các vấn đề lớn còn bỏ ngỏ là gì?

Thực ra, Kac không khởi xướng nghiên cứu về đa thức ngẫu nhiên. Đa thức ngẫu nhiên đã được Waring và Sylvester [17] nghiên cứu từ trước. Kết quả chính thức đầu tiên về đa thức ngẫu nhiên được Bloch và Pólya [18] chứng minh khoảng mười năm trước khi Kac [19, 20] bắt đầu bước vào lĩnh vực này. Tuy nhiên, các kết quả của Littlewood – Offord [21, 22, 23] và Kac (vào những năm 1940) thu hút sự chú ý của cộng đồng toán học và trở thành một tiêu điểm trong cả giải tích lẫn xác suất.

Một cách ngắn gọn, một đa thức ngẫu nhiên có dạng $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \xi_i x^i$, trong đó c_i là các hằng số có thể phụ thuộc vào cả i và n, và ξ là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối (tức các biến iid). Bài toán tự nhiên nhất là nghiên cứu số lượng và sự phân phối của các nghiệm thực. Đây cũng là chủ đề chính trong tất cả các bài báo nêu trên, trong trường hợp đặc biệt $c_i = 1$ với mọi i. Trong trường hợp đặc biệt này, đa thức trên được gọi là đa thức Kac. Một số đa thức khác như đa thức Weyl ($c_i = 1/\sqrt{i!}$) cũng đã được nghiên cứu kỹ lưỡng. Mỗi họ đa thức lại có những tính chất rất đặc thù (ví dụ, số nghiệm thực có thể biến đổi tùy vào từng họ).

Tương tự như trường hợp ma trận ngẫu nhiên, có thể tìm công thức chính xác của số nghiệm thực trong trường hợp phân phối Gauss (khi tất cả ξ_i là các biến iid Gauss). Ta cũng có thể đưa ra giả thuyết về tính phổ dụng. Giả thuyết này đã được giải quyết trong nhiều trường hợp nhưng rất nhiều câu hỏi cơ bản vẫn còn bỏ ngỏ. Ví dụ như, có đúng là số các nghiệm thực tuân theo định lý giới hạn trung tâm hay không? Câu trả lời là khẳng định cho đa thức Kac; đây là kết quả của Maslova [24, 25] từ những năm 1970, tức là khoảng 50 năm trước. Tuy nhiên, chúng ta vẫn không biết câu trả lời cho đa thức Weyl và nhiều loại đa thức khác.

Trong một công trình có ảnh hưởng lớn viết chung với Terence Tao, "Inverse Littlewood-Offord theorems and the condition number of random discrete matrices", đăng trên Annals of Mathematics, anh đã phát triển Lý thuyết Littlewood-Offord ngược. Lý thuyết này là gì và tại sao các kết quả của nó lại quan trọng, thưa anh?

Trong chuỗi bài báo về đa thức ngẫu nhiên từ những năm 1940 (đã nêu trên), Littlewood và Offord [21, 22, 23] đã chứng minh định lý phi tập trung (anti-concentration) nổi tiếng. Ở dạng đơn giản nhất, kết quả này nói rằng nếu a_i là các số nguyên khác không, và ξ_i là các biến ngẫu nhiên iid nhận giá trị ± 1, thì tổng $S = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$ chỉ nhận một giá trị cho trước với xác suất nhỏ. Nói một cách chính xác:

$$\rho := \max_a P(S = a) = O(\log n / \sqrt{n}).$$

Định lý này tạo ra cả một hướng nghiên cứu trong tổ hợp, với nhiều kết quả tầm cỡ từ các nhà toán học hàng đầu như Erdös (ông chứng minh lại và cải tiến kết quả này bằng cách sử dụng rất tinh tế Bổ đề Sperner), Kleitman [27], Sárközy-Szemerédi[28], Stanley [29], Halász [30], v.v. Hướng đi chính là áp đặt những giả thiết mạnh hơn lên các tham số a_i và chứng minh các chặn chính xác hơn. Ví dụ, một kết quả nổi tiếng của Sárközy-Szemerédi và Stanley nói rằng chặn $O(\log n/\sqrt{n})$ nói trên có thể cải thiện thành $O(1/n^{3/2})$ nếu ta giả thiết các a_i là phân biệt.

Terry và tôi [26] đưa ra một góc nhìn khác về bài toán này. Chúng tôi giả thiết rằng ρ tương đối lớn (ví dụ $\rho \geq n^{-100}$), và tìm cách đặc trưng tập tất cả các bộ a_i sao cho ρ lớn đến mức như vậy. Ý tưởng này lấy cảm hứng từ Định lý đảo ngược của Freiman về các tập hợp tổng, và vì thế chúng tôi gọi lý thuyết này là lý thuyết Littlewood-Offord ngược. Hóa ra, việc đặc trưng tất cả các bộ a_i như thế là khả thi. Chúng tôi chứng minh rằng để ρ lớn thì các bộ a_i phải có cấu trúc cộng tính mạnh. Sau đó, nhiều nhà nghiên cứu đã tìm ra những đặc trưng khác. Một đặc trưng rất hữu ích do Rudelson và Vershynin [31] tìm ra, thông qua khái niệm ước chung nhỏ nhất tiệm cận.

Các kết quả mới trong lý thuyết Littlewood-Offord ngược có một số ứng dụng. Đầu tiên, chúng bao hàm hầu hết các kết quả đã biết trong lý thuyết Littlewood-Offord "thuận", chẳng hạn như kết quả đã nêu của Sárközy và Szemerédi. Quan trọng hơn, lý thuyết Littlewood-Offord ngược đóng vai trò quyết định trong việc nghiên cứu ma trận ngẫu nhiên và hàm ngẫu nhiên. Cho phép tôi đưa ra một ứng dụng trong lý thuyết ma trận ngẫu nhiên. Khi nghiên cứu ma trận ngẫu nhiên, một tham số thường xuyên xuất hiện là khoảng cách từ một véctơ ngẫu nhiên X đến một siêu phẳng H. Nếu các tọa độ của X là x_i và các tọa độ của véctơ pháp tuyến của H là a_i, thì khoảng cách này là giá trị tuyệt đối của S. Thông thường, chúng ta biết một số tính chất của H đảm bảo rằng bộ a_i không có cấu trúc cộng tính nào. Do đó, theo lý thuyết Littlewood-Offord ngược, chúng ta có thể kết luận rằng với xác suất cao, khoảng cách được đề cập không phải là 0, hay X không thuộc H. Thực tế, lý thuyết Littlewood-Offord ngược cũng cho phép chúng ta thay thế $P(S = a)$ bằng xác suất để S thuộc một khoảng ngắn bao quanh a. Bằng cách này, chúng ta có thể đưa ra chặn dưới cho khoảng cách. Sự kiện này đóng một vai trò rất quan trọng trong việc nghiên cứu giá trị suy biến nhỏ nhất(5) và luật đường tròn.

Đây là một trong những bài báo mà tôi tâm đắc, vì tuy các ứng dụng hầu như chỉ liên quan đến lý thuyết xác suất nhưng công cụ mới căn bản lại đến từ tổ hợp.

(5) Cho M là một ma trận vuông cấp n. Khi đó giá trị suy biến nhỏ nhất (least singular value) của M được định nghĩa là $\sigma_n(M) = \min_{x \in \mathbb{R}^n, ||x||=1} ||Mx||$. Ví dụ nếu M là ma trận đường chéo với các phần tử trên đường chéo chính $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ thì $\sigma_n(M) = \min\{|\lambda_i| : i = 1, \dots, n\}$. Với M tùy ý ta luôn có $\sigma_n(M) \geq 0$ và dấu bằng xảy ra nếu và chỉ nếu M là suy biến (không khả nghịch) (BBT).

Anh có thể giải thích ngắn gọn về khái niệm phi tập trung (anti-concentration) không? Hiện tượng mới này xảy ra trong những vấn đề nào? Anh có thể chỉ ra một số hướng nghiên cứu trong tương lai?

Cho $\xi_1, \ldots, \xi_n$ là các biến ngẫu nhiên thực iid và $F = F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ là hàm số thực. Một mệnh đề phi tập trung điển hình khẳng định rằng xác suất để F nằm trong một khoảng ngắn I là nhỏ. Định lý Littlewood-Offord nói trên là một ví dụ khi F là một hàm tuyến tính. Lý thuyết Littlewood-Offord ngược cho ta một mô tả tương đối đầy đủ về hiện tượng phi tập trung trong trường hợp hàm tuyến tính. Tuy nhiên, đối với các hàm khác (như đa thức bậc cao), chúng ta chưa hề có một bức tranh hoàn chỉnh.

Trong bài báo "Finite and infinite arithmetic progressions in sumsets" [32] *của anh và Endre Szemerédi, trên Annals of Mathematics, anh đã chứng minh một phỏng đoán của Folkman, nói rằng nếu A là một tập các số tự nhiên có mật độ tiệm cận ít nhất là $cn^{1/2}$ với c là hằng số đủ lớn, thì tập tất cả các tổng tập con của A, tức là tập $S_A = \{\sum_{x \in B} x \mid B \subset A, B$ là hữu hạn$\}$, chứa một cấp số cộng vô hạn. Những ý tưởng đột phá trong lời giải của giả thuyết lâu đời này là gì?*

Đầu tiên, chúng tôi tạo ra các cấp số cộng (CSC) rất dài và sau đó gắn chúng lại với nhau. Cách tiếp cận ban đầu cho vấn đề này, về cơ bản, khá giống với chứng minh của Green [4] và Tao [5] về sự tồn tại các CSC dài trong tập số nguyên tố. Chúng tôi đã cố gắng đặc trưng tất cả các tập lớn A sao cho tập các tổng tập con của A, tức là S_A, không chứa CSC (đủ) dài, và phát hiện ra bản thân A phải là tổng của hai CSC. Trong trường hợp này, tập S_A cũng có cấu trúc tương tự. Vì vậy, bài toán ban đầu thực sự trở thành một bài toán hai chiều. Bạn có thể coi tập các tổng tập con là một hình chữ nhật không chứa bất kỳ CSC nào dài hơn hai cạnh của nó. Tuy nhiên, nếu c đủ lớn, vật thể hai chiều phải tự "quấn quanh" mình và tạo ra một CSC dài. Ta có thể chứng minh điều này bằng một lập luận lát ngẫu nhiên (random tiling), nhưng chi tiết cũng tương đối phức tạp. Chúng tôi phải mất vài tháng để viết ra toàn bộ chứng minh sau khi đã có một phác thảo khá thuyết phục. Nhờ bài báo này tôi học được từ Endre rất nhiều điều về tổ hợp cộng tính.

Endre Szemerédi. Ảnh: Gert-Martin Greuel, Viện nghiên cứu toán Oberwolfach.

Trong công trình của mình, anh rất hay sử dụng lập luận tổ hợp để giải các bài toán quan trọng. Anh có thường dùng đến các kỹ thuật đếm không?

Vâng, rất thường xuyên. Tuy nhiên, đối với chúng tôi, điều quan trọng hơn là phải có một ước lượng "mềm" về một tham số (như ước lượng độ lớn của nó) hơn là tính toán chính xác hoặc tìm công thức đóng (có thể sẽ rất khó định lượng). Trên thực tế, một trong những mục đích chính của lý thuyết Littlewood-Offord ngược là đưa ra đặc trưng của những tập hợp "xấu" để từ đó có thể ước lượng kích thước (hoặc xác suất) của chúng.

Khi đọc các bài báo của anh, chúng tôi thấy rằng các lập luận tổ hợp và xác suất đóng một vai trò quan trọng. Anh có nhận *xét gì về sự tương tác giữa tổ hợp và xác suất?*

Một mặt, phương pháp xác suất là một trong những phương pháp hữu hiệu và mạnh mẽ nhất trong tổ hợp. Mặt khác, có thể sử dụng các ý tưởng tổ hợp để xây dựng các công cụ mới hoặc những ý tưởng mới trong lý thuyết xác suất.

Ở mức độ sâu hơn, tôi cảm thấy những người làm nghiên cứu về giải tích, tổ hợp và xác suất thường quan tâm đến những thứ giống nhau về căn bản. Rất khó để đặt tên cho những thứ đó, nhưng thường chúng là những hiện tượng tổng quát (như là giả ngẫu nhiên, độ lệch chuẩn lớn (large deviation), phi tập trung (anti-concentration), tính siêu co rút (hyper-contractivity), hoặc tính mở rộng (expansion)). Với đôi chút kinh nghiệm, ta có thể cảm nhận được sự liên quan giữa các ngành giải tích, tổ hợp, và xác suất, ngay cả khi các kết quả xuất hiện ở những dạng khác nhau.

Trong các công trình của mình, đôi khi anh có trích dẫn Paul Erdös. Anh đã bao giờ gặp ông ấy chưa? Anh thích kết quả nào của Erdös nhất? Có một cuốn sách viết về Paul Erdös mang tựa đề "Người đàn ông chỉ yêu số" (The Man Who Loved Only Numbers). Anh có nghĩ rằng "Người đàn ông chỉ yêu đồ thị" sẽ mô tả Erdös chính xác hơn không?

Vâng, tôi đã gặp Erdös hai lần. Cả hai lần đều đáng nhớ. Lần đầu khi tôi là một sinh viên ở Budapest. Kati (Vesztergombi) giới thiệu tôi với Erdös khi ông đến thăm viện Renyi (có lẽ vào khoảng 1992). Tôi không biết trước về cuộc gặp gỡ và không chuẩn bị bất kỳ vấn đề toán học nào, nên đã bỏ lỡ cơ hội để có được số Erdös bằng 1 (số Erdös của tôi vẫn là 2). Thay vào đó chúng tôi đã nói một chút về chiến tranh Việt Nam.

Lần thứ hai là khi tôi làm nghiên cứu sinh ở Yale. Erdös đọc một bài giảng đặc biệt ở đó. Sau bài giảng chúng tôi nói một chút về luận án của tôi. Ông ấy nhất quyết không tin vào kết quả của tôi và Noga Alon [8] về cân đồng xu. Bài toán là thế này: Có n đồng xu với hai trọng lượng cho phép. Cần bao nhiêu lần cân để biết chắc tất cả các đồng xu có nặng giống nhau hay không? (Như thường lệ, mỗi lần, cho phép đặt k đồng xu bất kỳ lên cân để so với một nhóm k đồng xu khác). Câu trả lời là $\log n/\log\log n$; nhưng ông ấy khăng khăng nói rằng kết quả đúng phải là $\log n$, khiến tôi phát hoảng và chắc mẩm rằng mình đã nhầm đâu đó rồi.

Erdös viết rất nhiều bài báo quan trọng trong rất nhiều lĩnh vực toán học khác nhau, không chỉ lý thuyết số và lý thuyết đồ thị. Trong logic, xác suất, giải tích, bạn đều tìm thấy những kết quả cơ bản mang tên ông. Hay ta nên đặt tên cuốn sách là "Người đàn ông chỉ yêu toán"?

Anh có theo đuổi một bài toán nào đó trong suốt nhiều năm không? Anh đạt được những tiến triển nào rồi?

Tôi đang theo đuổi một số vấn đề cơ bản về đa thức ngẫu nhiên và ma trận ngẫu nhiên. Những vấn đề này cơ bản đến mức thật đáng hổ thẹn là ta vẫn chưa thể giải quyết chúng. Nhưng biết đâu một ngày nào đó...

Thưa giáo sư Vũ Hà Văn, thay mặt cho tạp chí Enumerative Combinatorics and Applications, tôi muốn cảm ơn anh vì cuộc phỏng vấn rất thú vị này.

TÀI LIỆU

[1] E. Szemerédi, *Regular partitions of graphs*, in: Proc. Colloque Inter. CNRS (J.-C. Bermond, J. -C. Fournier, M. Las Vergnas and D. Sotteau eds.), 1978, 399–401.

[2] A. Thomason, *Pseudo-random graphs*, Annals of Discrete Math. 33 (1987), 307–331.

[3] F. R. K. Chung, R. L. Graham and R. M. Wilson, *Quasi-Random Graphs*, Comb. 9:4 (1989), 345–362.

[4] B. Green, *Long arithmetic progressions of primes*, in W. Duke, Y. Tschinkel (eds.), Analytic number theory, Clay Mathematics Proceeding 7, Providence, RI: American Math. Soc. (2007), 149–167.

[5] T. Tao, *Arithmetic progressions and the primes*, Collectanea Mathematica, Vol. Extra (2006), 37–88.

[6] G.A. Freiman, *Inverse problems of additive number theory, VI. On the addition of finite sets, III*, Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika 3 (1962), 151–157.

[7] D. N. Kozlov and V. H. Vu, *Coins and Cones*, J. Comb. Theory, Ser. A 78:1 (1997), 1–14.

[8] N. Alon, D. N. Kozlov and V. H. Vu, *The geometry of coin-weighing problems*, FOCS (1996), 524–532.

[9] J. H. Kim and V. H. Vu, *Small complete arcs in projective planes*, Comb. 23:2 (2003) 311–363.

[10] M. Ajtai, J. Komlós and E. Szemerédi, *A note on Ramsey numbers*, J. Combin. Theory Ser. A 29:3 (1980), 354–360.

[11] L. Guth and N. H. Katz, *On the Erdös distinct distances problem in the plane*, Ann. Math. 181 (2015), 155–190.

[12] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 3rd edition, Academic Press, New York, 2004.

[13] T. Tao and V. Vu, *Random Matrices: Universality of ESDs and the circular law*, Ann. Prob. 38:5 (2010), 2023–2065.

[14] E. Wigner, *Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions*, Ann. Math. 62 (1955), 548–564.

[15] E. Wigner, *On the distribution of the roots of certain symmetric matrices*, Ann. Math. 67 (1958), 325–328.

[16] G. Stolz, *An introduction to the mathematics of Anderson localization*, arXiv:1104.2317v1 [math-ph], 2011.

[17] I. Todhunter, *A history of the mathematical theory of probability*, Stechert, New York, 1931.

[18] A. Bloch and G. Pólya, *On the roots of certain algebraic equations*, Proc. London Math. Soc. 33 (1932), 102–114.

[19] M. Kac, *On the average number of real roots of a random algebraic equation*, Bull. Amer. Math. Soc. 49, (1943), 314–320. Erratum: Bull. Amer. Math. Soc. 49, (1943), 938.

[20] M. Kac, *On the average number of real roots of a random algebraic equation. II*, Proc. London Math. Soc. 50 (1949), 390–408.

[21] J. E. Littlewood and A. C. Offord, *On the number of real roots of a random algebraic equation. I*, J. London Math. Soc. 13 (1938), 288–295.

[22] J. E. Littlewood and A. C. Offord, *On the number of real roots of a random algebraic equation. II*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 35 (1939), 133–148.

[23] J. E. Littlewood and A. C, Offord, *On the number of real roots of a random algebraic equation. III*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. 54 (1943), 277–286.

[24] N. B. Maslova, *The variance of the number of real roots of random polynomials*, Teor. Verojatnost. i Primenen. 19 (1974), 36–51.

[25] N. B. Maslova, *The distribution of the number of real roots of random polynomials*, Theor. Probability Appl. 19 (1974), 461–473.

[26] T. Tao and V. H. Vu, *Inverse Littlewood–Offord theorems and the condition number of random discrete matrices*, Ann. Math. 169:2 (2009), 595–632.

[27] D. Kleitman, *On a lemma of Littlewood and Offord on the distributions of linear combinations of vectors*, Advances in Math. 5 (1970), 155–157.

[28] A. Sárközy and E. Szemerédi, *Über ein problem von Erdös und Moser*, Acta Arithmetica 11 (1965), 205–208.

[29] R. Stanley, *Weyl groups, the hard Lefschetz theorem, and the Sperner property*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods 1:2 (1980), 168–184.

[30] G. Halász, *Estimates for the concentration function of combinatorial number theory and probability*, Period. Math. Hungar. 8:3-4 (1977), 197–211.

[31] M. Rudelson and R. Vershynin, *The Littlewood-Offord Problem and invertibility of random matrices*, Advances in Math. 218 (2008), 600–633.

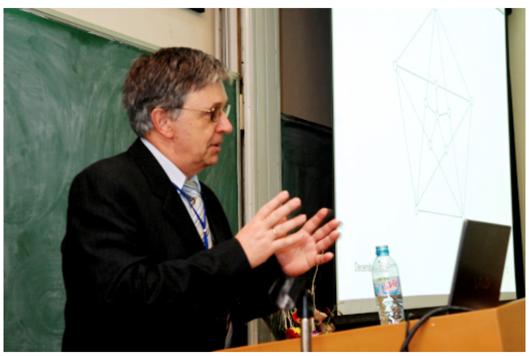
[32] E. Szemerédi and V. H. Vu, *Finite and infinite arithmetic progressions in sumsets*, Ann. Math. 163 (2006), 1–35.

Người dịch: Nguyễn Thị Thu Hằng và Nguyễn Phúc Khánh Linh (Quỹ VINIF).

László Lovász, đồng chủ nhân Giải Abel 2021

Trần Mạnh Tuấn(1)

Ngày 17/03/2021, Viện Hàn lâm Khoa học Na Uy đã quyết định trao tặng Giải Abel 2021 cho giáo sư László Lovász (Viện Toán học Alfréd Rényi và Đại học Eötvös Loránd, Budapest, Hungary) và giáo sư Avi Wigderson (Viện Nghiên cứu cao cấp, Princeton, Mỹ) vì "*những đóng góp mang tính nền tảng cho khoa học máy tính lý thuyết và toán học rời rạc, cũng như vai trò tiên phong của họ trong việc đưa những lĩnh vực này trở thành trung tâm của toán học hiện đại*."



László Lovász tại Việt Nam năm 2009.
Ảnh: Viện Toán học.

Lovász đã có những đóng góp mang tính cách mạng trong việc thiết lập các cách thức mà toán rời rạc có thể trả lời các câu hỏi cơ bản trong khoa học máy tính lý thuyết. Các ý tưởng thuật toán của ông, bao gồm các ứng dụng của phương pháp ellipsoid trong tối ưu tổ hợp, thuật toán Lovász-Lenstra-Lenstra, thuật toán chẵn lẻ matroid và các quy trình cải tiến để tính toán thể tích, tất cả đều có ảnh hưởng sâu sắc đến khoa học máy tính lý thuyết. Thuật toán Lovász-Lenstra-Lenstra (LLL), được phát triển bởi Lovász và hai nhà lý thuyết số người Na Uy, liên quan đến một đối tượng hình học cơ bản là mạng tinh thể, hay lưới (lattice). Thuật toán này đã có những ứng dụng đáng chú ý trong nhiều lĩnh vực bao gồm lý thuyết số, mật mã và điện toán di động. Các hệ thống mã hoá dựa trên thuật toán LLL được xem là có nhiều hứa hẹn cho an ninh mạng tương lai bởi vì không giống như những hệ thống mã hoá truyền thống, chúng thậm chí có thể chống lại các cuộc tấn công của máy tính lượng tử.

Trong thập kỷ 70 và 80 của thế kỷ trước, ông đã giải quyết nhiều bài toán quan trọng có ảnh hưởng sâu rộng đến nhiều lĩnh vực của toán học rời rạc. Vào năm 1972, ông đã chứng minh giả thuyết về đồ thị hoàn hảo bằng cách giới thiệu các phương pháp toán học sâu sắc dựa trên các kỹ thuật từ tổ hợp đa diện và hình học. Tương tự, Lovász đã giải quyết phỏng đoán Kneser và câu hỏi về công suất Shannon của đồ thị ngũ giác, bằng các công cụ đến từ các lĩnh vực tưởng như xa xôi: tôpô đại số và hình học.

Một chủ đề chính trong nghiên cứu của Lovász trong cả hai địa hạt toán tổ hợp và thiết kế thuật toán là sử dụng các phương pháp xác suất. Đóng góp được biết đến nhiều nhất của ông cho phương pháp xác suất là Bổ đề địa phương Lovász (Lovász Local Lemma), một công cụ quan trọng và được sử dụng thường xuyên trong xác suất tổ hợp để thiết lập sự tồn tại của những sự kiện hiếm xảy ra. Lovász cũng đã đóng góp vào nghiên cứu các chứng minh kiểm chứng được với xác suất cao (Probabilistically Checkable

(1)Viện Khoa học Cơ bản, Hàn Quốc. Email: tuantran@ibs.re.kr

Proofs) – công trình của ông đã được phát triển thành một trong những lĩnh vực quan trọng nhất của độ phức tạp tính toán.

Một số lượng lớn các cấu trúc và hiện tượng thú vị nhất của thế giới có thể được mô tả bằng mạng lưới (network). Phát triển một lý thuyết toán học về các mạng lưới với kích cỡ lớn là một thách thức quan trọng. Những năm gần đây, Lovász cùng với các đồng nghiệp đã phát triển một cách tiếp cận tới lý thuyết này. Lovász đã mô tả cách tiếp cận của mình trong cuốn "*Large Networks and Graph Limits*", xuất bản năm 2012. Giáo sư Terence Tao, một nhà toán học từng giành huy chương Fields, bình luận về cuốn sách: "*Toán tổ hợp hoàn toàn không phải là một địa hạt biệt lập, mà có mối liên hệ phong phú và thú vị với hầu hết mọi lĩnh vực của toán học cũng như khoa học máy tính. Nghiên cứu được trình bày trong cuốn sách của Lovász minh chứng cho hiện tượng này bằng cách lấy một trong những đối tượng tổ hợp căn bản nhất - đồ thị hữu hạn - và thông qua quá trình lấy giới hạn của dãy các đồ thị như vậy, tiết lộ và làm rõ các mối liên hệ của tổ hợp với lý thuyết độ đo, giải tích, vật lý thống kê, hình học metric, lý thuyết phổ, kiểm định tính chất, hình học đại số, và thậm chí cả với các bài toán thứ mười và mười bảy của Hilbert. Cuốn sách này mang đến một cơ hội tuyệt vời cho sinh viên chuyên ngành tổ hợp khám phá các lĩnh vực toán học khác, hoặc ngược lại cho các chuyên gia trong các lĩnh vực toán học khác làm quen với một số khía cạnh của lý thuyết đồ thị.*"

Sau đây là vài nét về tiểu sử của Lovász.

Lovász sinh năm 1948 tại Budapest, Hungary. Lovász đã xuất sắc giành huy chương vàng tại ba kỳ Olympic Toán quốc tế liên tiếp (1964, 1965, 1966), hai lần trong đó với điểm tuyệt đối. Lovász còn được nhớ đến bởi chiến thắng trong một cuộc thi toán học trên truyền hình, trước đối thủ là Lajos Pósa – một người bạn thân của ông. Khi được phỏng vấn về cuộc thi, Lovász nhớ lại: "*Cả hai chúng tôi bị đưa vào trong lồng kính, nhận được cùng một bài toán, và có ba bốn phút để suy nghĩ*". Đề thi tương tự như một bài toán mà Pósa đã từng chỉ cho Lovász. "*Vì vậy, tôi hơi xấu hổ khi giành chiến thắng với kiến thức học được từ anh ấy,*" Lovász nói.

Lovász theo học Đại học Eötvös Loránd tại Budapest, Hungary. Ông được trao bằng Tiến sĩ vào năm 1970 ở tuổi 22, tại thời điểm đó ông đã báo cáo tại nhiều hội nghị quốc tế và đã đăng 15 bài báo khoa học. Do sự cứng nhắc của hệ thống giáo dục Hungary vào lúc đó, ông chỉ tốt nghiệp đại học vào năm 1971, một năm sau khi nhận bằng Tiến sĩ.

Trong những năm 70 và 80 của thế kỉ trước, Lovász làm việc tại Hungary, đầu tiên là tại ĐH Eötvös Loránd và sau đó tại ĐH József Attila ở Szeged, nơi ông đảm nhận chức trưởng khoa Hình học vào năm 1978. Lovász trở lại Eötvös Loránd vào năm 1982 với cương vị trưởng khoa khoa học máy tính.

Năm 1993 Lovász được bổ nhiệm làm giáo sư khoa học máy tính và toán học tại ĐH Yale. Giáo sư Vũ Hà Văn, một cựu nghiên cứu sinh của Lovász tại đại học Yale, nhớ lại "Lovász là một thành viên quý giá của khoa Toán, dĩ nhiên rồi, nhưng bạn thường thấy ông ngồi trong tòa nhà khoa học máy tính. Hầu hết các lớp học của ông đều ở đó. Kiến thức của ông rất rộng và ông là một người rất chu đáo và nhẹ nhàng." Năm 1999, Lovász rời Yale để đảm nhận vị trí nghiên cứu viên cao cấp tại Microsoft, trước khi trở lại ĐH Eötvös Loránd vào năm 2006, và ở đó cho đến khi nghỉ hưu năm 2018.

Lovász đã nhận được nhiều giải thưởng toán học danh giá như Giải Fulkerson (1982, 2012), Giải thưởng Nhà nước Hungary (1985), Giải Pólya (1979), Huy chương Brouwer (1993), Giải Wolf (1999), Giải Knuth (1999), Giải Gödel (2001), Giải lý thuyết John von Neumann (2006), Giải Széchenyi (2008) và Giải Kyoto (2010).

Ông giữ những vị trí quan trọng trong cộng đồng khoa học như chủ tịch Liên đoàn Toán học Quốc tế nhiệm kỳ 2007 – 2010, chủ tịch Viện Hàn lâm Khoa học Hungary từ năm 2014 đến 2020.

TÀI LIỆU

[1] Giải Abel 2021, Thông tin từ trang https://www.abelprize.no/c76389/seksjon/vis.html?tid=76390

[2] Nguyễn Thị Thu Hằng, Nguyễn Phúc Khánh Linh, *Bài phỏng vấn Giáo sư Vũ Hà Văn của Toufik Mansour*, https://blog.vinbigdata.org/bai-phong-van-giao-su-vu-ha-van/

László Lovász

Vũ Hà Văn[(1)]

Tháng 3 vừa rồi, nhà toán học László Lovász (Viện Hàn lâm Khoa học Hungary) cùng Avi Wigderson (Viện Nghiên cứu cao cấp, Princeton) được tặng thưởng giải thưởng Abel, có lẽ là giải thưởng của toán học gần với giải thưởng Nobel nhất (theo các tiêu chí khoa học và cả cách thức tổ chức). Giải thưởng được trao trên nền tảng các đóng góp của hai nhà toán học này trong lĩnh vực toán rời rạc và khoa học máy tính, đặc biệt các công trình quan trọng kết nối hai lĩnh vực trên.

László Lovász và Katalin Vesztergombi năm 1986. Ảnh: Paul Halmos.

Tôi biết Lovász (tên thân mật là Laci) từ gần 30 năm nay. Vợ chồng ông là người dẫn dắt và giúp đỡ tôi vào con đường toán học khi còn là một sinh viên khoa điện tử ở Budapest, là thầy hướng dẫn luận án tiến sĩ ở Yale, là đồng nghiệp ở Microsoft, là bạn của gia đình tôi trong thời gian rất dài. Dĩ nhiên, tôi (và cả gia đình) rất vui khi ông nhận được giải thưởng danh giá này, nhưng điều đó không làm tôi ngạc nhiên chút nào. Với những đóng góp và mức độ ảnh hưởng to lớn của ông trong toán học, với rất nhiều giải thưởng danh giá trước đó và gần 65 nghìn trích dẫn trên Google Scholar (một con số gần như không tưởng với những người làm toán), điều đó sớm muộn phải tới, vấn đề chỉ là thời gian.

Lovász nổi tiếng là thần đồng của khoa học Hungary từ rất sớm. Mặc dầu là một nước có dân số không cao (chừng 10 triệu dân), Hungary có một truyền thống sản sinh ra các nhà khoa học rất xuất sắc. Một câu chuyện lưu truyền trong giới khoa học là trong một số cuộc họp của dự án Mahattan, tiếng Hung được nói nhiều

(1)Đại học Yale. Email: van.vu@yale.edu.

hơn tiếng Anh. Trong hơn 20 nhà toán học được giải thưởng Abel, đã có 3 người Hung (Lax, Szemerédi, Lovász). Lovász có 4 huy chương thi toán quốc tế (3 vàng, 1 bạc), viết luận án tiến sĩ cùng với luận án tốt nghiệp đại học, và trở thành viện sĩ hàn lâm trẻ nhất của Hungary khi chưa tới 30 tuổi.

Một số thầy giáo cũ của tôi ở Budapest kể chuyện, trong một hội thảo nọ, một giáo sư đến từ phương Tây nói tới một vấn đề hóc búa vừa được một nhà toán học Hungary là Lovász giải quyết. Khi ban tổ chức nói ông Lovász cũng có mặt trong hội thảo, giáo sư lễ phép xin gặp giáo sư Lovász để trao đổi. Ban tổ chức im lặng một cách khó hiểu, sau đó bẽn lẽn thông báo là ông Lovász chưa phải là giáo sư. "Ồ thế thì gặp tiến sĩ Lovász vậy". Ban tổ chức im lặng lâu hơn, và một cách bẽn lẽn hơn, thông báo tiếp là ông Lovász cũng chẳng phải tiến sĩ. Hiện "ông" đâu đó độ 19 tuổi và đang đá bóng ở ngoài sân.

Toán rời rạc là một lĩnh vực tương đối mới. Chỉ cách đây chừng 30 năm, nó vẫn được (hay bị) nhìn nhận như một tập hợp một số bài toán thông minh và có thể rất khó (như giả thuyết 4 màu), nhưng chưa được nhìn nhận như một ngành riêng biệt (như đại số hay số học), với các lý thuyết sâu và rộng. Nhận thức đó dần dần thay đổi theo thời gian, bởi những đóng góp của những nhà toán học hàng đầu như Lovász, Wigderson, Szemerédi, hay Tao. Chẳng những thế, ảnh hưởng của ngành này lên các lĩnh vực ứng dụng là rất lớn, so với một số ngành kinh điển mang tính trừu tượng hơn. Các công trình của Lovász đem lại nhiều đột phá mang tính nền tảng trong khoa học máy tính, với những ứng dụng rất cụ thể đi thẳng vào cuộc sống. Tiêu biểu là thuật toán LLL (Lovász-Lenstra-Lenstra).

Lưới (lattice) là một tập con của mạng các điểm nguyên trong không gian N chiều. Tập này đóng dưới phép cộng và phép nhân với các số nguyên. Ví dụ các điểm nguyên có tất cả toạ độ chia hết cho hai tạo thành một lưới. Một lưới L thường được đại diện bởi một hệ cơ sở B gồm một số véctơ. Tất cả các véctơ khác của L có thể viết bằng một tổ hợp nguyên của các véctơ trong B. Bài toán đặt ra là tìm véctơ có độ dài ngắn nhất trong L, dựa vào input là B.

Các bài toán trong lý thuyết tính toán hiện đại đều liên quan đến khái niệm thời gian (running time). Phần lớn các bài toán xuất phát từ thực tế chỉ có một số hữu hạn các trường hợp, nên cứ tính mãi sớm muộn cũng tìm ra lời giải tối ưu. Câu hỏi quan trọng ở đây là "Thuật toán sẽ chạy mất bao lâu?" Nếu thời gian đó tỷ lệ với N^2 (nói rộng hơn, hàm đa thức của N), thì thuật toán được coi là "nhanh". Nếu nó tỷ lệ với các hàm tệ hơn (như hàm mũ, 2^N), thì thuật toán bị coi là "chậm". Ở đây N là độ lớn của input (trong trường hợp trên có thể chuẩn hoá bằng độ lớn của không gian). Giả thuyết P khác NP, một trong những giả thuyết khó nhất, và có lẽ là có giá trị ứng dụng cao nhất, trong toán học nói rằng có nhiều bài toán không thể giải "nhanh" bằng máy tính. Bài toán tìm véctơ ngắn nhất là một bài toán như vậy.

Thuật toán LLL cho ta (một cách nhanh chóng) một lời giải gần đúng, tức là tìm được một véctơ không phải ngắn nhất (điều không thể làm được theo giả thuyết P khác NP), nhưng là một véctơ không dài hơn quá nhiều. Lời giải này dẫn tới lời giải (về mặt thuật toán) cho một loạt các bài toán rất cụ thể như khai triển một đa thức thành tích các đa thức tối giản, hay một số bài toán quan trọng trong lý thuyết quy hoạch tuyến tính (Linear

Programing). Đặc biệt, nó cũng có thể dùng để giải khoá mã RSA (một trong những chế độ bảo mật–crypto system–được dùng rộng rãi nhất trong thực tế) trong một số trường hợp. Điều này giúp cho các nhà ứng dụng RSA cải tiến hệ thống của họ để nó trở nên an toàn hơn.

Hướng nghiên cứu của tôi khác Lovász, nên không có dịp viết bài chung với ông nhiều. Nhưng như một thầy giáo hướng dẫn, ảnh hưởng của ông rất sâu sắc. Lovász có kiến thức rất rộng về toán học (và khoa học nói chung). Nhờ đó ông nhìn thấy những mối quan hệ ẩn giữa các lĩnh vực khác nhau, và có những lời giải rất đặc biệt cho một số bài toán khó, dùng những công cụ ít ai ngờ tới. Một ví dụ tiêu biểu là lời giải về bài toán tô mầu Kneser (Kneser conjecture) dùng công cụ từ tô pô. Lời giải này gần như mở ra cả một hướng mới trong lý thuyết đồ thị. Bài báo ngắn 5 trang được trích dẫn hơn 800 lần. Các bài giảng của ông đều cuốn hút, và dù người nghe không thuộc trong lĩnh vực hẹp của ông, cũng có thể học được những điều mới mẻ. Một phần, đó là nhờ tư duy của ông rất mạch lạc, có khả năng diễn giải một cách dễ hiểu các vấn đề phức tạp. Nhưng có lẽ quan trọng hơn, là ông chuẩn bị rất kỹ lưỡng, và coi các bài giảng này như một sự đóng góp cho cộng đồng. Lovász viết rất nhiều sách, trong đó có những quyển như *Combinatorial Problems and Exercises*, viết từ cuối những năm 70, cho đến nay vẫn là sách gối đầu giường của các nhà nghiên cứu trong lĩnh vực này.

Việc Lovász nghiên cứu khoa học máy tính, không chỉ là vì nó là ngành khá gần với tổ hợp, mà có lẽ cũng vì ông là người rất thực tế, thích tìm tòi. Ông đã lập trình trên những chiếc máy tính hiếm hoi có được ở Đông Âu trong thời kỳ chiến tranh lạnh. Ông là một trong số rất ít nhà toán học tôi biết có thể chữa được gần hết các loại máy móc vật dụng ở quanh nhà, đôi khi cả ô tô. Phần lớn các nhà toán học khác chỉ biết chúng tồn tại (hoặc chứng minh được chúng tồn tại). Ông nhìn thấy khả năng và tầm quan trọng của máy tính từ rất sớm, rất xa trước khi máy tính đóng vai trò mấu chốt trong cuộc sống như hiện nay.

Phần lớn các nhà nghiên cứu đều muốn giành hết thời gian vào các dự án của mình, thậm chí tìm mọi cách giảm giờ lên lớp để viết bài. Nhưng Lovász dành nhiều rất nhiều thời gian vào việc quản lý, điều hành, đào tạo thế hệ trẻ. Ông là trưởng khoa hình học ở Đại học Szeged (Hungary) khi chưa đến 30 tuổi. Trong 4 năm, từ đầu 2007 đến cuối 2010, ông là chủ tịch Liên đoàn Toán học Quốc tế (IMU). Quãng năm 2007, khi vợ chồng ông chuẩn bị rời Mỹ về Hungary (Lovász khi đó làm việc tại Microsoft Research), tôi có hỏi ông sao lại về. Ông trả lời đại ý là cũng muốn gây dựng lại các truyền thống toán học cũ của Hungary, vì sau khi tường Berlin sụp đổ, hầu hết các giáo sư giỏi nhất đều sang Mỹ hay Tây Âu. Rất nhiều nhà toán học nổi tiếng của Hungary là học trò, trực tiếp hay gián tiếp, của ông. Năm 2014, ông đảm nhận vị trí chủ tịch Viện Hàn lâm Khoa học Hungary. Đây là vị trí rất trang trọng, nhưng trong bối cảnh chính trị của Hungary khi đó (và cả hiện nay), thì là một trách nhiệm rất lớn và nhiều áp lực.

Những năm gần đây, chúng ta rất hay đối mặt với câu hỏi:

– Học toán để làm gì?

Cuộc sống và sự nghiệp của László Lovász phảng phất như một câu trả lời.

Caucher Birkar và chương trình mô hình tối tiểu

Nguyễn Hữu Kiên[(1)]

CON ĐƯỜNG GIAN NAN ĐỂ TRỞ THÀNH MỘT NHÀ TOÁN HỌC

Caucher Birkar tên thật là Fereydoun Derakhshani. Anh sinh năm 1978 trong một gia đình dân tộc thiểu số người Kurd ở phía tây Iran gần biên giới Iraq. Tuổi thơ của Birkar thực sự không êm đềm. Chiến tranh giữa Iran và Iraq những năm tám mươi của thế kỉ trước khiến cuộc sống của một gia đình đông con như gia đình anh thêm phần khó khăn. Họ có thể vượt qua giai đoạn đó chỉ nhờ vào việc tự sản xuất được nguồn thực phẩm. Anh trai Birkar là người ảnh hưởng rất lớn đến sự nghiệp của Birkar sau này. Anh là người đầu tiên trong gia đình được đi học tử tế và rất thích các môn Toán, Vật lý và Kĩ thuật. Birkar đã học từ anh mình cách tính đạo hàm và tích phân ngay từ trường trung học cơ sở. Sau này, Birkar theo học khoa toán Đại học Tehran và nhận bằng cử nhân tại đây. Thành tích nổi bật đầu tiên của Birkar là giải ba kì thi toán dành cho sinh viên của trường năm 2000. Một thời gian ngắn sau đó, Fereydoun Derakhshani đến nước Anh theo diện tị nạn chính trị và làm nghiên cứu sinh tại Đại học Nottingham từ 2001 đến 2004. Tại đây, anh chính thức đổi tên thành Caucher Birkar.

Birkar muốn học hình học đại số nhưng ở Nottingham thời điểm đó không có ai chuyên sâu về lĩnh vực này. Thầy hướng dẫn đầu tiên của Birkar là Ivan Fesenko, một nhà lý thuyết số, ông đã khuyến khích Birkar tiếp cận với các chuyên gia hình học đại số bên ngoài Nottingham. Năm 2002, may mắn đã đến với Birkar khi anh gặp được Vyacheslav Shokurov, một chuyên gia hình học đại số hàng đầu, giáo sư đại học Johns Hopkins, Hoa Kỳ. Theo ấn tượng đầu tiên của Shokurov, Birkar khá rụt rè nhưng lĩnh hội kiến thức rất nhanh chóng. Vào thời điểm đó, hình học song hữu tỉ - một nhánh của hình học đại số, chuyên ngành mà Shokurov nghiên cứu, đang chững lại bởi những vấn đề đá tảng và ông là một trong số ít người vẫn còn miệt mài tấn công chúng. Shokurov đã nhìn thấy tài năng của Birkar và rất hi vọng vào một làn gió mới trong hướng nghiên cứu của mình. Và hi vọng của ông đã đặt đúng người, vì những công trình nghiên cứu đột phá của Birkar và các đồng nghiệp đã mang lại cho hình học song hữu tỉ một diện mạo mới. Những nghiên cứu xuất sắc đã giúp Birkar nhận được huy chương Fields - giải thưởng danh giá nhất dành cho các nhà toán học không quá 40 tuổi, tại Đại hội Toán học Quốc tế năm 2018 tại Brasil. Như lời của Birkar, anh muốn giải thưởng này mang đến nụ cười cho toàn bộ bốn mươi triệu người Kurd, những người vẫn đang phải chiến đấu với chiến tranh và khủng bố cực đoan để có thể quyết định được tương lai và vận mệnh của chính mình. Birkar hiện là giáo sư tại Đại học Cambridge, Vương quốc Anh.

ĐA TẠP ĐẠI SỐ VÀ ĐIỂM KÌ DỊ

Lĩnh vực nghiên cứu chính của Birkar là hình học đại số. Cụ thể hơn đó là lĩnh vực nghiên cứu tập nghiệm của các hệ phương trình đa thức. Các đường conic

[(1)]Khoa Toán, ĐH KU Leuven, Vương quốc Bỉ. Email: kien.nguyenhuu@kuleuven.be

ở trường phổ thông đều là các tập như thế. Tổng quát hơn, cho K là một trường (ví dụ $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, hay trường có p phần tử $\mathbb{F}_p$) và $f_1, ..., f_m$ là các đa thức n biến với hệ số thuộc K, khi đó tập đại số X cho bởi $f_1, ..., f_m$ là tập nghiệm trong K^n của hệ phương trình $f_1 = ... = f_m = 0$. Câu hỏi đầu tiên đặt ra là khi nào X khác rỗng và nếu vậy hình dáng của X như thế nào? Trả lời câu hỏi này trong trường hợp tổng quát là rất khó, nhất là khi K không đóng đại số hay có đặc số dương. Hơn nữa các tính chất hình học thường thể hiện đầy đủ nhất trên trường đóng đại số, vì vậy người ta thường giả sử K là trường đóng đại số với đặc số 0. Ta có thể trang bị cho K^n một tôpô (tôpô Zariski), bằng cách quy định các tập đóng là các tập đại số. Trang bị cho mỗi tập đại số $X \subseteq K^n$ tôpô cảm sinh. Tổng quát hơn, một đa tạp đại số được tạo thành bằng cách dán hữu hạn đa tạp đại số afin với nhau một cách tương thích cùng với tô pô Zariski trên đó. Để đơn giản hơn, sau đây ta giả sử X là tập bất khả quy theo nghĩa nó không thể viết thành hợp của hai tập con đóng khác rỗng thực sự.

Caucher Birkar. Ảnh: Đại học Cambridge.

Một đối tượng quan trọng trong hình học đại số là các đa tạp xạ ảnh. Cụ thể hơn chúng đóng vai trò các vật thể com-pắc (đa tạp đầy) trong hình học đại số. Đối với mỗi đa tạp đại số chúng ta cố gắng coi chúng như tập con mở của một đa tạp đại số xạ ảnh (đa tạp đầy) bởi một quá trình tương tự như com-pắc hoá và lớp vật thể quan trọng bậc nhất là các đa tạp đại số *tựa xạ ảnh* X (tức là com-pắc hoá của X là đa tạp xạ ảnh). Chẳng hạn đường thẳng xạ ảnh $\mathbb{P}^1_K$ có thể coi như đường thẳng afin K^1 thêm vào một điểm vô cùng hay tổng quát hơn, không gian xạ ảnh n chiều $\mathbb{P}^n_K$ có thể coi như không gian afin n chiều K^n thêm vào một không gian xạ ảnh $(n-1)$ chiều $\mathbb{P}^{n-1}_K$ tại vô tận. Về mặt tập hợp, không gian xạ ảnh n chiều trên K có thể đồng nhất với tập tất cả các đường thẳng đi qua điểm $O(0, 0..., 0)$ của không gian afin $(n+1)$ chiều trên K. Do đó mỗi điểm trong không gian xạ ảnh n chiều có thể đồng nhất với một bộ số $(a_0, ..., a_n) \in K^{n+1} \backslash (0, ..., 0)$, chia thương cho quan hệ tương đương $\sim$: với mọi $\lambda \neq 0$, $(a_0, ..., a_n) \sim (\lambda a_0, ..., \lambda a_n)$. Một đa tạp đại số xạ ảnh trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ là tập nghiệm của hệ phương trình $f_1 = ... = f_m = 0$ với $f_1, ..., f_m$ là các đa thức thuần nhất theo $n+1$ biến.

Một vấn đề xuất hiện đối với các đa tạp đại số là các điểm kì dị. Đối với các đa tạp vi phân hay đa tạp giải tích chúng ta thường giả sử chúng 'trơn' ở mức nào đó. Nói cách khác, ta giả sử không gian tiếp xúc tại mỗi điểm 'không có gì bất thường' so với không gian tiếp xúc tại các điểm thuộc lân cận đủ nhỏ của điểm đó. Tuy nhiên đối với đa tạp đại số có những điểm không 'trơn' như vậy, chúng được gọi là những điểm kì dị. Chẳng hạn xét đường cong C trong mặt phẳng afin K^2 cho bởi phương trình $f(x, y) = x^2 - y^3 = 0$, khi đó tại mỗi điểm $P = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$, tiếp tuyến tại P của C có pháp tuyến $\eta(P) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)) \neq (0,0)$ tuy nhiên $\eta(0,0) = (0,0)$ không là pháp tuyến của bất kì đường thẳng nào. Sự bất thường xảy ra tại điểm $(0,0)$, vì vậy $(0,0)$ là điểm kì dị của C. Trong trường hợp tổng quát, cho trước tập các phương trình xác định đa tạp đại số X, ta có thể dễ dàng tìm được tập các điểm kì dị $\mathrm{Sing}(X)$ của X, đây là một tập con đóng của X. Ta gọi X là trơn nếu tập các điểm kì dị của X là rỗng.

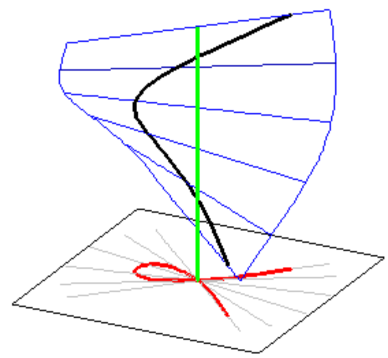
PHÉP GIẢI KÌ DỊ

Nhiều tính toán của đa tạp đại số gặp rắc rối lớn tại các điểm kì dị vì vậy ta muốn tìm cách loại bỏ chúng. Một quá trình như vậy được gọi là *giải kì dị*. Cho trước một đa tạp đại số X, một phép giải kì dị của X, một cách gần đúng, là một ánh xạ đại số f đi từ một đa tạp trơn Y đến X sao cho:

- f cảm sinh đẳng cấu tại các lân cận đủ nhỏ của những điểm trơn của X;
- tại bất kì điểm y của Y sao cho $f(y) \in \mathrm{Sing}(X)$ thì ảnh ngược $f^{-1}(\mathrm{Sing}(X))$ tại lân cận đủ nhỏ của y giống như tập các nghiệm của phương trình đại số $y_1 ... y_k = 0$, trong đó $1 \leq k \leq n$ và $(y_1, ..., y_n)$ là hệ toạ độ thích hợp tại y.

Hơn nữa, chúng ta cũng đòi hỏi một tính chất gần với việc rằng f biến tập đóng thành tập đóng, và đường chéo $Y \times Y$ là tập con đóng của tích thớ $Y \times_X Y = \{(x,y) | f(x) = f(y)\}$ (chính xác hơn, ta đòi hỏi ánh xạ $f : Y \to X$ có tính riêng (*properness*) và tính tách (*separatedness*)). Tính chất trơn cho ta làm việc với Y dễ dàng hơn với X, các tính chất còn lại giúp ta hy vọng phục hồi lại được thông tin về X từ thông tin về Y.

May mắn thay, trong trường hợp trường K có đặc số 0, kết quả kinh điển của Hironaka[2] khẳng định rằng phép giải kì dị trên luôn tồn tại với mọi đa tạp đại số X. Nếu trường K có đặc số dương, câu hỏi về sự tồn tại của phép giải kì dị vẫn còn mở trong trường hợp tổng quát.



Giải kì dị của đường cong bậc 3 (nodal cubic curve) $(C) : y^2 - x^2(x+1) = 0$ bởi một phép nổ (blowing up) tại gốc toạ độ. Nguồn https://www.math.purdue.edu/ arapura/graph/nodal.html

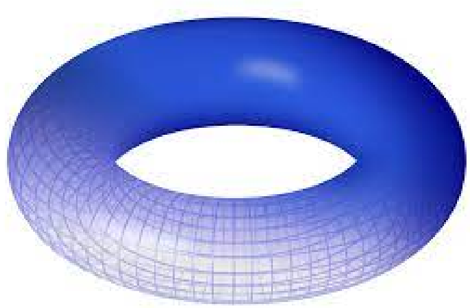
Một bài toán then chốt trong hình học là phân loại các đa tạp (trong lớp các đa tạp tôpô, vi phân, giải tích, hay đại số). Cụ thể hơn, với đa tạp đại số, ta xét một loại quan hệ tương đương giữa chúng, với mỗi lớp tương đương ta cố gắng tìm một phần tử đơn giản nhất, sau đó phân loại các phần tử tìm được vào các họ, mỗi họ chứa những phần tử có tính chất gần giống nhau. Tất nhiên quan hệ tương đương phải đủ tốt để có thể tìm ra các phần tử đơn giản ở mỗi lớp tương đương. Mặt khác ta cũng muốn rằng mỗi họ đại diện cho những tính chất quan trọng và điển hình nào đó. Một quan hệ tương

[2]Heisuke Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*. I, II. Ann. of Math. (2) **79** (1964), 109–203, và **79** (1964), 205–326.

đương được kì vọng có thể thực hiện việc phân loại tốt là tương đương song hữu tỉ.

Hình học song hữu tỉ

Một *ánh xạ hữu tỉ* $f : Y \to X$ giữa các đa tạp đại số là một ánh xạ đại số[(3)] xác định trên một tập con mở khác rỗng của Y. Như thế một ánh xạ song hữu tỷ f có thể không xác định trên một tập con đóng thực sự của Y. Nếu Y là đường thẳng afin, ta nói f là hàm hữu tỉ. Ánh xạ hữu tỉ f được gọi là *song hữu tỉ* nếu ảnh ngược của nó cũng là ánh xạ hữu tỉ; nếu điều này xảy ra ta nói X và Y là *tương đương song hữu tỉ*. Rõ ràng tương đương song hữu tỉ là một quan hệ tương đương trên tập các đa tạp đại số. Nếu đa tạp Y là đa tạp tựa xạ ảnh và có com-pắc hoá là đa tạp đại số xạ ảnh $\widetilde{Y}$ thì Y và $\widetilde{Y}$ tương đương song hữu tỉ. Mặt khác nếu X là đa tạp đại số xạ ảnh và $f : Y \to X$ là một giải kì dị của X thì ta có thể giả sử Y là đa tạp đại số xạ ảnh trơn (bởi chứng minh của Hironaka) và thấy ngay rằng X và Y là tương đương song hữu tỉ. Bởi những lí do đó ta sẽ tập trung vào việc phân loại các đa tạp đại số xạ ảnh trơn theo quan hệ tương đương song hữu tỉ.



Hình xuyến (torus) là đa tạp Calabi-Yau chiều một và giống một (có 1 lỗ). Nguồn: Wikipedia.

Trong trường hợp chiều 1, vấn đề phân loại các đường cong xạ ảnh trơn chính xác đến tương đương song hữu tỉ khá đơn giản: ta có thể phân loại qua một bất biến gọi là *giống* (*genus*) của đường cong. Giống của một đường cong trơn trong $\mathbb{C}$ chính là số lỗ của đường cong đó xem như một bề mặt hai chiều trên trường số thực. Cụ thể hơn, đường thẳng xạ ảnh trên $\mathbb{C}$ có thể đồng nhất với mặt cầu trong $\mathbb{R}^3$ – mặt này không có lỗ nào, do vậy đường thẳng xạ ảnh có giống 0. Đường cong elliptic với phương trình $y^2z = x^3 + xz^2 + z^3$ trên $\mathbb{C}$ có thể đồng nhất với hình xuyến một lỗ, nên có giống 1. Tổng quát hơn, mọi đường cong xạ ảnh trơn có giống $g \geq 1$, nếu như với tư cách một bề mặt hai chiều trên trường thực, nó nhận được từ phép gắn thêm g "quai" vào một hình cầu.

Trong trường hợp chiều lớn hơn 1 ta cần đến khái niệm ước chính tắc. Khái niệm ước bắt nguồn từ việc phân tích một số tự nhiên ra thừa số nguyên tố. Chẳng hạn áp dụng hàm logarit vào công thức $24 = 2^3.3$, ta được $\log(24) = 3\log(2) + \log(3)$. Ta cũng thấy sử dụng các tổ hợp tuyến tính với hệ số nguyên không âm, các số $\log(p)$ với p là số nguyên tố hoặc bằng 1, sinh ra mọi giá trị $\log(n), n \in \mathbb{N}^*$. Nói cách khác, nếu chỉ quan tâm đến cách phân tích một số ra thừa số nguyên tố thì các số nguyên tố và số mũ của chúng là những thông tin quan trọng nhất. Mỗi đa thức một biến hệ số phức $f(x)$ có thể viết thành tích $\alpha \prod_{i=1}^{k}(x - a_i)^{n_i}$ trong đó $\alpha, a_i \in \mathbb{C}$ và $n_i \in \mathbb{N}^*$. Tuy nhiên hàm logarit không mở rộng lên vành đa thức được, nên muốn đạt được một biểu diễn tuyến tính như trên ta cần các kí hiệu trừu tượng là (a) với mỗi a thuộc $\mathbb{C}$, (f) với mỗi đa thức f và ta có thể viết $(f) = \sum_{i=1}^{k} n_i(a_i)$. Các phần tử (a) được gọi là các ước nguyên tố. Để thống nhất ta cũng viết (p) thay cho $\log(p)$ ở trên và

[(3)] Một cách gần đúng, ánh xạ $f : Y \to X$ giữa các đa tạp đại số gọi là ánh xạ đại số nếu nó được cho một cách địa phương bởi các hàm đa thức.

cũng gọi chúng là các ước nguyên tố. Sử dụng ký hiệu ước trừu tượng và thêm vào một phần tử 0 tương ứng với các đa thức hằng số khác 0 (các phần tử khả nghịch trong K), đồng thời cho phép sử dụng các tổ hợp tuyến tính với hệ số nguyên âm, ta có thể định nghĩa khái niệm ước của các số nguyên khác 0, các số hữu tỉ khác 0 và các phân thức hữu tỉ khác 0.

Cách hiểu như trên chỉ là tương đối và có tính hình thức, nhưng nó giúp ta định nghĩa khái niệm ước cho một đa tạp đại số bất kì. Chẳng hạn khi X là đa tạp trơn n chiều thì tập các ước nguyên tố chính là tập các đa tạp con đóng $(n-1)$ chiều của X và một ước bất kì là tổ hợp tuyến tính với hệ số nguyên của các ước nguyên tố. Mỗi hàm hữu tỉ trên X sinh ra tập các không điểm và cực điểm trong X, đó đều là những tập con đóng $(n-1)$ chiều của X, do đó xác định duy nhất một ước của X. Hai ước của X được gọi là *tương đương tuyến tính* nếu hiệu của chúng được xác định bởi một hàm hữu tỉ. Trong nhiều trường hợp, ta có thể xét tổ hợp tuyến tính của các ước với hệ số hữu tỉ, hệ số thực.

Đối với các đa tạp trơn X chiều n, ta có thể xác định một ước gọi là *ước chính tắc* (*canonical divisor*) của X. Cụ thể hơn ta xét dạng vi phân ω bậc n không tầm thường của X. Tại mỗi lân cận đủ nhỏ của điểm $x \in X$ với hệ toạ độ địa phương $x_1, ..., x_n$ ta có thể viết $\omega = f(x_1, ..., x_n)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ với một hàm hữu tỉ f, khi đó trên lân cận này, ta xác định được một ước sinh bởi hàm hữu tỉ f. Khi x chạy qua mọi điểm của X ta thu được một ước của X kí hiệu bởi $\operatorname{div}(\omega)$, nó không phụ thuộc vào việc chọn tọa độ địa phương. Hai dạng vi phân bậc n bất kì sai khác nhau bởi phép nhân vô hướng với một hàm hữu tỉ, do đó lớp tương đương tuyến tính của $\operatorname{div}(\omega)$ không phụ thuộc vào ω. Ta gọi lớp tương đương đó là lớp ước chính tắc của X, hay đơn giản hơn là *ước chính tắc* của X, và kí hiệu nó là K_X. Khái niệm ước chính tắc có thể mở rộng cho các đa tạp có kì dị đủ tốt.

Từ ước chính tắc của X ta định nghĩa được các m-giống của X với mọi số nguyên dương m; chúng là các bất biến song hữu tỉ và đóng vai trò như giống của đường cong. Khi xem xét tiệm cận của các m-giống khi m tiến ra vô cùng ta thu được một đại lượng bất biến song hữu tỉ gọi là *chiều Kodaira* của X, kí hiệu $\kappa(X)$. Khi chiều của X là n thì chiều Kodaira của X nhận các giá trị trong tập hợp $\{-\infty, 0, 1, ..., n\}$. Như đã sử dụng giống để phân loại các đường cong, ta cố gắng sử dụng chiều Kodaira để phân loại các đa tạp đại số xạ ảnh chiều cao.

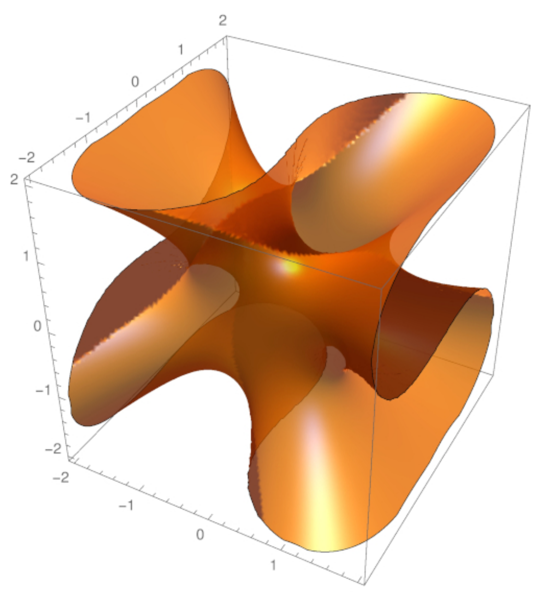
Đối với các mặt đại số xạ ảnh trơn, việc phân loại đã có nhiều bước tiến từ cuối thế kỷ 19 nhờ các nhà hình học người Ý, và được hoàn thiện vào giữa thế kỷ 20 bởi Zariski, Kodaira, Shafarevich. Họ đã xây dựng một quá trình gọi là co rút hoá (*contraction*) để biến mỗi mặt đại số xạ ảnh trơn trở thành song hữu tỉ với một đa tạp xạ ảnh trơn Y thuộc một trong 4 họ dựa vào giá trị của chiều Kodaira $\kappa(Y)$. Chẳng hạn nếu $\kappa(Y) = -\infty$ thì Y có thể là $\mathbb{P}^2$ hoặc một mặt kẻ dựng trên một đường cong có giống lớn hơn 0. Hoặc nếu $\kappa(Y) = 1$ thì Y là một phân thớ trên đường cong sao cho hầu hết mọi thớ là đường cong elliptic. Để mô ta quá trình co rút hoá, đầu tiên ta điểm lại về số giao của hai đường cong. Cho hai đường cong phân biệt bất kì C_1, C_2 trong $\mathbb{P}^2$ xác định bởi các đa thức thuần nhất bất khả quy bậc d_1, d_2, tương ứng. Khi đó theo định lí Bézout thì C_1 giao C_2 tại d_1d_2 điểm kể cả bội, và ta nói số giao của C_1 và C_2, kí hiệu $C_1.C_2$, là d_1d_2. Ta có thể mở rộng tuyến tính khái niệm bậc cho các ước trong $\mathbb{P}^2$, và định nghĩa số giao của hai ước bất kì của $\mathbb{P}^2$ không có chung ước nguyên tố. Chú ý rằng một hàm hữu tỉ trong $\mathbb{P}^2$ sinh ra một ước bậc 0, nên số giao của nó với bất kỳ ước nào không có chung ước nguyên tố với nó, đều bằng 0. Từ đó ta có thể định nghĩa *số tự giao* $E.E$ của ước E là số giao của E với một ước F không có chung ước nguyên tố với nó, sao cho E và F là tương đương tuyến tính.

Định nghĩa số tự giao này có thể mở rộng cho các mặt đại số xạ ảnh có kì dị đủ tốt, thậm chí cho cả các đa tạp chiều cao hơn, bằng cách xét số giao giữa các ước và các đường cong.

Bây giờ là định nghĩa của quá trình co rút hóa. Cho X là mặt đại số xạ ảnh trơn, và giả sử tồn tại một đường cong E kiểu -1 trong X nghĩa là $E \cong \mathbb{P}^1$ và $E.E = -1$. Khi đó tồn tại ánh xạ song hữu tỉ $f : X \to X_1$ sao cho X_1 là một mặt xạ ảnh trơn và ảnh của E là một điểm. Ánh xạ song hữu tỉ $f : X \to X_1$ gọi là *ánh xạ co rút*. Ta tiếp tục thực hiện quá trình này cho đến khi nào không còn đường cong E kiểu -1. Đa tạp thu được ở cuối quá trình này thuộc một trong 4 họ kể trên.

Chương trình mô hình tối tiểu và đóng góp của Caucher Birkar

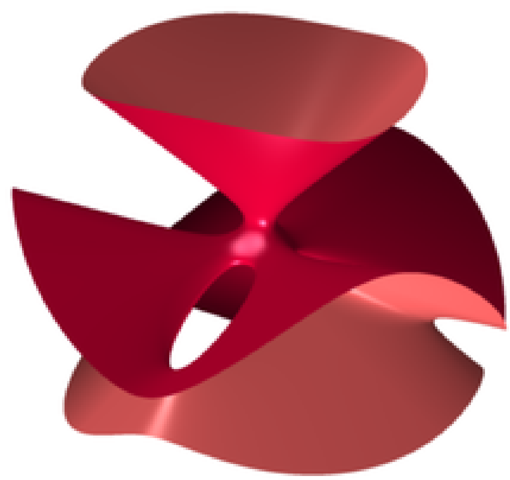
Tuy nhiên, trong trường hợp chiều cao hơn, câu chuyện trở nên phức tạp hơn nhiều. Ta chú ý rằng trong trường hợp mặt đại số xạ ảnh, các đa tạp thu được có tính chất đặc biệt là không tồn tại đường cong kiểu -1. Mặt khác nếu một đường cong E kiểu -1 tồn tại trong X thì ta có thể chỉ ra rằng $K_X.E = -1$. Do đó một mặt đại số xạ ảnh trơn Y sao cho $K_Y.C \geq 0$ với mọi đường cong C trong nó, là một đại diện trong quá trình phân loại. Tổng quát lên chiều cao, ta cũng mong muốn thu được các đa tạp Y có tính chất $K_Y.C \geq 0$ với mọi đường cong C trong Y. Ta gọi các đa tạp Y này là các *mô hình tối tiểu*. Trong trường hợp các mặt, không tồn tại mô hình tối tiểu Y sao cho $\kappa(Y) = -\infty$, do đó ta cũng kì vọng rằng từ chiều ba trở lên, nếu $\kappa(X) = -\infty$ thì ta không tìm được mô hình tối tiểu Y tương đương song hữu tỉ với X. Câu hỏi đặt ra là khi chuyển lên chiều cao hơn, các mặt kẻ dựng trên đường cong trong trường hợp chiều hai (mặt đại số) sẽ được thay thế bởi các đa tạp nào? Một chướng ngại vật khác đối với chiều cao là thay thế vai trò của các đường cong kiểu -1 ở trên. Mặt khác tồn tại những đa tạp không tương đương song hữu tỉ với bất kì mô hình cực tiểu trơn nào, do đó ta cần cho phép X và Y có kì dị (nhưng kì dị vẫn đủ tốt), hơn nữa ta cũng cần điều kiện đủ tốt của X và Y để có thể định nghĩa K_X, K_Y và các số giao $K_X.C, K_Y.C$.



Mặt bậc bốn Fermat cho bởi phương trình $x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$ trong $\mathbb{P}^3$ là một mặt $K3$ (đa tạp Calabi-Yau com-pắc đơn liên chiều 2). Nguồn: http://www.jlazovskis.com/docs-dgrad/2015-11-30-diffmani.pdf

Chương trình mô hình tối tiểu (*Minimal Model Program*) với chiều lớn hơn 2 được phát triển từ những năm $70, 80$ của thế kỉ trước bởi nhà toán học người Nhật Shigefumi Mori và các đồng nghiệp với thành tựu là việc phân loại các đa tạp đại số 3 chiều. Mori đã thay thế các đường cong kiểu -1 bởi các *tia cực biên* - tức là một lớp tương đương của các đường cong (với quan hệ tương đương thích hợp) có số giao âm với ước chính tắc. Để giải quyết câu hỏi về kì dị tốt, ta cần sử dụng ước chính tắc. Với một ước D của X có một đặc trưng của D liên quan đến việc có hay không số nguyên dương m sao cho có thể nhúng X vào trong một không gian xạ ảnh với (D, m) như là tham số. Đa tạp X được gọi là *đa tạp Fano* nếu $-K_X$ có tính chất nhúng, X được gọi là *phân cực chính tắc* nếu K_X có tính chất nhúng và X được gọi là đa tạp *Calabi-Yau* nếu $K_X = 0$. Đó là 3 kiểu đa tạp với kì dị tốt như đã nhắc đến ở trên. Trường hợp chiều Kodaira $\kappa(X) = -\infty$ tương ứng với các đa tạp là phân thớ với thớ tổng quát là đa tạp Fano (phân thớ Fano). Giống như trường hợp các mặt, với đa tạp chiều cao, ta tìm các tia cực biên. Giả sử tia cực biên tồn tại trong X, khi đó có thể chỉ ra một toàn ánh với thớ liên thông $f : X \to Z$ với Z có tính chất đủ tốt và $-K_X$ hạn chế xuống các thớ có tính chất nhúng. Có ba trường hợp xảy ra. Thứ nhất, nếu $\dim(Z) < \dim(X)$ thì ta thấy rằng X là phân thớ Fano. Thứ hai, nếu $\dim(Z) = \dim(X)$ và f biến một ước của X thành một điểm (co rút mạnh) thì ta thay X bởi Z và lặp lại quá trình.

Trong trường hợp thứ ba, $\dim(Z) = \dim(X)$ và f không biến ước nào của X thành một điểm (co rút yếu) thì ta cần đi đến việc xây dựng một *phép lật* (flip). Phép lật ở đây nghĩa là ta tìm một đa tạp X^+ đẳng cấu với X bên ngoài một tập con đóng có đối chiều ít nhất là 2, hơn nữa ta muốn ánh xạ cảm sinh $f^+ : X^+ \to Z$ có tính chất rằng K_{X^+} hạn chế xuống các thớ có tính chất nhúng. Từ lật ở đây có thể hiểu là thay đổi 'dấu' của ước chính tắc. Chương trình mô hình tối tiểu gồm 3 bước: bước thứ nhất liên quan đến trường hợp co rút mạnh (công trình của Mori, Kawamata -Shokurov); bước thứ hai chỉ ra phép lật luôn tồn tại; và bước thứ ba, bước kết thúc, là chỉ ra rằng không tồn tại một dãy vô hạn các phép lật. Sự tồn tại của phép lật đã được chứng minh cho chiều 3 (Mori) và 4 (Shokurov). Tuy nhiên bước cuối cùng của chương trình mô hình cực tiểu vẫn còn là bài toán mở với chiều ít nhất 4.



Mặt bậc ba Clebsch cho bởi phương trình $(x_0 + x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ là một đa tạp Fano chiều 2 chứa đúng 27 đường thẳng xạ ảnh, Nguồn: Wikipedia.

Cùng với Cascini, Hacon, Mckernan, Bikar [1] đã chứng minh sự tồn tại của phép lật trong những điều kiện tương đối tổng quát và đủ tốt đối với chương trình mô hình tối tiểu. Họ cũng xây dựng mô hình tối tiểu cho trường hợp chiều Kodaira cực đại (nghĩa là $\kappa(X) = \dim(X)$; khi đó X được gọi là đa tạp kiểu tổng quát), bằng cách chỉ ra tính hữu hạn sinh của một vành phân bậc cảm sinh bởi ước chính tắc K_X; khi đó đa tạp xạ ảnh ứng với vành này chính là mô hình tối tiểu của X. Birkar còn thiết lập sự tồn tại của phép lật trong những điều kiện yếu hơn. Hơn nữa anh chỉ ra mối liên hệ giữa giả thuyết về dãy tăng các ngưỡng chính tắc với việc chứng minh tính dừng của chương trình mô hình tối tiểu. Nhắc lại rằng *ngưỡng chính tắc* (*log canonical threshold*) của cặp (X, Y) với Y là đa tạp con đóng thực sự của đa tạp X[(4)], là một bất biến kì dị theo cặp, nó xuất hiện khắp nơi trong toán học (hình học, giải tích, các lí thuyết tích phân). Phỏng đoán về dãy tăng các ngưỡng chính tắc nói rằng tập các ngưỡng chính tắc của các đa tạp với chiều n cho trước không có một dãy con vô hạn tăng chặt. Gần đây giả thuyết này đã được chứng minh trong nhiều trường hợp rất tổng quát với sự đóng góp của nhiều nhà toán học.

Những kết quả trên thực sự rất ấn tượng, tuy nhiên các công trình chính dẫn đến giải thưởng Fields của Birkar lại liên quan đến việc nghiên cứu các tính chất cụ thể của các vật thể chính thu được tại bước cuối cùng của chương trình mô hình tối tiểu. Đó là nội dung của phỏng đoán Abundance nói rằng nếu Y là đa tạp thu được từ chương trình mô hình tối tiểu thì Y là một phân thớ Fano, hoặc một phân thớ Calabi-Yau, hoặc là (rất gần với) đa tạp phân cực chính tắc. Birkar nghiên cứu về các đa tạp Fano, cụ thể hơn là tính bị chặn của chúng. Như định nghĩa ở trên một đa tạp X là Fano tương đương với việc tồn tại số nguyên dương m sao cho ta có thể nhúng X vào không gian xạ ảnh với tham số là $(-K_X, m)$. Vậy ta có thể nói gì về số nguyên dương m nếu chiều và kiểu kì dị của X được cho trước? Mỗi một số nguyên dương m cảm sinh một không gian véctơ hay còn gọi là hệ tuyến tính ứng với m, điều kiện cần để ta có phép nhúng với tham số $(-K_X, m)$ là hệ tuyến tính ứng với m phải khác 0. Phỏng đoán của Shokurov nói rằng nếu cố định chiều d của đa tạp Fano X và kiểu kì dị của X thì tồn tại số m chỉ phụ thuộc vào d sao cho hệ tuyến tính ứng với m khác 0. Bản thân Shokurov đã chứng minh phỏng đoán của mình cho trường hợp chiều thấp và Birkar đã chứng minh phỏng đoán cho trường hợp chiều bất kì. Trở lại với câu hỏi về phép nhúng, phỏng đoán BAB (Borisov-Alexeev-Borisov conjecture) nói rằng nếu ta cố định chiều d của đa tạp Fano X và chặn kiểu kì dị của X bởi một số thực dương ϵ (theo một nghĩa thích hợp) thì tồn tại một không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n$ với n chỉ phụ thuộc vào d, ϵ sao cho X có thể nhúng vào $\mathbb{P}^n$, hơn nữa ảnh của X qua phép nhúng là đa tạp đại số xác định bởi các phương trình với bậc bị chặn theo d, ϵ. Một số trường hợp đặc biệt của phỏng đoán đã được chứng minh bởi nhiều nhà toán học và Birkar đã chứng minh phỏng đoán này trong trường hợp tổng quát. Sử dụng kết quả về phỏng đoán BAB, Birkar cũng chỉ ra hệ quả quan trọng liên quan đến cấu trúc của nhóm các tự đẳng cấu song hữu tỉ của X. Birkar cũng nghiên cứu các phân thớ Fano của đa tạp X trên đa tạp Z và chỉ ra sự tồn tại của các n-phần bù của K_X tại mỗi điểm $z \in Z$, nghĩa là sự tồn tại của các ước Δ trong X sao cho khi hạn chế xuống thớ tại z thì Δ có kì dị tốt, hơn nữa $n\Delta$ tương đương tuyến tính với $-nK_X$ trong thớ tại z. Ngoài các đa tạp Fano, Birkar còn nghiên cứu nhiều vấn đề khác liên quan đến chương trình mô hình tối tiểu như phân thớ Iitaka, phân thớ kiểu tổng quát, phân thớ Calabi-Yau hay các vấn đề trên đặc số dương.

[(4)]Một đa tạp con đóng được hiểu là một tập con đóng dưới tôpô Zariski.

Các công trình của Birkar hứa hẹn có ứng dụng đa dạng trong nhiều lĩnh vực liên quan vì các đối tượng mà anh nghiên cứu có tầm quan trọng bậc nhất. Người ta hy vọng có thể giải quyết được một giả thuyết nổi tiếng của Manin về điểm hữu tỉ trong trường hợp đa tạp Fano số học. Các đa tạp Calabi-Yau có nhiều ý nghĩa trong hình học, giải tích, vật lý lý thuyết, lý thuyết số. Mặt khác, người ta kỳ vọng đa tạp thuộc kiểu tổng quát có nhiều tính chất thú vị. Ví dụ giả thuyết Bombieri-Lang dự đoán các đa tạp kiểu tổng quát không có "quá nhiều" điểm hữu tỉ. Giả thuyết Green-Griffiths-Lang (phiên bản giải tích của giả thuyết Bombieri-Lang) tiên đoán rằng hợp của các đường cong chỉnh hình trong các đa tạp loại này là đa tạp con thực sự của chúng.

Để thay cho lời kết, tác giả muốn nhắc đến một chi tiết thú vị. Như Birkar đã giải thích, cái tên 'Caucher Birkar' nghĩa là 'nhà toán học di cư' (migrant mathematician). Thực chất từ 'Birkar' theo tiếng Kurd có nghĩa là nhà tư tưởng. Có lẽ điều này xuất phát từ việc Bikar rất ngưỡng mộ Alexander Grothendieck, một trong những nhà toán học có ảnh hưởng lớn nhất từ trước đến nay với nhiều tư tưởng cách mạng trong hình học đại số. Một nhà tư tưởng sẽ không ngừng tìm tòi, suy nghĩ về những ý tưởng mới mẻ và khám phá những chân trời mới. Do đó chúng ta cũng hi vọng rằng Birkar và các nhà toán học khác sẽ tiếp tục hoàn thiện chương trình mô hình tối tiểu và bài toán phân loại đa tạp đại số.

Lưu ý của tác giả: Với mong muốn diễn đạt các vấn đề một cách đơn giản và trực quan, nhiều định nghĩa về mặt toán học trong bài viết này chỉ mang tính tương đối, thiên về trực giác nên mọi thiếu sót về toán học là do tác giả. Tác giả đã tham khảo nhiều video phỏng vấn Caucher Bikar và các bài viết từ nhiều nguồn khác nhau trên internet, nên có thể gặp phải những thông tin tiểu sử về Birkar chưa thật sự chính xác.

TÀI LIỆU

[1] Birkar, Caucher; Cascini, Paolo; Hacon, Christopher D.; and McKernan, James, *Existence of minimal models for varieties of log general type*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2), 405–468 (2010).

[2] Birkar, Caucher, *On existence of log minimal models*. Compos. Math. **146**, no.4, 919-928 (2010).

[3] Birkar, Caucher, *On existence of log minimal models II*. J. Reine Angew. Math. **658**, 99-113 (2011).

[4] Birkar, Caucher and Chen, Jungkai Alfred, *Varieties fibred over abelian varieties with fibres of log general type*, Adv. Math. **270**, 206–222 (2015).

[5] Birkar, Caucher and Zhang, De-Qi, *Effectivity of Iitaka fibrations and pluricanonical systems of polarized pairs*, Publications Mathématiques. Institut de Hautes Études Scientifiques **123**, 283–331 (2016).

[6] Birkar, Caucher, *Singularities on the base of a Fano type fibration*, J. Reine Angew. Math., Vol. **715**, 125–142 (2016).

[7] Birkar, Caucher and Waldron, Joe, *Existence of Mori fibre spaces for 3-folds in characteristic p*, Adv. Math. **313**, 62–101 (2017).

[8] Birkar, Caucher, *Anti-pluricanonical systems on Fano varieties*, Ann. of Math. (2) **190** (2019), no. 2, 345–463.

[9] Birkar, Caucher, *Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties*, Ann. of Math. (2) **193** (2021), no. 2, 347–405.

[10] Birkar, Caucher, *Birational geometry of algebraic varieties*, arXiv:1801.00013.

[11] Birkar, Caucher, *Log Calabi-Yau fibrations*,arXiv:1811.10709.

[12] Kollár, János and Mori, Shigefumi, *Classification of three-dimensional flips*, J. Amer. Math. Soc. **5** (3), 533–703 (1992).

[13] Kollár, János, *Extremal rays on smooth threefolds*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **24** (3), 339–361 (1991).

[14] Mori, Shigefumi, *Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1), 117–253 (1988).

Chuyện giữa tiệc trà

Định lý sát thủ[1]

Colin Adams[2]

Tôi tên là Mangum. Dirk Mangum, CNĐT. Vâng, tôi chính là nghiên cứu viên chính của một đề tài chuyên ngành toán được Quỹ Khoa học Quốc gia (NSF) tài trợ. Bất cứ khi nào cần một nghiên cứu viên chính, bạn hãy nhấc máy gọi cho tôi. Số của tôi có trong danh bạ.

Chính một cú điện thoại đã đưa tôi đến vụ án này. Một buổi chiều muộn mùa xuân, ánh nắng vàng rực vùng California len lỏi qua khe hở tấm rèm trước cửa sổ văn phòng tôi ở UCLA[3]. Tôi đang mải nhét vào cặp một đống bài báo mình sẽ chẳng ngó ngàng tới tối hôm đó, thì chuông điện thoại reo. Có điều đây không phải một cuộc điện thoại thông thường. Thường khi, tôi sẽ được tiếp một tác giả nghi ngờ rằng đồng tác giả của mình đang mải cặp kè cộng tác với người khác. Và tôi được giao nhiệm vụ phải tìm ra bằng chứng. Hoặc được tiếp một trưởng khoa tin chắc rằng cán bộ trong khoa đang dùng điện thoại để tán gẫu, và muốn họ bị bắt quả tang. Lần này thì khác. Người gọi điện là Solomon Schmishmitt, một nhân viên ở SCLA. Các chữ SCLA là viết tắt của Sở Cảnh sát Los Angeles, chứ không phải tên viết tắt của một tổ chức toán học kỳ quặc nào đó. Có thể bạn đã nghĩ khác về cái tên đó, nhưng trong nghề điều tra phá án, bạn phải học cách kỳ vọng những điều phải kỳ vọng, ngay cả khi chúng có vẻ cực kỳ khó tin.

Tôi và Solomon là chỗ quen biết lâu năm. Chúng tôi cùng là nghiên cứu sinh ở Chicago. Tôi chuyên về toán học. Cậu ta chuyên về tửu học. Lần cuối cùng tôi thấy Solomon, gã đang nằm cạnh máng nước bên ngoài tòa nhà khoa toán, dưới trời mưa tầm tã, đã tọng vào mồm quá nhiều để có thể vào thi vấn đáp.

Sau khi đến UCLA làm nghiên cứu hậu tiến sĩ, tôi nghe nói Solomon đã lấy lại tinh thần. Gã cũng bỏ hẳn rượu chè. Nhận thấy toán học không phải món yêu thích của mình, cậu ta kiếm được một tấm bằng về hành pháp từ một học viện cảnh sát trực tuyến. Cậu ta in tấm bằng trên giấy màu, và xin được việc ở Los Angeles. Từ đó đến nay, Solomon đi một đường kẻ chỉ và có tiếng là một cảnh sát viên kiểu mẫu. Vì quá khứ làm tiến sĩ, sở cảnh sát giao cho Solomon những vụ điều tra liên quan đến toán.

Sau khi hồi tưởng về chuyện chơi bời rồ dại trong quá khứ, Solomon quay lại với công việc.

"Nghe này Dirk, tớ cần cậu giúp. Ba nhà đại số mới chết một cách bí ẩn."

"Tớ biết khoa toán ở một số đại học sẽ mừng rơn trước tin đó", tôi trả lời.

"Phần lớn các khoa toán sẽ không muốn mất bất kỳ ai trong những người này. Maclaunders, Honeykey, và Nakanimji."

[1]Nguyên bản “A killer theorem”, đăng trên The Mathematical Intelligencer Vol. 29, No 3 (2007), 26–29.

[2]Williams College, Williamstown, MA 01267, USA. Email: cadam@williams.edu; colin.c.adams@williams.edu.

[3]Đại học California, Los Angeles (ND).

Tam vị Nhất thể. Nếu xem các nhà đại số như những vòi phun cứu hỏa, thì Maclaunders, Honeykey, và Nakanimji có thể tưới ướt sũng tháp Eiffel, đền Taj Mahal, và điện Kremlin, và vẫn còn dư nguồn lực cho việc chữa cháy thực thụ.

"Nói một cách nghiêm túc, đó là một nhóm của các nhà đại số rất ấn tượng", tôi nói.

"Đương nhiên".

"Vậy đầu đuôi câu chuyện ra sao, họ cùng đến dự một hội nghị phải không?"

"Họ tự dưng chết thế thôi, không hề tụ họp với nhau. Họ vẫn ở nơi mình làm việc lúc qua đời. Và những nơi họ sống thì là ba điểm không thể xa nhau hơn nữa trên trái đất."

Dù Purdue và Tokyo thì đúng là rất xa nhau, tôi không nói với Schmishmitt là để tối đa hóa khoảng cách với Purdue và Tokyo thì Notre Dame là một lựa chọn tồi. Cậu ta hẳn đang nằm dưới máng nước khi chúng tôi học về hình học cầu.

"Phải chăng vụ này do một băng nhóm[4] gây ra?"

"Đừng đùa dai nữa, Mangum. Đây là chuyện tính mạng của các nhà nghiên cứu đại số."

"Thôi được rồi." Tôi tiếc là phải dừng lại, nhưng thực ra cũng chẳng có lựa chọn nào khác. Chỉ có hai câu đùa duyên dáng trong toán học mà tôi đã dùng cả rồi.

"Họ chết như thế nào?"

"Trong cả ba trường hợp, những người đó bỗng dưng suy kiệt đến chết. Cả một tháng trời không ăn ngủ gì. Không vì lý do rõ ràng nào. Họ lần lượt qua đời chỉ cách nhau một tuần."

"Có thể họ không thấy đói."

"Chúng tớ cũng nghĩ như thế, Mangum. Vấn đề là tại sao họ lại làm thế."

"Chuyện này liên quan gì đến tớ?"

"Tớ gọi điện vì biết cậu có viết vài bài về đại số. Tớ tin rằng phải có người trong ngành tham gia điều tra. Tớ muốn cậu đến Đại hội Đại số diễn ra tuần tới ở Đại học Texas. Tớ đã giúp cậu có tên trong thực đơn."

"Ý cậu là tớ sẽ trình bày bài giảng mời?"

"Phải rồi. Tiêu đề bài giảng là "*Về tính gọt được của môđun nửa vành con*". Tớ tin rằng tiêu đề này đủ mù mờ để cậu có thể chế ra được một bài giảng trong mấy ngày cuối tuần."

"Rất cảm ơn cậu", tôi đáp.

Kế hoạch dành mấy ngày cuối tuần cho một giả thuyết nổi tiếng của tôi nhanh chóng tan thành mây khói.

"Mà này, tính gọt được là gì vậy?", tôi thắc mắc.

"Làm sao tớ biết được, cậu cứ phịa ra một cái gì đấy", Schmishmitt đáp.

Một tuần sau đó, tôi có mặt giữa một đám đông 100 nhà toán học trước một bàn đăng ký tham dự ở hành lang của RLM, tòa nhà dành cho nghiên cứu toán học cao nhất ở Texas.

"Xem ai kìa, chẳng phải đó là Dirk Mangum, CNĐT, hay sao? Cơn gió nào mang anh đến Đại hội Đại số thế? Bánh ngọt chăng?"

Tôi nhìn thẳng vào con mắt lồi ra của Hal Balony, một chuyên gia về môđun từ Đại học Bang Springfield.

"Chào Balony. Lâu lắm chưa gặp nhỉ, kể từ khi anh công bố chứng minh giả thuyết co rút, để rồi một tuần sau đó lại rút lại chứng minh."

---

[4]Nguyên bản: *ring*, vừa có nghĩa là một *băng nhóm tội phạm*, vừa có nghĩa *vành* trong đại số. Từ này không dễ dịch ra tiếng Việt mà không ảnh hưởng đến cách chơi chữ trong nguyên bản (ND).

"Mangum, tôi không còn lạ gì con người của cậu, đay đi nghiến lại sai lầm duy nhất trong sự nghiệp, mà tôi mắc phải từ 15 năm trước, trong khi lờ đi tất cả những cống hiến cách mạng khác của tôi từ đó đến nay."

"Nếu anh định nói đến nhóm con Balony, vành nửa đơn Balony, và đại số con nửa thông thái Balony, thì đúng là tôi lờ đi tất cả những thứ đó. Tôi không thấy mất mát gì nếu làm như thế. Toàn là một... đống tạp nham."

Balony đỏ bừng mặt.

"Nhìn lại chính mình đi Mangum. Tính gọt được? Đấy là cái quái gì vậy?"

Đến phiên tôi thấy mặt nóng bừng. Đến giờ tôi vẫn chưa chuẩn bị xong bài giảng, trong khi 3 giờ chiều nay là lượt của mình.

"Nếu muốn biết tính gọt được là gì thì anh phải đến nghe bài báo cáo của tôi, Balony ạ."

"Được thôi, Mangum. Tôi sẽ đến nghe bài giảng của anh, nếu anh đến nghe bài giảng lúc 5 giờ của tôi. Tôi sẽ trình bày những vấn đề toán học tuyệt vời, những thứ anh chưa bao giờ được thấy trong đời. Những vấn đề không ai dứt ra nổi." Balony nở một nụ cười nham hiểm, đủ khiến người ta nổi da gà.

"Để xem, Balony", tôi nói. "Hy vọng lúc đó tôi không phải giặt quần đùi. Tôi chỉ mang có hai cái."

Tôi sục tay vào giỏ bánh nướng xốp và cầm một chiếc bánh nướng màu vàng đậm lên. Cắn một miếng to, tôi thốt lên "Ngo-on tuyệt", vẩy ra mấy mẩu vụn. Tôi nhanh chóng quay đầu và cất bước. Đến một góc khuất, tôi nhổ cái hỗn hợp khó tả vừa nuốt phải vào một thùng rác.

Tôi dành toàn bộ tiếng tiếp theo trong thư viện để tạo ra định nghĩa *tính gọt được*. Sau đó ghé vào nghe mấy bài báo cáo tầm phào, giá được ngồi chấm bài thi cuối kỳ của một khóa phụ đạo với hàng trăm sinh viên còn thú hơn. Quả thực không một ai trong hội nghị này có những cú đánh toán học quả quyết của những nhà đại số vừa quá cố, và tương lai của đại số xem ra không mấy xán lạn.

Vài phút trước 3 giờ chiều, tôi bước vào phòng hội nghị. Không hiểu sao có khá đông người. Khi bước về bục giảng, tôi nghe thấy những tiếng xì xào. Một số khán giả trỏ về phía tôi. Chủ tọa của phiên làm việc này đứng dậy.

"Vâng, tôi biết các bạn đều tò mò muốn biết tính gọt được là gì. Tôi xin nhường lời cho giáo sư Mangum, người sẽ giải thích cho tất cả chúng ta."

Tôi bước lên bục giảng. Ngồi ở hàng đầu phòng hội nghị là Hal Balony, với một nụ cười đầy khinh thị. Sự im lặng chờ đợi ngự trị căn phòng.

Tôi đứng trên bục giảng, chống thẳng hai tay lên bục, cố tình để thời gian chờ đợi căng thẳng kéo dài, dài ra mãi. Đến khi sự chờ đợi đã đến cực điểm, tôi nhìn xuống cử tọa và nói. "Đó là năm 1946, tại một văn phòng bừa bộn trong khuôn viên đại học Princeton. Một nhà toán học không rõ tên ngồi lỳ trong văn phòng, hết ngày này qua ngày khác, đêm này qua đêm khác, bỏ mặc người vợ trẻ và đứa con thơ ở nhà (tôi dừng lại). Một giả thuyết, vâng, một giả thuyết rất lớn, đang ở ngay sát tầm tay anh. Gần đến mức anh có thể nghe thấy hơi thở của nó trên da thịt. Anh ấy đang tiến sát đến một trong những phát minh toán học vĩ đại nhất. Nhưng vẫn còn một khái niệm ở ngoài tầm với. Một khái niệm anh vẫn chưa hiểu được."

"Nhà toán học trẻ này sẽ trở thành một trong những người nổi tiếng nhất, nếu không phải chính là người nổi tiếng nhất, trong thế hệ của anh, không ai là không biết đến tên tuổi ấy... Nhưng anh ấy có khám phá ra khái niệm đó không? Anh ta có giải quyết được giả thuyết đó không?"

"Không, anh ta không giải quyết được. (Ngừng một lát). Định nghĩa. Cho G là một nhóm. Gọi x là một phần tử của G không phải phần tử đơn vị. Gọi N là một nhóm con chuẩn tắc của G chứa x, nếu nhóm con đó tồn tại. Lấy thương G/N, phần tử x biến thành tầm thường. Đúng vậy, x bị triệt tiêu. Bị hủy diệt trong quá trình lấy thương."

Tôi nhìn xuống cử tọa, hy vọng bắt gặt một gương mặt bối rối, chỉ một thôi. Nhưng tất cả đều nhìn chằm chằm vào tôi chờ đợi.

"Chúng ta nghĩ về các lớp kề của G/N như các lớp vỏ hành làm nên toàn bộ củ hành, hay là nhóm thương đó. Đây chính là khái niệm mà nhà toán học nổi tiếng không cần phải nêu tên ra đây, đã không nắm được. Thực ra nhóm chính là một loại củ hành mà thôi, hành tây, hành ta, hành đỏ, hành vàng... Xác định xem loại hành đó là gì giúp ta biết được tính chất nhóm tương ứng. Còn phần tử x thì sao? Ta nói rằng x là phần tử gọt được."

Tôi tiếp tục giảng thêm 40 phút, nhưng phần lớn khán giả trở nên hờ hững khi tôi giải thích kỹ hơn về lý thuyết xem nhóm như các loại gia vị ẩm thực.

Sau bài giảng, tôi rời đi để gọi cho Schmishmitt, xem cậu ta có tin tức gì mới không. Có một tin mới.

"Nghe này Mangum, cậu biết Hal Balony không?"

"Tớ có hân hạnh biết hắn đấy", tôi điềm nhiên đáp.

"Vậy thì nghe nhé. Balony đã ở Purdue nhân kỳ nghỉ phép, khi Honeykey qua đời. Người ta đã bắt gặp Balony đến văn phòng của Honeykey đúng lúc Honeykey bắt đầu tuyệt thực. Chúng tớ nghĩ rằng có thể tay Balony này đã đầu độc hay khiến Honeykey nhiễm một loại virút nào đó. Maclaunders và Nakanimji đã nhận được kiện hàng gửi đi từ Purdue không lâu sau đó, có lẽ là kiện hàng đến từ Balony. Hãy để mắt đến hắn."

Sau bài giảng của mình, tôi đã thấy Balony lẻn vào một trong các phòng seminar, và khép cửa lại. Tôi lẳng lặng đi dọc hành lang và nhẹ nhàng mở cửa căn phòng seminar đó.

Balony đang trình bày thử trong căn phòng trống. Anh ta dừng lại khi thấy tôi bước vào.

"À, Mangum," anh ta nói, "phần cải lương trong bài giảng của anh khá hấp dẫn đấy, nhưng phần chuyên môn thì kém xa. Lẽ ra anh nên chứng minh một kết quả gì đó."

"Đấy chỉ là một báo cáo sơ lược, Balony ạ. Nhưng tôi đến đây không phải để thảo luận về bài giảng của mình. Tôi gặp anh để nói chuyện về Honeykey."

"Có chuyện gì để nói? Anh ta không chịu ăn uống, và rồi thiệt mạng. Tuyệt thực thì sẽ bị như thế. Chấm hết."

Tôi túm lấy cổ áo Balony.

"Chuyện chưa kết thúc đâu Balony. Anh đã đầu độc Honeykey, đúng không?"

Balony cười hô hố khi gạt tay tôi ra.

"Hài hước thật," anh ta nói. "Quý ngài Dirk Mangum. Ngôi sao sáng chói ở UCLA với bộn tiền tài trợ từ đề tài NSF. Anh gọi mình là một CNĐT, thế mà anh chẳng hiểu gì cả."

"Cứ cho là thế, Balony. Vậy hãy nói cho tôi hay. Tôi biết anh đã ở Purdue khi Honeykey bắt đầu bỏ ăn. Tôi cũng biết anh đã gửi một kiện hàng đến Nakanimji và

Maclaunders, và họ cũng bỏ ăn sau đó. Tôi đoán đó là một loại virút."

"Một virút? Không tồi đâu Mangum. Đó là một virút, nhưng không phải loại virút anh đang nghĩ đâu."

"Miễn là anh thú tội, với tôi thế là đủ," tôi nói. "Anh có thể cho cảnh sát biết chi tiết. Đi thôi, Balony."

"Đợi một phút, Mangum." Balony bật máy chiếu. "Anh biết bổ đề cuối cùng của Gauss chứ?"

Ai mà không biết? Đó là bài toán mở lớn nhất của nhân loại.

"Đây này, nhìn vào đây. Trước mắt chúng ta là tất cả những miếng ghép cần thiết cho bài toán hóc hiểm đó."

Tôi nhìn vào những phương trình trên màn chiếu. Thật đáng kinh ngạc, dường như Balony nói đúng. Trên màn chiếu có lời giải cho vấn đề Kleinhold, từng đánh bại mọi chứng minh tiềm năng từ trước đến giờ. Và có cả cách vượt qua tính không đếm được của tiên đề tối cần thiết, một tiên đề chưa ai từng tiếp cận được. Thật đáng kinh ngạc. Đây có thể thực sự là cách giải quyết toàn bộ giả thuyết.

Tôi nhìn trân trân, lòng đầy nghi hoặc. Tiếng cười của Balony dường như từ một nơi rất xa xôi nào vọng đến. Tôi ngồi xuống bàn để nghĩ kỹ hơn về những suy luận. Dường như lời giải đang ở rất gần. Tôi nhanh chóng tính nhẩm trong đầu. Nếu toán tử Toeplitz là tựa đủ, thì liên hợp giao hoán tử với một cơ sở giả chính tắc trực chuẩn tự liên hợp sẽ đưa đến kết luận. Có đúng thế không? Đây chính là lời giải cho bài toán vĩ đại nhất trong lịch sử toán học ư? Mọi thứ xung quanh tôi nhòa đi. Một thôi thúc mãnh liệt đòi tôi phải đi đến tận cùng lời giải...

◊ ◊ ◊

"Và bây giờ, tôi hân hạnh được giới thiệu giáo sư Hal Balony, người sẽ trình bày những nghiên cứu mới nhất của ông."

Balony đứng lên bục giảng.

"Đó là năm 2005", anh ta nói. "Tại một văn phòng nhỏ ở Đại học Bang Springfield. Một nhà nghiên cứu nghiêm túc miệt mài làm việc đến tận nửa đêm. Anh thấy mình đã ở rất sát một định lý lớn độc nhất vô nhị trong toàn bộ lịch sử toán học (ngừng lại). Đó là định lý gì? Anh ta đã suýt chứng minh được nó như thế nào? Mời quý vị nhìn lên đây."

Tôi kịp lao vào phòng, khi Balony vừa bật máy chiếu lên.

"Không được nhìn," tôi thét lên. "Không được nhìn vào màn chiếu."

Tất nhiên, câu nói đó khiến tất cả mọi con mắt đổ dồn vào bài trình chiếu của Balony. Hiệu ứng xảy ra gần như tức thì. Những cái mồm há hốc trong khi những bộ não dồn sức nghĩ về định lý quyến rũ đang ở sát tầm tay.

"Quá muộn rồi, Mangum," Balony nói, nhe răng cười nham hiểm. "Bọn họ nhìn cả rồi."

Tôi chạy vụt theo lối đi giữa bàn ghế, lao lên phía bục giảng, giật dây màn hình trình chiếu khỏi ổ điện. Màn hình trình chiếu tối sầm lại ngay lập tức.

Nhưng khi nhìn vào cử tọa, tôi biết đã quá muộn rồi. Tất cả mọi người đều chìm trong suy tưởng, ngày càng ngập sâu hơn vào một hố đen thăm thẳm. Balony nhạo báng tôi.

"Anh thua rồi, Mangum. Chẳng mấy chốc bọn họ sẽ suy kiệt mà chết, bị cầm tù trong cái lời giải ở ngay tầm với đến mức không còn thiết gì ăn uống."

"Nhưng tôi phải thừa nhận, tôi hơi ngạc nhiên khi gặp anh ở đây. Phải chăng anh không hề cố gắng tìm ra lời giải? Hay anh có khả năng miễn dịch với lời giải? Phải chăng tư duy của anh quá chật hẹp cho việc nắm bắt toàn bộ luồng suy luận? Hay anh suy nghĩ chậm đến mức không biết lời giải thực sự đã ở rất rất gần? Bài trình chiếu của tôi chỉ tiêu diệt những nhà toán học xuất chúng, và để lại những người như chúng ta. Anh thật may mắn. Thú vị đúng không? Anh chẳng hơn gì tôi cả."

"Không đâu, Balony, tôi không hề giống anh chút nào. Tôi cũng giống như họ. Tôi không thể ngừng suy nghĩ về chứng minh bổ đề cuối cùng của Gauss."

"Thế tại sao anh không suy sụp như những người khác? Tại sao anh vẫn đứng ở đây?"

"Lý do rất đơn giản, Balony ạ, tôi đã tìm ra chứng minh hoàn chỉnh."

"Không thể có chuyện đó", Balony nói, một nỗi hoài nghi khiếp đảm lộ rõ trên mặt. "Nếu Honeykey, Nakanimji, và Maclaunders không thể tìm ra chứng minh, làm sao anh lại tìm được?"

"Lý do rất khôi hài, Balony ạ. Đôi khi, rất hiếm khi thôi, vận may cũng có vai trò nhất định trong toán học. Trong trường hợp này, có một miếng ghép đơn giản của trò chơi ghép hình mà những nhà toán học khác không có. Một ý tưởng bé nhỏ."

"Đó là ý tưởng gì?", Balony hỏi.

"Đó là *tính gọt được*", tôi nói và cắm dây màn trình chiếu trở lại. Tôi để một tờ bóng kính lên tấm kính, và bắt đầu viết. Ngày càng có nhiều người trong cử tọa chuyển sự tập trung sang điều tôi đang viết. Tôi viết những phương trình cần thiết và vạch ra mấu chốt của vấn đề. Có một loạt tiếng thở ra nghe thấy được. Với một số nhà toán học trong cử tọa, điều họ vừa trải qua là trạng thái gần với cực khoái nhất.

Balony đổ sụp người xuống một chiếc ghế, kinh ngạc với những điều vừa diễn ra.

"Nào Balony, bây giờ hãy kể nốt phần còn lại của câu chuyện. Anh tìm đâu ra ý tưởng để giải quyết bổ đề cuối cùng của Gauss đó? Tôi không hề tin rằng ý tưởng đó là của anh."

Balony lấy hai tay ôm đầu.

"Có lẽ Honeykey là người đầu tiên tìm ra ý tưởng đó", anh ta buồn bã nói. "Một lần tôi đến văn phòng của Honeykey. Anh ta chưa bao giờ thích thảo luận toán với tôi. Anh ta cho đó là một sự lãng phí thời gian. Cửa phòng anh ta mở, và anh ta ngồi đó như kẻ bị thôi miên. Anh ta có nghe thấy tôi nói, nhưng rõ ràng là đầu óc thì đang ở tận đẩu đâu.

Tôi nhìn vào bàn làm việc của anh ta, và thấy điều anh ta đang suy nghĩ: một phác họa chứng minh bổ đề cuối cùng của Gauss. Tôi giật phăng tờ giấy vì biết Honeykey sẽ không để ý thấy. Mang tờ giấy này về phòng và đọc, nhưng tôi không bị một chút ảnh hưởng nào. Tôi có thể hiểu đại khái, nhưng không thấy cơ hội chứng minh nào rõ rệt.

"Sau vài ngày, tôi hiểu ra tình trạng Honeykey đang rơi vào. Anh ta đang dần suy sụp, mất liên hệ với thế giới thực. Không ăn, không ngủ được. Rõ ràng là tình trạng đó sớm muộn sẽ kết thúc. Đó là lúc tôi gửi bản sao của phác họa chứng minh cho Nakanimji và Maclaunders."

"Tại sao anh lại làm thế?"

"Mangum, anh có hiểu cuộc đời một nhà toán học hạng hai là thế nào không? Anh có biết thế nào là cuộc sống không tài trợ nghiên cứu? Cảm giác khi chứng minh những kết quả chẳng ai thèm quan tâm? Không, anh không biết.

"Tôi đã luôn muốn trở thành nhà đại số hàng đầu thế giới. Tôi làm việc hết mình vì mục tiêu đó, dành toàn bộ thời gian tỉnh thức cho toán học. Nhưng rồi tôi cũng nhận ra nỗ lực như thế vẫn không đủ. Chỉ còn lại một cách duy nhất. Tiêu diệt tất cả những nhà đại số giỏi hơn. Và nếu anh không can thiệp chắc hẳn tôi đã đạt được mục đích: Trở thành nhà đại số còn sống lớn nhất trên thế giới!"

"Đúng là một ý...ý tưởng nhảm nhí, Balony. Sự ngờ nghệch của anh làm tôi kinh ngạc. Chẳng lẽ anh tin rằng người ta sẽ bảo: Vâng, vì tất cả những nhà đại số khác đã chết, nên đây là nhà đại số lớn nhất thế giới còn sống? Anh coi đấy là một vinh dự sao?"

"Với tôi thì thế là đủ, Mangum. Thế là đủ rồi."

◊ ◊ ◊

Balony bị khép vào tội sát nhân, đúng hơn là mưu sát, sử dụng máy trình chiếu như một vũ khí nguy hiểm. Anh ta bị lĩnh án tù 20 năm trong trại cải tạo, có thể rút xuống 15 năm nếu cải tạo tốt.

Còn bổ đề cuối cùng của Gauss? Tiếc thay, có một lỗ hổng ở một trong những mệnh đề cần thiết cho chứng minh, một kết quả hai mươi năm tuổi mà tác giả, không ai xa lạ, là... Hal Balony. Tôi tin rằng lý do Balony không hề bị tác động bởi phác họa chứng minh bổ đề cuối cùng của Gauss, là vì một cách có ý thức hoặc vô thức, anh ta biết rằng mệnh đề mình đã chứng minh là không đúng và không sử dụng được.

Và bổ đề cuối cùng của Gauss vẫn còn đó. Như một hố đen có thể hút bạn vào. Nó vẫn mở, nó nằm đó chờ đợi. Nhưng hãy thận trọng, bổ đề đó có thể gây nghiện...

Nguyễn Đăng Hợp dịch

Tin tức hội viên và hoạt động toán học

* Ngày 28/3/2021, **Hội Toán học Việt Nam** đã tổ chức buổi gặp mặt đầu xuân tại trụ sở mới của Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán. Dịch Covid-19 đã khiến kế hoạch tổ chức buổi gặp mặt đầu xuân năm 2020 phải huỷ và năm 2021 bị chậm so với các năm trước đây. Trong buổi gặp mặt, Chủ tịch Hội Toán học Ngô Việt Trung đã thay mặt Ban Chấp hành Hội tổng kết một số hoạt động trong hai năm qua, trong đó đặc biệt là việc hoàn thiện xây dựng toà nhà trụ sở hội. Phó Chủ tịch kiêm Tổng thư ký Hội Vũ Hoàng Linh đã thông báo kế hoạch tổ chức kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên-Học sinh tại Huế và kỳ thi Thách thức Toán học Việt Nam.

Nhân dịp này, Quỹ Lê Văn Thiêm đã trao giải thưởng Lê Văn Thiêm cho 2 nhà giáo có thành tích đặc biệt về giảng dạy, thúc đẩy phong trào học toán và 4 học sinh có thành tích học tập xuất sắc.

Hai thầy giáo được nhận giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2020 là thầy Mai Xuân Thắng, trường THPT Chuyên Hà Nội – Amsterdam và thầy Nguyễn Trọng Tuấn, trường Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG Tp. HCM. Bốn bạn học sinh có thành tích học tập xuất sắc và được trao giải thưởng là: Ngô Quý Đăng (THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội), Phan Khánh Linh (THPT chuyên Lào Cai), Trần Nhật Minh (Khoa Toán–Cơ–Tin học, ĐHKHTN, ĐHQGHN), và Nguyễn Mạc Nam Trung (Khoa Toán ĐHKHTN, ĐHQG Tp. HCM).

Lễ trao giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2020. Ảnh: Hội toán học VN.

* **Hội nghị Toán học miền Trung – Tây Nguyên lần thứ 4** sẽ được tổ chức từ ngày 6-8/8/2021 tại Trường đại học Sư phạm – Đại học Huế. Hội nghị sẽ chia các báo cáo thành 5 tiểu ban. Danh sách báo cáo mời năm nay gồm: Đặng Tuấn Hiệp (ĐH Đà Lạt), Trần Quang Hoá (Trường ĐH Sư phạm – ĐH Huế), Đinh Công Hướng (ĐH Quy Nhơn), Trần Kiêm Minh (Trường ĐH Sư phạm – ĐH Huế), và Trương Công Quỳnh (Trường ĐH Sư phạm – ĐH Đà Nẵng).

* **Hội nghị Đại số – Lý thuyết số – Hình học – Tôpô** (ĐAHITÔ) năm 2021 sẽ được tổ chức từ ngày 21-23/10/2021 tại Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên. Như tên gọi, đây là hội nghị liên ngành Đại số, Lý thuyết số, Hình học, Tô pô tổ chức 2 hoặc 3 năm một lần. Hội nghị gần đây nhất tổ chức tại Bà Rịa-Vũng Tàu vào tháng 12/2019.

* Một số hoạt động **bị huỷ hoặc tạm dừng do dịch Covid-19**:

- Hội nghị Toán học Châu Á (AMC) đã bị huỷ do dịch Covid-19 bùng phát trở lại ở khu vực Châu Á và trên thế giới. Ban đầu hội nghị được dự kiến tổ chức vào tháng 7/2020, sau đó phải lùi sang năm 2021, và cuối cùng vẫn không tổ chức được vì tình hình dịch bệnh nghiêm trọng.
- Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên-Học sinh lần thứ 28 được dự kiến tổ chức ở Trường ĐH Sư phạm – ĐH Huế từ 10-16/5/2021 nhưng đã phải tạm hoãn do dịch Covid-19 bùng phát vào đầu tháng 5/2021. Trước đó kỳ thi đã phải lùi một lần, kế hoạch ban đầu là từ 5-11/4/2021.

* PGS. **Nguyễn Việt Dũng** (Viện Toán học, Viện Hàn lâm KHCN VN) được bầu làm Thư ký Ban điều hành của CIMPA (International Centre for Pure and Applied Mathematics) nhiệm kỳ 2020-2024. Chủ tịch của CIMPA nhiệm kỳ 2020-2024 là GS. Barry Green (ĐH Stellenbosch, Nam Phi), phó chủ tịch là GS. Annie Raoult (ĐH Paris Descartes, Pháp). Hướng nghiên cứu của PGS. Nguyễn Việt Dũng là tôpô đại số, tôpô và tổ hợp của sắp xếp siêu phẳng, và tôpô của không gian cấu hình.

Tin thế giới

* **zbMATH Open** (tiền thân là Zentralblatt MATH) chính thức đi vào hoạt động từ đầu năm nay. zbMATH Open là một một trong những đơn vị thực hiện việc tóm tắt và bình duyệt ấn phẩm toán học (cả thuần túy và ứng dụng), lớn nhất thế giới. Cơ quan biên tập zbMATH Open là Hội Toán học Châu Âu (EMS), Viện Hàn lâm Khoa học và Nhân văn Heidelberg, và Viện Leibniz về Hạ tầng Thông tin (FIZ Karlsruhe). Công việc biên tập do văn phòng FIZ Karlsruhe tại Berlin thực hiện. Văn phòng này, trực thuộc Liên hiệp Leibniz, là một tổ chức phi lợi nhuận, một tổ chức phục vụ lợi ích công cộng được thừa nhận. Từ tháng Một năm 2021, kho dữ liệu của zbMATH Open có thể truy cập miễn phí, không phải trả tiền truy cập như mạng MathSciNet nổi tiếng của Hội Toán học Hoa Kỳ. Địa chỉ trang chủ của zbMATH Open là zbmath.org.

Hiện zbMATH Open chứa khoảng 4,2 triệu đơn vị dữ liệu về ấn phẩm khoa học, với các bài bình duyệt hoặc tóm tắt liên quan đến khoảng hơn 3000 tạp chí và loạt sách, và hơn 190 000 cuốn sách. Bắt đầu hoạt động từ thế kỷ 18, zbMATH Open có vùng phủ sóng bao trùm và toàn diện suốt từ năm 1868 đến nay, nhờ việc tích hợp toàn bộ dữ liệu của bộ "Niên giám tiến bộ toán học" (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik). Kho dữ liệu zbMATH Open bao gồm hơn một triệu hồ sơ các tác giả đã được xác thực đến từ rất nhiều nền tảng khác nhau, danh mục các phần mềm toán học swMATH, và khoảng 35 triệu ấn phẩm. Ngoài ra, dữ liệu của zbMATH Open có liên kết đến cả những nền tảng xuất bản sử dụng văn bản truyền thống, cũng như những diễn đàn hỏi đáp như MathOverflow.

Để so sánh, MathSciNet có hơn 3 triệu đơn vị dữ liệu ấn phẩm khoa học, và hơn 2 triệu liên kết trực tiếp đến các ấn phẩm gốc xuất phát từ khoảng 3000 tạp chí và 250 nhà xuất bản. Mỗi năm, MathSciNet được bổ sung khoảng 110 000 đơn vị dữ liệu mới, phần lớn có thông tin phân loại chủ đề toán học (Math Subject Classification) đi kèm. Số bài bình duyệt được bổ sung hàng năm là khoảng 80 000, do các nhà toán học khắp năm châu đóng góp. Danh sách tài liệu tham khảo của từng bài báo (cuốn sách) được thu thập từ hơn 500 tạp chí và được điều chỉnh cho khớp với thông tin trên MathSciNet. (Thông tin từ zbmath.org/about/ và http://www.ams.org/publications/math-reviews/math-reviews)

THÔNG TIN TOÁN HỌC, Tập 25 Số 1 (2021)