

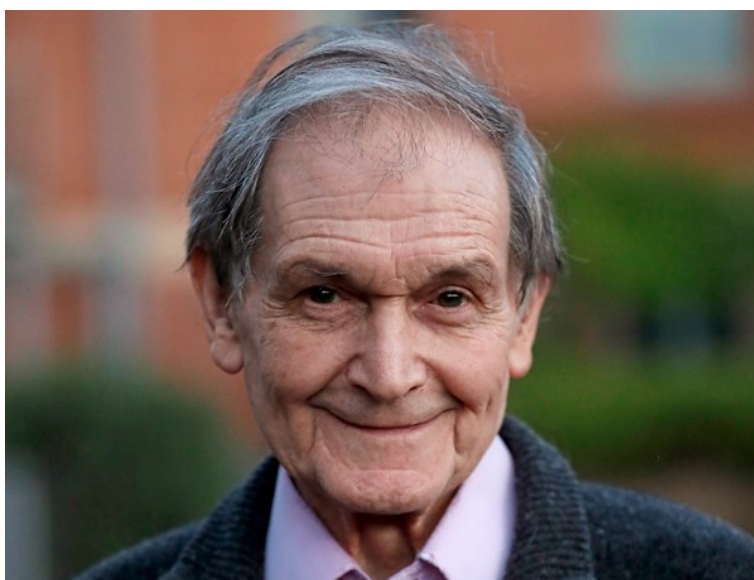
Hội Toán Học Việt Nam



THÔNG TIN TOÁN HỌC

Tháng 12 Năm 2020

Tập 24 Số 4



THÔNG TIN TOÁN HỌC

Newsletter of the Vietnamese Mathematical Society

TỔNG BIÊN TẬP

ĐOÀN TRUNG CƯỜNG, Viện Toán học, Viện
HLKHCN Việt Nam (dtrucuong@math.ac.vn)

PHÓ TỔNG BIÊN TẬP

NGUYỄN THỊ LÊ HUƠNG, Hội Toán học Việt Nam
(ntlhuong@viasm.edu.vn)

THƯ KÝ

NGUYỄN ĐĂNG HỢP, Viện Toán học, Viện HLKHCN
Việt Nam (ngdhop@gmail.com)

BAN BIÊN TẬP

NGÔ QUỐC ANH, ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG
Hà Nội (bookworm_vn@yahoo.com)

PHAN THỊ HÀ DƯƠNG, Viện Toán học, Viện
HLKHCN Việt Nam (phanhaduong@math.ac.vn)

NGUYỄN ĐĂNG HỒ HẢI, ĐH Khoa học, ĐH Huế
(ndhohai@yahoo.com)

NGÔ HOÀNG LONG, ĐH Sư phạm Hà Nội
(ngolong@hnue.edu.vn)

ĐỖ ĐỨC THUẬN, ĐH Bách khoa Hà Nội
(duythuank7@gmail.com)

NGUYỄN CHU GIA VƯỢNG, Viện Toán học, Viện
HLKHCN Việt Nam (necvuong@math.ac.vn)

Bìa 1. Roger Penrose, giải Nobel Vật lý 2020. Ảnh:
AP/Frank Augstein.

THẺ LỆ GỬI BÀI

Bài viết bằng tiếng Việt. Tất cả các bài, thông tin về sinh hoạt toán học ở các khoa (bộ môn) toán, về hướng nghiên cứu hoặc trao đổi về phương pháp nghiên cứu và giảng dạy đều được hoan nghênh. Bản tin cũng nhận đăng các bài giới thiệu tiềm năng khoa học của các cơ sở cũng như các bài giới thiệu các nhà toán học.

Bài viết xin gửi về tòa soạn theo địa chỉ email của một trong các biên tập viên, hoặc địa chỉ bưu điện ở trên. Nếu bài được đánh máy tính, xin gửi kèm theo file với phông chữ unicode. Tòa soạn khuyến khích các tác giả sử dụng chương trình soạn thảo Latex và gói tiếng Việt vntex.

ĐỊA CHỈ BƯU ĐIỆN

Bản tin **Thông Tin Toán Học**,
Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học
và Công nghệ Việt Nam,
18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy,
10307 Hà Nội
© Hội Toán Học Việt Nam

BẢN ĐIỆN TỬ CỦA TẤT CẢ CÁC SỐ TẠP CHÍ
CÓ THỂ TRUY CẬP TỪ TRANG MẠNG CỦA
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM
www.vms.org.vn

Ban Chấp hành Hội Toán học Việt Nam kính chúc quý vị đồng nghiệp
năm mới Tân Sửu mạnh khỏe, hạnh phúc và thành công!

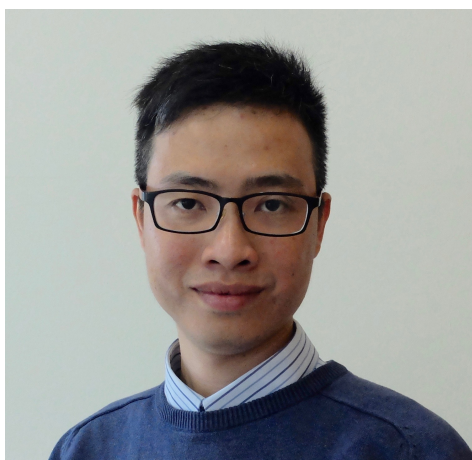


Bức *Quang cảnh từ ban công* (*Vue d'un balcon*) (1945)
của Albert Marquet (1875 – 1947).

Phan Thành Nam và giải thưởng Hội Toán học châu Âu năm 2020

Ngô Quốc Anh⁽¹⁾ và Trần Vũ Khanh⁽²⁾

Gần đây cộng đồng toán học Việt Nam đón nhận tin vui khi Phan Thành Nam (sinh năm 1985 tại Phú Yên, giáo sư ĐH Ludwig Maximilians Munich, CHLB Đức) được Hội Toán học châu Âu trao giải thưởng EMS năm 2020. Thông báo chính thức về giải thưởng năm 2020 đã được đăng tải trên trang web của Hội Toán học châu Âu⁽³⁾.



GS. Phan Thành Nam. Ảnh: ĐH Ludwig Maximilians Munich.

Giải thưởng EMS (EMS Prize) là một giải thưởng danh giá của Hội Toán học châu Âu, chỉ trao cho những nhà toán học trẻ, không phân biệt quốc tịch, tuổi đời không quá 35, hiện đang làm việc ở châu Âu, vì những đóng góp xuất sắc trong lĩnh vực toán học. Kể từ khi được công bố lần đầu tại Đại hội Toán học châu Âu năm 1992 tại Paris (Pháp), giải thưởng EMS được trao 4 năm một lần cho tối đa 10 nhà toán học tại mỗi kỳ đại hội. Năm 2020 tại đại hội lần thứ 8 (dự kiến) tổ

chức tại Slovenia, cùng với 9 nhà toán học khác, giáo sư Phan Thành Nam vinh dự được trao giải thưởng và là người Việt Nam đầu tiên nhận vinh dự này.

Phan Thành Nam là cựu học sinh Trường THPT chuyên Lương Văn Chánh tại thành phố Tuy Hòa, Phú Yên. Năm 2007, Nam tốt nghiệp cử nhân Toán-Tin học tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Thành phố Hồ Chí Minh, dưới sự hướng dẫn của GS. Đặng Đức Trọng. Sau đó, Phan Thành Nam theo học chương trình thạc sĩ Việt-Pháp (PUF) và năm 2008 anh lấy bằng thạc sĩ toán ứng dụng ở Đại học Orléans (Pháp) dưới sự hướng dẫn của GS. Phạm Ngọc Đình Alain.

Cũng trong năm này anh chuyển đến học ở Đại học Copenhagen (Đan Mạch) và trong năm 2011 anh bảo vệ thành công luận án tiến sĩ của mình dưới sự hướng dẫn của GS. Jan Philip Solovej.

Từ năm 2011 đến năm 2013, Phan Thành Nam nghiên cứu sau tiến sĩ tại Đại học Cergy-Pontoise và CNRS (CH Pháp) dưới sự hướng dẫn của GS. Mathieu Lewin. Từ năm 2013 đến năm 2016, anh nghiên cứu sau tiến sĩ tại Học viện Khoa học và Công nghệ Áo (IST) dưới sự hướng dẫn của GS. Robert Seiringer. Năm 2016, anh nhận ghế giáo sư trợ giảng tại Đại học Masaryk, CH Séc. Năm 2017 anh nhận ghế giáo sư W2 tại Đại học Ludwig Maximilians Munich, CHLB Đức, và làm việc tại đó cho đến nay.

⁽¹⁾Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội

⁽²⁾Đại học Tân Tạo, Long An

⁽³⁾<https://euro-math-soc.eu/news/20/05/8/prize-winners-announced>

Năm 2018, Nam là một trong ba nhà toán học trẻ được trao giải thưởng “Nhà khoa học trẻ về vật lý toán” của Hội Vật lý lý thuyết và ứng dụng (IUPAP) trong Đại hội Vật lý Toán quốc tế được tổ chức ở Montreal, Canada.

Theo Cơ sở dữ liệu điểm bài Mathematical Reviews của Hội Toán học Hoa Kỳ, tính đến thời điểm hoàn thành bài viết này, GS. Phan Thành Nam đã công bố hơn 40 công trình khoa học trên các tạp chí quốc tế trong đó có những công bố trên các tạp chí hàng đầu trong các lĩnh vực toán học và vật lý toán, chẳng hạn *Advances in Mathematics*, *American Journal of Mathematics*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, *Communications in Mathematical Physics*, *Inventiones Mathematicae*, *Journal of the European Mathematical Society*, *Transactions of the American Mathematical Society*. Bên cạnh đó anh cũng đã bắt đầu tham gia công tác hướng dẫn nghiên cứu sinh và sau tiến sĩ. Anh cũng đã tham gia ban biên tập của tạp chí *Mathematical Physics, Analysis and Geometry* do Springer xuất bản.

Hiện nay, hướng nghiên cứu chính của GS. Phan Thành Nam là lý thuyết toán học cho các hệ lượng tử nhiều hạt, chủ yếu tập trung vào 3 vấn đề chủ đề sau đây: giả thuyết ion hoá; giả thuyết Lieb–Thirring; và trạng thái ngưng tụ Bose–Einstein.

Cũng giống như các nhà toán học trẻ tuổi khác đang làm việc ở nước ngoài, thông qua việc đào tạo các bạn trẻ và trao đổi chuyên môn với các đồng nghiệp trong nước GS. Phan Thành Nam luôn nhiệt tình cống hiến công sức của mình nhằm mục đích phát triển hơn nữa nền toán học trong nước.

Trong khuôn khổ bài viết này, chúng tôi mong muốn giới thiệu sơ lược các bài toán trên cùng với các đóng góp xuất sắc của Giáo sư Phan Thành Nam.

1. GIẢ THUYẾT ION HOÁ

Trong vật lý ta biết rằng một electron có thể liên kết với hạt nhân của một nguyên tử bởi lực hút Coulomb. Một hệ có một hoặc nhiều electron liên kết với một hạt nhân được gọi là một nguyên tử. Nếu số electron $N \geq 1$ khác với số điện tích $Z > 0$ của hạt nhân thì nguyên tử đó được gọi là một ion. Quá trình một nguyên tử (hay phân tử) nhận thêm hay mất đi electron để tạo thành các ion được gọi là quá trình điện li, hoặc quá trình ion hóa. Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là một hạt nhân có thể nhận tối đa bao nhiêu electron.

Theo nguyên lý cơ bản của cơ học lượng tử, nếu một nguyên tử có một hạt nhân điện tích $Z > 0$ và N electron điện tích -1 thì hàm sóng của các electron $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ thoả mãn phương trình Schrödinger

$$\left[\sum_{i=1}^N \left(-\frac{1}{2} \Delta_{x_i} - \frac{Z}{|x_i|} \right) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{|x_i - x_j|} \right] \Psi = E \Psi,$$

trong đó $x_i \in \mathbb{R}^3$ là vị trí của electron thứ i , E là trị riêng nhỏ nhất của toán tử bên vế trái (còn được gọi là Hamiltonian). Phương trình Schrödinger trên là phương

trình sóng miêu tả chuyển động của electron dưới ảnh hưởng của hạt nhân trong nguyên tử. Giả thuyết ion hoá phát biểu rằng nếu phương trình Schrödinger trên có

nghiệm khác 0 thì

$$(1) \quad N \leq Z + 2.$$

Khía cạnh vật lý của giả thuyết ion hóa (1) trên nói rằng không tồn tại ion âm với tổng điện tích thấp hơn -2 . Nói cách khác, mỗi hạt nhân có điện tích $Z > 0$ chỉ nhận tối đa $N + 2$ electron với điện tích -1 . Giả thuyết này là bài toán thứ 9 trong danh sách 15 bài toán mở về toán tử Schrödinger của Barry Simon⁽⁴⁾.

Giả thuyết ion hoá (1) đã được nghiên cứu từ năm 1982 bởi Israel M. Sigal và Mary B. Ruskai, sau đó nối tiếp bởi Elliott H. Lieb, Walter Thirring, Barry Simon, Charles Fefferman,... Kết quả tốt nhất cho (1) trong gần 30 năm là đánh giá

$$N < 2Z + 1,$$

được chứng minh bởi Elliott H. Lieb năm 1984⁽⁵⁾.

Năm 2011, trong luận án tiến sĩ⁽⁶⁾ của mình, Phan Thành Nam đã chứng minh

$$N < 1.22Z + 3Z^{1/3}.$$

Đánh giá trên thực sự cải tiến đánh giá của Lieb khi $Z \geq 6$ và đây cũng là kết quả tốt nhất hiện tại về bài toán ion hoá.

Trong một hướng tiếp cận khác, bài toán ion hoá cũng được nghiên cứu trong các mô hình xấp xỉ. Trong lý-hoá lượng tử, thường ta không thể phân tích phương trình Schrödinger mà tập trung vào các mô hình đơn giản hơn, trong đó một mô hình nổi bật là *phương trình Thomas–Fermi–Dirac–von Weizsäcker* (TFDW).

Khác với phương trình Schrödinger, phương trình TFDW có nghiệm ngay cả khi $Z = 0$, tức là một số electron có thể tồn tại ở vô cùng dưới dạng một bound state. Năm 2017, trong công trình⁽⁷⁾ đăng trên *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Phan Thành Nam cùng với hai đồng nghiệp Rupert L. Frank và Hanna V. D. Bosch chứng minh giả thuyết ion hoá cho phương trình TFDW. Trước đó, chỉ có chứng minh cho trường hợp đặc biệt $Z = 0$ bởi Jianfeng Lu và Felix Otto⁽⁸⁾.



Phan Thành Nam cùng gia đình

2. GIẢ THUYẾT LIEB–THIRRING

Giả thuyết Lieb–Thirring liên quan tới dãy các giá trị riêng $\{\lambda_n(V)\}_{n \geq 1}$ của toán tử Schrödinger

$$-\Delta + V(x)$$

trong không gian $L^2(\mathbb{R}^d)$ với hàm thế năng $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

Một kết quả kinh điển của Hermann Weyl về xấp xỉ bán cổ điển, còn được

⁽⁴⁾B. Simon, Schrödinger operators in the twenty-first century, in *Mathematical Physics 2000*, Imperial College Press, 283–288.

⁽⁵⁾E.H. Lieb, Atomic and molecular negative ions, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984), 315.

⁽⁶⁾PT. Nam, New bounds on the maximum ionization of atoms, *Comm. Math. Phys.* **312** (2012) 427–445.

⁽⁷⁾R.L. Frank, PT. Nam và H.V.D. Bosch, The ionization conjecture in Thomas–Fermi–Dirac–von Weizsäcker theory. *Comm. Pure Appl. Math.* **71** (2018) 577–614.

⁽⁸⁾J. Lu và F. Otto, Nonexistence of a minimizer for Thomas–Fermi–Dirac–von Weizsäcker model, *Comm. Pure Appl. Math.* **67** (2014) 1605–1617.

gọi là *Weyl law*, phát biểu rằng đáng điều tiệm cận của các giá trị riêng âm của toán tử $-\Delta + V(x)$ hoàn toàn được xác định bởi xấp xỉ bán cổ điển

$$(2) \quad \sum_{n \geq 1} |\lambda_n(\beta V)|^\kappa \approx L_{\text{cl}}^\kappa \int_{\mathbb{R}^d} |\beta V_-|^{\kappa+d/2}$$

với mọi $\kappa \geq 0$. Ở đây L_{cl}^κ là một hằng số cho bởi

$$L_{\text{cl}}^\kappa = (4\pi)^{-d/2} \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\Gamma(\kappa + 1 + d/2)}$$

và ký hiệu $a_- := \min(a, 0)$ để chỉ phần âm của a .

Rõ ràng trường hợp $\kappa = 0$ tương ứng với đánh giá số các giá trị riêng âm của $-\Delta + V(x)$. Bằng cách chọn hàm thế năng

$$V(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x \in \Omega, \\ \infty & \text{nếu } x \notin \Omega, \end{cases}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ là một tập mở bị chặn, từ (2) ta khẳng định được rằng số các giá trị riêng âm tương ứng với điều kiện biên Dirichlet nhỏ hơn λ đúng bằng

$$L_{\text{cl}}^0 |\Omega| \lambda^{d/2} + o(\lambda^{d/2})_{\lambda \rightarrow \infty}.$$

Đây là kết quả kinh điển được Weyl chứng minh trong năm 1911.

Trong trường hợp $\kappa = 1$, kết quả của Weyl ở (2) trở thành

$$\begin{aligned} & \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta^{1+d/2}} \sum_{n \geq 1} (\lambda_n(\beta V))_- \\ &= -L_{\text{cl}} \int_{\mathbb{R}^d} |V_-|^{1+d/2} \end{aligned}$$

trong đó $L_{\text{cl}} := L_{\text{cl}}^1$, tức là nếu ký hiệu $|B_1|$ là thể tích quả cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^d$, thì

$$L_{\text{cl}} = \frac{2}{d+2} |B_1| (2\pi)^{-d}.$$

Năm 1975, trong công trình⁽⁹⁾ đăng trên *Physical Review Letters*, Elliott H. Lieb

⁽⁹⁾E.H. Lieb và W.E. Thirring, Bound for the Kinetic Energy of Fermions Which Proves the Stability of Matter, *Phys. Rev. Lett.* **35** (1975), 687.

và Walter Thirring chứng minh rằng với mọi hàm thế năng V ta luôn có đánh giá

$$(3) \quad \sum_{n \geq 1} (\lambda_n(V))_- \geq -L \int_{\mathbb{R}^d} |V_-|^{1+d/2}$$

với $L \leq 4\pi L_{\text{cl}}$. Chú ý là một đánh giá tương tự cho một trị riêng

$$\lambda_1(V) \geq -L_{\text{So}} \int_{\mathbb{R}^d} |V_-|^{1+d/2}$$

có thể được chứng minh dễ dàng bằng phép nhúng Sobolev $H^1(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ với các giá trị $p \geq 1$ thích hợp. Tuy nhiên, bất đẳng thức Lieb–Thirring sâu sắc hơn vì nó liên quan tới tổng của *tất cả các trị riêng âm*. Về mặt vật lý, bất đẳng thức Sobolev là một dạng định lượng của *nguyên lý bất định Heisenberg*, tức là không thể xác định đồng thời vị trí và động lượng của một hạt điện tích, trong khi bất đẳng thức Lieb–Thirring chứa đựng cả nguyên lý loại trừ Pauli, tức là hai hạt điện tích không thể có cùng vị trí lượng tử.

Rõ ràng nếu hằng số L càng nhỏ thì đánh giá (3) càng chặt, hơn nữa ta luôn có

$$L \geq \max(L_{\text{cl}}, L_{\text{So}}).$$

Lieb và Thirring *dự đoán rằng ta có thể chọn*

$$L = \begin{cases} L_{\text{cl}} & \text{khi } d \geq 3, \\ L_{\text{So}} & \text{khi } d = 1, 2, \end{cases}$$

trong đánh giá (3).

Vì bất đẳng thức Lieb–Thirring có rất nhiều ứng dụng trong cơ học lượng tử, đặc biệt là trong việc chứng minh tính ổn định của vật chất, việc cải tiến hằng số L trong đánh giá (3) là một bài toán quan trọng. Đánh giá ban đầu của Lieb và Thirring đã được cải thiện thành

$$L \leq 2L_{\text{cl}}$$

trong năm 2000 bởi các tác giả Dirk Hundertmark, Ari Laptev, và Timo Weidl⁽¹⁰⁾. Sau đó đánh giá này tiếp tục được cải tiến thành

$$L \leq 1.814L_{cl}$$

trong năm 2008 bởi các tác giả Jean Dolbeault, Ari Laptev, và Michael Loss⁽¹¹⁾.

Năm 2018, Rupert L. Frank, Dirk Hundertmark, Michal Jex, và Phan Thành Nam thu được đánh giá chặt hơn

$$L \leq 1.456L_{cl}$$

cho mọi chiều $d \geq 1$. Kết quả này sau đó đã được nhận đăng trên *Journal of the European Mathematical Society*⁽¹²⁾ và đến nay đây vẫn là kết quả tốt nhất.

Do tính đối ngẫu, giả thuyết Lieb–Thirring tương đương với bất đẳng thức động năng

$$\mathrm{Tr}(-\Delta\gamma) \geq K_{cl} \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(x, x)^{1+2/d} dx$$

trong đó $0 \leq \gamma \leq 1$ là một toán tử bất kỳ trong $L^2(\mathbb{R}^d)$ với nhân $\gamma(x, y)$. Do tính tương đương giữa giả thuyết Lieb–Thirring và bất đẳng thức động năng nên bất đẳng thức này vẫn là một câu hỏi mở.

Năm 2017, trong công trình⁽¹³⁾ đăng trên *Journal of Functional Analysis*, Phan Thành Nam chứng minh rằng bất đẳng thức động năng đúng với mọi hằng số gần K_{cl} tùy ý. Phát biểu chính xác cho kết quả

này là với mọi $\epsilon > 0$ ta luôn có đánh giá

$$\mathrm{Tr}(-\Delta\gamma) \geq (1 - \epsilon)K_{cl} \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(x, x)^{1+2/d} dx - \frac{C_d}{\epsilon^{3+4/d}} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla_x \sqrt{\gamma(x, x)}|^2 dx$$

trong đó $C_d > 0$ là hằng số chỉ phụ thuộc vào số chiều không gian. Kết quả này có nhiều ứng dụng trong lý thuyết hàm mật độ⁽¹⁴⁾ ⁽¹⁵⁾.

3. CÁC TRẠNG THÁI VẬT CHẤT VÀ NGỪNG TỤ BOSE–EINSTEIN

Trong vật lý, trạng thái vật chất là một trong những dạng riêng biệt mà ở đó vật chất có thể tồn tại. Ba trong bốn trạng thái cơ bản và phổ biến của vật chất mà chúng ta có thể dễ dàng quan sát được trong cuộc sống hàng ngày là rắn, lỏng, và khí. Trạng thái vật chất cơ bản thứ tư mà chúng ta cũng có thể quan sát được, mặc dù khó khăn hơn, là plasma.

Ngoài các dạng trạng thái nói trên thì còn tồn tại nhiều trạng thái trung gian khác như tinh thể lỏng hoặc một số trạng thái chỉ tồn tại trong điều kiện vô cùng khắc nghiệt trong đó có ngưng tụ Bose–Einstein.

Năm 1923, Bose và Einstein dự đoán rằng các hạt boson ở nhiệt độ rất thấp sẽ ngưng tụ về cùng một trạng thái lượng tử với năng lượng thấp nhất (đôi khi còn được gọi là trạng thái thứ năm của vật

⁽¹⁰⁾D. Hundertmark, A. Laptev và T. Weidl, New bounds on the Lieb–Thirring constants, *Invent. Math.* **140** (2000) 693–704.

⁽¹¹⁾J. Dolbeault, A. Laptev và M. Loss, Lieb–Thirring inequalities with improved constants, *J. Eur. Math. Soc.* **10** (2008) 1121–1126

⁽¹²⁾R.L. Frank, D. Hundertmark, M. Jex và P.T. Nam, The Lieb–Thirring inequality revisited. *J. Eur. Math. Soc.*, đã nhận đăng.

⁽¹³⁾P.T. Nam, Lieb–Thirring inequality with semiclassical constant and gradient error term. *J. Funct. Anal.* **274** (2018) 1739–1746.

⁽¹⁴⁾N. Gottschling và P.T. Nam, Convergence of Levy–Lieb to Thomas–Fermi density functional, *Cal. Var. PDE* **57** (2018) 105–117.

⁽¹⁵⁾M. Lewin, E. H. Lieb, R. Seiringer, The Local Density Approximation in Density Functional Theory, *Pure Appl. Analysis* **2** (2020) 35–73.

chất). Năm 1995, hiện tượng này được quan sát trong phòng thí nghiệm, dẫn tới giải Nobel Vật lý năm 2001 của Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle, và Carl E. Wieman. Họ đã làm lạnh khí nguyên tử

Rubidi đến nhiệt độ rất gần với độ không tuyệt đối $-273,15^{\circ}\text{C}$. Từ thực nghiệm đầu tiên này, hiện tượng *ngưng tụ Bose-Einstein* (BEC) đã trở thành một chủ đề nóng của vật lý hiện đại.



PT. Nam cùng các đồng nghiệp trẻ tại
ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội năm 2014

Bài toán trọng tâm về BEC là chứng minh hiện tượng chuyển pha cho các hệ khí có tương tác trong ba chiều: *hiện tượng BEC xảy ra dưới một nhiệt độ tới hạn, và không xảy ra ở nhiệt độ cao*. Các tính toán tiên phong của Bose và Einstein chỉ áp dụng cho khí lý tưởng (không tương tác). Trong thực tế, các hệ khí luôn có tương tác và điều này khiến cho phương trình Schrödinger trở nên phức tạp hơn rất nhiều.

Về mặt vật lý, một trạng thái của vật chất cũng được đặc trưng bởi sự chuyển

pha. Chuyển pha cho thấy sự thay đổi trong cấu trúc và có thể được nhận ra bởi sự thay đổi đột ngột về tính chất. Trạng thái (hoặc pha) của một tập hợp vật chất nhất định có thể thay đổi tùy thuộc vào điều kiện áp suất và nhiệt độ, sự chuyển đổi sang các pha khác khi các điều kiện này thay đổi có lợi cho sự tồn tại. Chẳng hạn ta có thể lấy ví dụ về sự chuyển tiếp từ rắn sang lỏng sang khí sang plasma với sự gia tăng nhiệt độ. Gần không độ, một chất tồn tại dưới dạng chất rắn. Khi nhiệt được thêm vào chất này, nó tan

chảy thành chất lỏng tại điểm nóng chảy. Nếu tiếp tục được thêm nhiệt độ, nó sẽ chuyển thành khí ở nhiệt độ sôi. Và nếu được đun nóng với nhiệt độ đủ cao, chất này sẽ đi vào trạng thái plasma ở đó các electron có nhiều năng lượng đến mức bứt khỏi nguyên tử mẹ.

Năm 2013 trong công trình⁽¹⁶⁾ đăng trên *Advances in Mathematics*, Mathieu Lewin, P.T. Nam và Nicolas Rougerie đưa ra một chứng minh cho BEC ở nhiệt độ 0 cho một lớp các hệ tương tác yếu. Chứng minh này dựa trên một tính chất tổng quát của các hàm sóng đối xứng, thể hiện qua một phiên bản lượng tử của định lý De Finetti trong lý thuyết xác suất (định lý gốc phát biểu rằng một dãy các biến ngẫu nhiên đối xứng có thể viết thành một tổ hợp lồi của các biến ngẫu nhiên i.i.d.). Các công cụ trong bài báo này đã được sử dụng rất nhiều trong các nghiên cứu sau đó (bài báo được trích dẫn hơn 140 lần, theo Google Scholar).

Đầu năm 2020, M. Lewin, P.T. Nam và N. Rougerie đưa ra một chứng minh cho sự không tồn tại BEC ở nhiệt độ cao hơn nhiệt độ tới hạn. Họ dùng một phương pháp hoàn toàn mới để đánh giá phương

sai tại một trạng thái lượng tử dựa trên giá trị trung bình của các trạng thái nhiễu (theo bất đẳng thức Cauchy–Schwarz thì giá trị trung bình có thể chặn trên bằng phương sai, ở đây các tác giả cần chiều ngược lại). Kết quả này liên kết tính chất của khí Bose ở nhiệt độ cao với độ đo bất biến Gibbs phát triển trước đó bởi Jean Bourgain và nhiều người khác⁽¹⁷⁾. Kết quả đột phá này đã được nhận đăng trên *Inventiones Mathematicae*⁽¹⁸⁾.

Liên quan tới BEC là hiện tượng siêu lỏng, tức là các chất lỏng có độ nhớt bằng không, có thể chảy vĩnh viễn mà không bị mất đi động năng. Cơ sở vật lý của hiện tượng này được giải thích bằng lý thuyết của Landau và Bogoliubov (Landau nhận giải Nobel Vật lý năm 1962 cho các công trình này). Năm 2015 trong công trình⁽¹⁹⁾ đăng trên *Communications on Pure and Applied Mathematics*, M. Lewin, P.T. Nam, Sylvia Serfaty và Jan Philip Solovej đưa ra một cách tiếp cận tổng quát cho lý thuyết xấp xỉ Bogoliubov dựa trên những tiên đề cơ bản của vật lý lượng tử. Các công cụ trong bài báo này đã được sử dụng rộng rãi trong nhiều bài toán khác, chẳng hạn quang phổ kích thích cho khí loãng⁽²⁰⁾ và động lực học lượng tử⁽²¹⁾.

⁽¹⁶⁾M. Lewin, P.T. Nam, và N. Rougerie, Derivation of Hartree’s theory for generic mean-field Bose systems, *Adv. Math.* **254** (2014) 570–621.

⁽¹⁷⁾J. Bourgain, Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures, *Comm. Math. Phys.* **66** (1994) 1–26.

⁽¹⁸⁾M. Lewin, P.T. Nam, và N. Rougerie, Classical field theory limit of many-body quantum Gibbs states in 2D and 3D, arXiv:1810.08370, *Invent. Math.*, <https://doi.org/10.1007/s00222-020-01010-4>.

⁽¹⁹⁾M. Lewin, P. T. Nam, S. Serfaty và J. P. Solovej, Bogoliubov spectrum of interacting Bose gases, *Comm. Pure Appl. Math.* **68** (2015) 413–471.

⁽²⁰⁾C. Bocatto, C. Brennecke, S. Cenatiempo, B. Schlein, Bogoliubov theory in the Gross-Pitaevskii limit, *Acta Math.* **222** (2019) 219–335.

⁽²¹⁾P. T. Nam và M. Napiórkowski, A note on the validity of Bogoliubov correction to mean-field dynamics, *J. Math. Pures Appl.* **108** (2017) 662–688.

Hố đen – kỳ dị toán học hay thực thể vật lý

Nguyễn Anh Kỳ⁽¹⁾

Quan hệ vật lý và toán học là một trong những quan hệ gần gũi nhất giữa các ngành khoa học. **Roger Penrose** (1931) và các công trình của ông là một minh chứng cho khẳng định trên. Penrose là một nhà vật lý toán và toán học người Anh và là một trong ba người đoạt giải Nobel về vật lý năm 2020 cho các công trình nghiên cứu về hố đen.



Roger Penrose. Ảnh: Wikipedia.

Penrose có nhiều công trình nghiên cứu và sáng tạo áp dụng trong cả hai lĩnh vực toán học và vật lý bao gồm những sản phẩm vừa có tính khoa học vừa có tính giải trí hay ứng dụng như tam giác Penrose (*Penrose triangle*), bậc thang Penrose (*Penrose stairs*) và "sàn gạch" Penrose (*Penrose's tiling*). Trước khi được trao giải Nobel, R. Penrose đã đoạt nhiều giải thưởng danh giá khác về vật lý và toán học (danh sách đầy đủ có thể xem trong Wikipedia) và đặc biệt là ông có hai công trình liên quan tới giải Nobel đó là "sàn

gạch" Penrose và lý thuyết kỳ dị không-thời gian (*space-time singularity*) qua đó khẳng định sự tồn tại của hố đen trong thực tế. "Sàn gạch" Penrose không mang lại giải Nobel nhưng gián tiếp tiên đoán sự tồn tại cấu trúc vật chất có trật tự nhưng không tuần hoàn (không có đối xứng tịnh tiến) kiểu như "giả tinh thể" (*quasi-crystal*) được phát hiện năm 1982 bởi nhà khoa học Israel-Mỹ Dan Shechtman, người sau đó đã đoạt giải Nobel hoá học năm 2011 về phát hiện đó.⁽²⁾ Trong khuôn khổ bài này chúng ta chỉ bàn về công trình nghiên cứu sụp đổ hấp dẫn (*gravitational collapse*) và kỳ dị không-thời gian [9] là công trình đưa Penrose tới giải Nobel (dù với 55 năm chậm trễ), còn các nghiên cứu khác trong phổ nghiên cứu rộng của Penrose khó giới thiệu được hết trong một bài báo ngắn nên chúng tôi hy vọng được dành cho dịp sau. Trước khi đi vào nội dung trên ta cần tìm hiểu một số thông tin nhập môn.

Ta hãy bắt đầu với cơ học cổ điển của Newton. Cơ học Newton "hoạt động" trong không gian Euclid 3 chiều (E_3) và một chiều thời gian (độc lập với không gian). Nguyên lý tương đối cổ điển (còn gọi nguyên lý tương đối Galilei) phát biểu rằng các quy luật vật lý (thời đó chỉ mới là cơ học cổ điển của Newton) như nhau trong mọi hệ quy chiếu quán tính (với nhau). Theo ngôn ngữ toán học nguyên lý này (cũng là một dạng tiên đề) có nghĩa là các định luật vật lý bất biến dưới phép biến đổi (tịnh tiến) thời gian và

⁽¹⁾Viện Vật lý, Viện Hàn lâm KHCN Việt Nam. Email: anhky@iop.vast.vn

⁽²⁾Trong một cuộc phỏng vấn D. Shechtman nói rằng đã biết về "sàn gạch" Penrose từ trước nhưng không nhớ đến khi tiến hành nghiên cứu "giả tinh thể". Tuy nhiên, Penrose cho rằng tiềm thức (về "sàn gạch" Penrose) có thể đã giúp Schechtman.

các phép biến đổi tọa độ không gian tạo thành nhóm, là tích trực tiếp của nhóm tịnh tiến thời gian T_1 với nhóm biến đổi tọa độ trong không gian E_3 (nhóm biến đổi tọa độ tối lượt là tích bán trực tiếp của nhóm tịnh tiến T_3 và nhóm quay $O(3)$):

$$(1) \quad T_1 \otimes [T_3 \rtimes O(3)].$$

Dưới phép biến đổi (1) (còn gọi là biến đổi Galilei) khoảng cách thời gian và không gian bảo toàn (tức không thay đổi)

$$(2) \quad \Delta t = t - t' = \text{const.},$$

$$(3) \quad \Delta S_3^2 = \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2 = \text{const.},$$

trong đó $\Delta x_i = x_i - x'_i$, với x_i và x'_i là tọa độ của 2 điểm không gian nào đó, còn t và t' là hai thời điểm nào đó. Các công thức (2) và (3) cũng có thể viết dưới dạng vi phân (để sử dụng cho trường hợp không gian cong):

$$(4) \quad dt = \text{const.},$$

$$(5) \quad dS_3^2 = \sum_{i=1}^3 \delta_{ij}.dx_i.dx_j = \text{const.}.$$

Ở đây δ_{ij} (với $i, j = 1, 2, 3$) ký hiệu **metric** của không gian E_3 :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{với } i = j, \\ 0 & \text{với } i \neq j. \end{cases}$$

Tuy nhiên, nguyên lý tương đối Galilei không mở rộng được ra ngoài phạm vi vật lý cổ điển của Newton (chỉ áp dụng được cho các chuyển động chậm so với ánh sáng hoặc coi tốc độ ánh sáng là vô cùng lớn), ví dụ nó không áp dụng được cho những trường hợp như Điện động lực học (*electrodynamics*) ở đó tốc độ chuyển động của vật chất có thể rất lớn, nhiều khi bằng hoặc xấp xỉ tốc độ ánh sáng. Trong những trường hợp như vậy Lý thuyết tương đối hẹp (*special theory of relativity*) của Einstein là lý thuyết

thay thế. Nguyên lý tương đối hẹp có hai phần:

- (i) Quy luật vật lý như nhau trong mọi hệ quy chiếu quán tính (*phần này giống nguyên lý tương đối cổ điển*), và
- (ii) Tốc độ ánh sáng trong chân không là một hằng số và như nhau trong mọi hệ quy chiếu quán tính.

Ở đây ta lưu ý rằng tốc độ ánh sáng (hay đầy đủ hơn, tốc độ lan truyền của sóng điện từ hay tổng quát hơn nữa, tốc độ chuyển động của tất cả các loại hạt không có khối lượng) trong chân không là tốc độ cực đại của vật chất và là một hằng số vật lý.

Trong Lý thuyết tương đối hẹp, thời gian và không gian không còn độc lập với nhau mà được thống nhất thành không-thời gian (*space-time*) – một không gian giả Euclid 4 chiều (4D *pseudo-Euclidean space*) có tên gọi riêng là không gian Minkowski ($M_{1,3}$ hay $E_{1,3}$), và khi đó nhóm bất biến Galilei (1) được thay thế bằng nhóm Poincaré,

$$(6) \quad T_{1,3} \rtimes O(1, 3),$$

là tích bán trực tiếp giữa nhóm tịnh tiến $T_{1,3}$ với nhóm Lorentz là nhóm giả trực giao (*pseudo-orthogonal*) $O(1, 3)$ trong không gian Minkowski. Bây giờ biến đổi Galilei được thay thế bằng biến đổi Poincaré và khoảng bất biến (4) và (5) được thay thế bằng khoảng bất biến Lorentz

$$(7) \quad dS_4^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu . dx^\nu,$$

trong đó $x^0 = ct$ là tọa độ thời gian, $x^i = (x^1, x^2, x^3)$ là tọa độ của phần không gian 3 chiều và $\eta_{\mu\nu}$ là metric Minkowski,

một metric giả Euclid, của không gian Minkowski $M_{1,3}$:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{với } \mu = \nu = 0, \\ -1 & \text{với } \mu = \nu = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{với } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Do metric $\eta_{\mu\nu}$ suy biến nên "độ dài" dS_4^2 có thể có giá trị âm hoặc dương hoặc 0 (kể cả khi $dx \neq 0$), khác với độ dài Euclid dS_3^2 luôn luôn không âm (và bằng 0 khi và chỉ khi $dx = 0$), nhưng thực tế vật lý (không gì có thể chuyển động nhanh hơn ánh sáng) chỉ cho phép $dS_4^2 \geq 0$. Một khoảng cách giữa 2 điểm khác nhau hay một vector có điểm đầu và điểm cuối không trùng nhau cũng có thể có độ dài bằng 0 được gọi là khoảng cách/vector "suy biến" (*null distance/vector*) hay khoảng cách/vector "kiểu ánh sáng" (*light-like distance/vector*) xuất phát từ thực tế là "quãng đường đi" của một tia sáng luôn có "độ dài" bằng 0, $dS_4^2 = 0$. Lý thuyết tương đối hẹp đã dẫn tới cuộc cách mạng trong vật lý nói riêng và trong khoa học và công nghệ nói chung. Công thức nổi tiếng về sự tương đương năng-lượng–khối-lượng

$$E = mc^2$$

làm nền tảng cho khai thác năng lượng hạt nhân và rất quan trọng trong các lĩnh vực khác như vật lý hạt cơ bản (vật lý năng lượng cao) và vũ trụ học là một hệ quả của Lý thuyết tương đối hẹp.

Đến đây, các nguyên lý tương đối (cổ điển và hẹp) đều dựa trên biến đổi giữa các hệ quy chiếu quán tính cùng nhau (không có gia tốc với nhau) nên chưa trả lời được câu hỏi nguyên lý tương đối nào có thể áp dụng cho các hệ quy chiếu không quán tính (với nhau). Lý thuyết

tương đối tổng quát (*general theory of relativity*) [10, 13, 8] do Einstein đề xuất là một mở rộng của Lý thuyết tương đối hẹp cho các hệ quy chiếu có gia tốc. Theo lý thuyết này, trường hấp dẫn trong hệ quy chiếu quán tính trong không-thời gian phẳng (không gian Minkowski) có thể được thay thế tương đương bằng các hệ quy chiếu quán tính địa phương (*local inertial reference frame*) thích hợp trong đó không còn hiệu ứng của trường hấp dẫn.⁽³⁾ Theo ngôn ngữ hình học thì không gian Minkowski với sự có mặt của trường hấp dẫn có thể được thay thế bằng không gian giả Riemann (*pseudo-Riemannian space*) với metric $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x)$ (nói chung là một hàm số của tọa độ không-thời gian có giới hạn phẳng là $\eta_{\mu\nu}$) và độ dài vi phân

$$(8) \quad dS_4^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu}(x) \cdot dx^\mu \cdot dx^\nu,$$

là không gian cong trơn có không gian tiếp cận địa phương là giả Euclid (trong trường hợp ở đây là không gian Minkowski) tại đó trường hấp dẫn bị triệt tiêu cục bộ. Bằng cách này trường hấp dẫn (hay gia tốc) có thể được mô tả bởi các thuộc tính của không gian giả Riemann thích hợp, cụ thể là phương trình trường hấp dẫn có thể được thay thế bằng các phương trình của không gian giả Riemann, trong đó trường hấp dẫn (hay gia tốc) được biểu diễn thông qua các đại lượng (tensor) đặc trưng độ cong của không gian giả Riemann. Vật chất trong không-thời gian phẳng (ở đây là không gian Minkowski) có trường hấp dẫn tương đương với vật chất trong không-thời gian cong (không có trường hấp dẫn) là không gian giả Riemann (hay chính xác hơn, là đa tạp Lorentz -

⁽³⁾Điều này cho thấy khi rơi tự do trong trường hấp dẫn ta cảm nhận tình trạng không trọng lượng, hay nói cách khác một vật rơi tự do không có trọng lượng.

Lorentzian manifold). Đó là tinh thần của phương trình Einstein

$$(9) \quad \mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

(được thiết lập năm 1915) trong đó G là hằng số hấp dẫn, c là vận tốc ánh sáng, $R_{\mu\nu}$ là tensor Ricci, R là độ cong vô hướng (hay còn gọi là đại lượng vô hướng Ricci) và $T_{\mu\nu}$ là tensor năng-xung-lượng của phân bố vật chất tại vị trí không-thời gian được xét. Tensor Ricci $R_{\mu\nu}$ và độ cong vô hướng R là những hàm của metric $g_{\mu\nu}$ nên khi giải (9) ta tìm được $g_{\mu\nu}$ trong (9), tức xác định được không gian giả Riemann tương ứng.

Quỹ đạo của ánh sáng hay vật rơi tự do trong trường hấp dẫn (không có các tương tác khác) là những đường ngắn nhất - đường trắc địa (geodesic) - trong không gian giả Riemann tương ứng. Đường trắc địa của ánh sáng (và các hạt không khối lượng) là đường trắc địa "suy biến" (null geodesic), tức có "độ dài" $dS_4^2 = 0$.

Phương trình (9) cho ta thấy sự tương đương giữa hình học (geometry) và hấp dẫn (gravitation) và tương quan giữa hình học với vật chất (matter). Sự phân bố và vận động của vật chất (về phía phương trình) làm thay đổi hình học (về trái phương trình) và sự thay đổi hình học tác động ngược lại lên phân bố và vận động của vật chất. Sự ảnh hưởng qua lại như vậy giữa hình học và vật chất làm phương trình Einstein và trường hấp dẫn phi tuyến mạnh gây khó khăn cho việc giải phương trình Einstein và lượng tử hoá trường hấp dẫn (ở đây ta không có điều kiện đi sâu về vấn đề này).

Cho tới nay, với những mục đích khác nhau, phương trình (9) có nhiều biến thể cải tiến, trong đó có biến thể với hằng số vũ trụ, nhưng trong khuôn khổ bài báo này ta không thể đề cập. Ta cũng tạm thời không quan tâm về phải của phương trình (coi không có mặt của vật chất bên ngoài nguồn hấp dẫn) nên phương trình Einstein trở thành phương trình trường hấp dẫn trong chân không

$$(10) \quad \mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0.$$

Giải phương trình Einstein (tìm metric thỏa mãn phương trình), ngay cả phương trình trong chân không (10), chưa nói phương trình đầy đủ (9), luôn luôn là một thách thức lớn. Do đó người ta thường sử dụng phương pháp giải gần đúng và thử sức với những trường hợp đơn giản như trường hợp trường hấp dẫn yếu (tức độ cong nhỏ) hoặc trường hợp áp đặt một số điều kiện để làm đơn giản lời giải, ví dụ như áp đặt đối xứng cầu (là điều kiện lý tưởng nhưng gần đúng có thể chấp nhận được trong nhiều trường hợp thực tế - quả thực, một thiên thể như ngôi sao hay hành tinh nhìn từ xa vẫn có thể được coi là quả cầu).

Nghiệm đầu tiên của phương trình (10) với đối xứng cầu được Karl Schwarzschild (nhà khoa học người Đức) tìm ra vài tháng sau khi Einstein công bố Lý thuyết tương đối tổng quát (tháng 11/1915) [12]. **Nghiệm Schwarzschild** (hay metric Schwarzschild) trong hệ tọa độ cầu (có gốc là tâm của nguồn hấp dẫn hình cầu) có dạng ⁽⁴⁾

⁽⁴⁾Về một loại hấp dẫn cải tiến và giải phương trình Einstein cải tiến với đối xứng cầu, có thể xem [7] và các tài liệu tham khảo trong đó.

$$(11) \quad dS^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Đây cũng là nghiệm của phương trình Einstein nói chung được tìm thấy đầu tiên. Metric Schwarzschild lệch phẳng (lệch khỏi metric Minkowski $\eta_{\mu\nu}$) ở 2 phần tử g_{00} và g_{rr} :

$$\begin{cases} g_{00} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \neq \eta_{00} = 1, \\ g_{rr} = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \neq \eta_{rr} = -1. \end{cases}$$

Theo định lý Birkhoff [2], metric Schwarzschild là nghiệm tĩnh (*static solution*) và là nghiệm chân không đối xứng cầu tổng quát nhất của phương trình Einstein (10). Ta cũng có thể viết metric Schwarzschild (11) dưới dạng gọn hơn một chút,

$$dS^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega,$$

trong đó

$$(12) \quad r_S = \frac{2GM}{c^2}$$

gọi là **bán kính Schwarzschild**. Với suy luận cổ điển, John Michell (1783) và Pierre-Simon Laplace (1796) đã tìm ra kết quả tình cờ trùng hợp với (12).

Thật vậy, một vật có khối lượng m (tạm gọi là vật m) trong trường hấp dẫn của một vật có khối lượng M (tạm gọi là vật M) và không chịu bất cứ tương tác nào khác, có thể năng hấp dẫn là

$$(13) \quad U = \frac{GmM}{r},$$

với r là khoảng cách từ (tâm) vật m tới (tâm) vật M (ở đây ta coi hai vật là chất

điểm hoặc có dạng cầu). Vật m muốn thoát khỏi sức hút của vật M thì phải có động năng lớn hơn thế năng

$$(14) \quad \frac{1}{2}mv^2 > \frac{GmM}{r},$$

trong đó v là tốc độ của vật m thoát ra theo phương xuyên tâm vật M . Với v cho trước, từ (14) suy ra vị trí gần M nhất mà m có thể thoát ra là

$$(15) \quad r_c = \frac{2GM}{v^2}.$$

Áp dụng công thức này cho ánh sáng (có tốc độ c)⁽⁵⁾ ta thu được r_S tại (12). Đây là bán kính của vị trí gần nguồn hấp dẫn nhất mà vật chất bên ngoài nó có thể thoát khỏi lực hấp dẫn của nguồn hấp dẫn (được coi là có hình cầu) kể cả khi vật chất chuyển động với tốc độ ánh sáng (là tốc độ cực đại mà vật chất có thể đạt được như đã nói phía trên và chỉ có những hạt có khối lượng bằng 0 mới có thể chuyển động với tốc độ ánh sáng).

Mặt cầu có phương trình $r = r_S$ được gọi là mặt "**chân trời sự kiện**" (*event horizon*) bởi không gì có thể thoát được ra ngoài, kể cả ánh sáng, từ phía trong mặt này, tức không gì phía trong mặt này có thể được nhìn thấy. Mặt chân trời sự kiện của một vật thể bình thường đều nằm sâu trong lòng nó (ví dụ như bán kính Schwarzschild của Mặt Trời và Trái Đất tương ứng là cỡ 3 km và 9 mm), nhưng khi vật thể có khối lượng đủ lớn nó sẽ sụp đổ vào trong (gọi là sụp đổ hấp dẫn - *gravitational collapse*) dưới sức nặng của chính nó nếu không có lực nào khác

⁽⁵⁾Ở thế kỷ 18 quan điểm ánh sáng là hạt đang rất được ưa chuộng.

chống lại được lực hấp dẫn như trường hợp các ngôi sao đã nguội (khi ngôi sao còn đủ nóng thì động năng vật chất đủ lớn để thắng lực hấp dẫn giữ cho ngôi sao không bị sụp xuống, tương tự như vung nổi nước đang sôi bị đẩy lên bởi hơi nước nóng). Khi vật thể (ngôi sao chẳng hạn) sụp đổ vào phía sau chân trời sự kiện thì về lý thuyết nó không còn có thể được nhìn thấy (trực tiếp) nữa - giống như là chiếc thuyền trên biển bơi ra xa và biến mất sau đường chân trời - vật thể đã trở thành **Hố Đen**.⁽⁶⁾

Quan sát nghiệm Schwarzschild ta thấy nó có 2 (loại) **kỳ dị** (*singularity*). Kỳ dị thứ nhất là (các điểm trên) mặt chân trời sự kiện $r = r_S$ và kỳ dị thứ hai là tại $r = 0$ (tâm của nguồn hấp dẫn đối xứng cầu). Trong khi kỳ dị thứ nhất thực chất là kỳ dị của hệ toạ độ (tồn tại một số hệ toạ độ khác trong đó kỳ dị này không xuất hiện), còn kỳ dị thứ hai là kỳ dị vật lý thực sự, hay **kỳ dị không-thời-gian** (*space-time singularity*), không thể biến mất trong bất cứ hệ toạ độ nào. Tuy kỳ dị thứ nhất có thể bị loại bỏ trong hệ toạ độ thích hợp chúng vẫn đóng vai trò là giới hạn giữa vùng không gian quan sát được và không quan sát được xung quanh hố đen: nếu ta cưỡi một con tàu tưởng tượng đi (hay rơi tự do) về phía hố đen ta thấy hành trình của ta vẫn liên tục khi cắt qua mặt chân trời sự kiện nhưng người ngoài sẽ thấy con tàu mất hút dần (trong khoảng thời gian dài vô tận) sau mặt chân trời sự kiện. Sau khi một vật thể vượt qua mặt chân trời sự kiện (khi đó g_{00} đổi dấu thành âm còn g_{rr} đổi dấu thành dương, chiều không gian biến thành chiều kiểu thời gian - tức trôi một chiều) nó tiến về

phía $r = 0$ một cách không đảo ngược được (xem minh hoạ ở Hình 2). Hay nói cách khác, việc hình thành hố đen là tất yếu khi đủ điều kiện (khi khối vật chất (đủ nặng) co lại sau mặt chân trời sự kiện thì nó chỉ có thể tiếp tục co về phía kỳ dị thật sự tại $r = 0$ mà không thể ngược lại). Như vậy, về mặt lý thuyết hố đen có thể hình thành trong điều kiện có đối xứng cầu, nhưng trong thực tế điều kiện toán học lý tưởng này không tồn tại (nếu có thì nhiều nhất nó chỉ ở dạng gần đúng) và đến đây một câu hỏi được đặt ra là vậy hố đen có thể tồn tại trong thực tế không? Một số người bao gồm bản thân Einstein chưa từng tin hố đen tồn tại trong thực tế, còn một số người khác hy vọng ngược lại và nghiên cứu tích cực về hố đen nhưng phải mất nửa thế kỷ cho tới lúc Roger Penrose trả lời trọn vẹn câu hỏi trên.

Trong công trình [9] công bố năm 1965 và đoạt giải Nobel năm 2020, Penrose đã nghiên cứu sự sụp đổ hấp dẫn trong điều kiện tổng quát hơn và khẳng định (định lý kỳ dị) rằng hố đen vẫn có thể hình thành khi không có đối xứng cầu mà chỉ đối xứng cầu gần đúng (sai lệch không quá nhiều khỏi đối xứng cầu là điều vẫn có thể trong thực tế). Nếu một phân bố vật chất (là một siêu mặt Cauchy - *Cauchy hypersurface* - theo điều kiện nhân quả vật lý), thoả mãn một số điều kiện [9], dưới áp lực hấp dẫn của chính mình co lại phía sau chân trời sự kiện ($r < r_S$) nó sẽ tiếp tục co lại một cách không đảo ngược được về phía kỳ dị thật sự $r = 0$ tại đó quỹ đạo (rơi tự do) của vật chất, kể cả ánh sáng, hội tụ và bị dừng đột ngột (dù tham số chính tắc của chúng vẫn hữu hạn) - có nghĩa là chúng không hoàn

⁽⁶⁾Ta lưu ý rằng không phải bất cứ vật thể nào cũng có thể sụp đổ thành hố đen. Một vật thể không thể sụp đổ thành hố đen nếu không đủ nặng để đáp ứng điều kiện cần là khối lượng của nó phải vượt quá một giới hạn gọi là giới hạn TOV (*Tolman-Oppenheimer-Volkoff limit*), đôi khi còn gọi là giới hạn LTOV (*Landau-Tolman-Oppenheimer-Volkoff limit*). Theo các tính toán hiện nay giới hạn này bằng cỡ 3 lần khối lượng Mặt Trời [3].

chỉnh (*incomplete geodesic*) tức không-thời-gian kết thúc đột ngột.⁽⁷⁾ Sụp đổ hấp dẫn hướng tới kỳ dị nơi không-thời-gian có độ cong lớn vô hạn và hố đen được hình thành không thể tránh khỏi. Để chặt chẽ hơn, trước khi kết thúc bài viết ta lưu ý rằng mặt chân trời sự kiện là một mặt có tính "ước lệ" do trong thực tế không thể xác định được mặt này tại thời điểm tùy ý và sự tồn tại của nó không có nghĩa là có một hố đen tương ứng tồn tại.⁽⁸⁾ Hố đen được định vị chính xác hơn bởi **chân trời thực tế** (*apparent horizon*) là biên ngoài cùng của các **mặt bẫy** (*trapped surface*) bao quanh hố đen (xem Hình 2). Mặt bẫy (khái niệm do Penrose đưa ra [9]) là một mặt không-gian khép kín 2 chiều (trong không-thời-gian 4 chiều) mà kể từ đó ngay cả các tia sáng (*null geodesic*) trực giao với nó đều hội tụ trong tương lai (về phía $r = 0$) - tình huống này, như nói ở trên, là sự không hoàn thiện trắc địa (*geodesic incompleteness*). Các mặt bẫy (và từ đó, chân trời thực tế), nếu tồn tại, đều nằm phía trong chân trời sự kiện ($t = \text{const.}, r_S > r = \text{const.}$). Để hình dung rõ hơn ý này ta lấy ví dụ các pháp tuyến trên mặt cầu S_2 trong không gian phẳng làm minh họa: mặt cầu có hai loại pháp tuyến, nhưng chỉ các pháp tuyến hướng vào trong là hội tụ, còn các pháp tuyến hướng ra ngoài không hội tụ. Khi đặt mặt cầu trong trường hấp dẫn có nguồn nằm bên trong quả cầu, chẳng hạn, ở tâm của nó, các tia sáng phát theo phương pháp tuyến hướng ra ngoài có thể bị bẻ cong nhưng vẫn không hội tụ nếu

trường hấp dẫn không đủ mạnh. Sự tồn tại chân trời sự kiện không có nghĩa là hố đen tồn tại nhưng bề mặt bẫy hình thành thì sự hình thành của kỳ dị không-thời-gian, và từ đó là sự hình thành hố đen, sẽ xảy ra.⁽⁹⁾

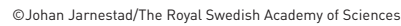
Định lý kỳ dị [9] (và các công trình liên quan của Penrose) được đánh giá là bước đột phá nhất về Lý thuyết tương đối tổng quát kể từ khi lý thuyết này được khai sinh năm 1915 và đã mở ra kỷ nguyên mới của vật lý thiên văn và vũ trụ học. Nó chứng minh rằng sụp đổ hấp dẫn tới hố đen có thể xảy ra kể cả khi không có điều kiện đối xứng (cầu) lý tưởng. Sau công trình [9], R. Penrose, S. Hawking và nhiều người khác đã tiếp tục phát triển nghiên cứu kỳ dị không-thời-gian và hố đen (ban đầu, như trình bày ở trên, là nghiên cứu hố đen tĩnh trung hoà, rồi mở rộng cho cả hố đen tự xoay hoặc/và có điện tích). Đặc biệt, Hawking đã áp dụng ý tưởng này cho toàn Vũ Trụ và cho rằng Vũ Trụ xuất phát từ một kỳ dị ban đầu (kiểu *Big Bang*). Các quan sát thực tế (hiện tượng *quasar*, bắt sóng hấp dẫn từ va chạm hố đen của LIGO/Virgo [1], "ảnh" hố đen của EHT [4], các quan sát và đo đạc quỹ đạo của sao S2 quanh Sgr A* ở trung tâm dải Ngân Hà để chứng tỏ Sgr A* là một hố đen siêu nặng (*supermassive black hole*) bởi các nhóm nghiên cứu của Reinhard Genzel [5] và Andrea Ghez [11, 6], những người chia sẻ giải Nobel với Penrose, v.v...) đã cho thấy hố đen thực sự tồn tại chứ không chỉ là một mô hình toán học lý tưởng.

⁽⁷⁾Để minh họa hiện tượng này ta có thể lấy ví dụ các đường sinh của mặt nón là những đường thẳng trên mặt nón kết thúc tại đỉnh của nó. Xét theo phương trình (hay tham số) của chúng thì các đường này có thể tiếp tục mãi chứ không dừng lại tại đỉnh nón là nơi không gian mặt nón kết thúc.

⁽⁸⁾Bất cứ một vị trí nào trong Vũ Trụ bao gồm cả vị trí ta đang đứng cũng có xác suất nằm gần hay trên mặt chân trời sự kiện của phân bố vật chất nào đó nhưng không nhất thiết là hố đen, cụ thể hơn, mặt chân trời sự kiện không luôn luôn là mặt giới hạn của một hố đen hay thậm chí không nhất định phía trong nó có hố đen.

⁽⁹⁾Tuy nhiên, những cơ chế hình thành hố đen khác không bị loại trừ.

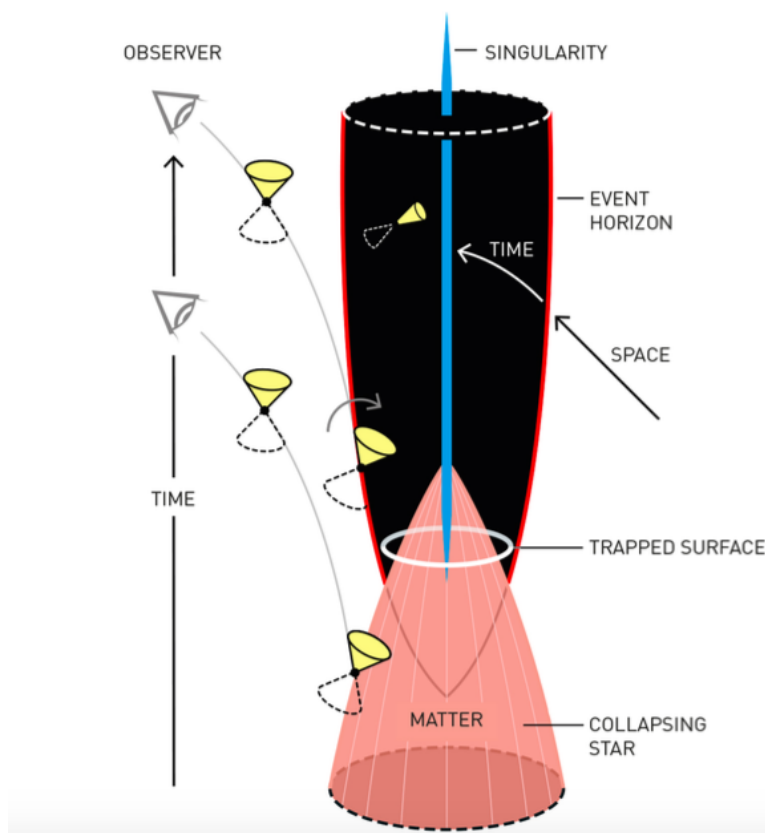
When a massive star collapses under its own gravity, it forms a black hole that is so heavy that it captures everything that passes its event horizon. Not even light can escape. At the event horizon, time replaces space and points only forward. The flow of time carries everything towards a singularity furthest inside the black hole, where density is infinite and time ends.



HÌNH 1. Sơ đồ về sự hình thành của hố đen [nguồn: <https://www.nobelprize.org>.]

TÀI LIỆU

- [2] G. D. Birkhoff, "*Relativity and modern physics*", Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press (1923).
- [3] I. Bombaci, "*The maximum mass of a neutron star*", *Astronomy and Astrophysics*, **305**, 871 (1996).
- [4] S. Doeleman [on behalf of the EHT collaboration] (April 2019). "*Focus on the first Event*"



HÌNH 2. Mặt bẫy trong sơ đồ hình thành hố đen [nguồn: <https://www.nobelprize.org>.]

- Horizon Telescope results*", The Astrophysical Journal Letters, **875**, no 1, April 10, 2019.
- [5] R. Genzel, F. Eisenhauer, and S. Gillessen, "The Galactic Center massive black hole and nuclear star cluster", Rev. Mod. Phys. **82**, 3121 (2010).
- [6] A. M. Ghez et al., "Measuring distance and properties of the Milky Way's central supermassive black hole with stellar orbits", Astrophysical Journal. **689**, 1044–1062 (2008). arXiv:0808.2870.
- [7] Nguyễn Anh Kỳ, Phạm Văn Kỳ and Nguyễn Thị Hồng Vân, "Perturbative solutions of the $f(R)$ -theory of gravity in a central gravitational field and some applications", Euro. Phys. J. C **78**, 539 (2018).
- [8] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, "The classical theory of fields", vol. 2, Elsevier, Oxford, 1994.
- [9] R. Penrose, "Gravitational collapse and space-time singularities", Phys. Rev. Lett. **14**, 57 (1965).
- [10] Rainer K. Sachs and Hung-Hsi Wu, "General relativity for mathematicians", Springer-Verlag, New York 1977.
- [11] R. Schödel et al., "A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the Milky Way", Nature **419**, 694 (2002).
- [12] K. Schwarzschild, "On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory", Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1916**, 189-196 (1916). Giới thiệu và bản dịch tiếng Anh của S. Antoci và A. Loinger: arXiv:physics/9905030 [physics.hist-ph].
- [13] S. Weinberg, "Gravitation and cosmology: Principle and applications of the general theory of relativity", John Wiley & Son, New York, 1972.

Giáo sư Việt Nam ngành Toán qua 40 năm công nhận II. Đội ngũ Phó giáo sư

Lê Tuấn Hoa⁽¹⁾

Thân tặng các nhà toán học trẻ

Bài viết này là phần tiếp theo của Bài [2], đề cập đến đội ngũ phó giáo sư – lực lượng kế cận đang trên con đường tiến tới được công nhận chức danh khoa học cao nhất. Đương nhiên đó là nói tới trào lưu chung. Một số phó giáo sư là những nhà toán học xuất sắc và nay đã lớn tuổi, nhưng vì lý do này hay khác, đã không đăng ký công nhận chức danh giáo sư. Đặc biệt, một số ít trong số đó đáp ứng tất cả các tiêu chuẩn bắt buộc nhưng không đăng ký xét chức danh giáo sư, vì họ thấy không cần thiết mất thời gian cho việc đó, mà dành công sức cho việc nghiên cứu Toán. Do vậy, khi xét tới thành tựu nghiên cứu của một nhà toán học, chúng ta cần hết sức tránh đánh giá kiểu sơ sài bằng việc chỉ lướt qua học vị, học hàm hay số lượng công bố của người đó, mà không đi sâu vào xem xét công trình cụ thể của họ. Nói thì dễ, nhưng thực tế làm được thì rất khó, vì cần có kiến thức, tầm nhìn, và thậm chí cả thời gian để đọc và đánh giá! Vì vậy, cho dù rất cố gắng, người viết bài này cũng vẫn phạm phải sai lầm là chỉ đi vào các con số!

1. SỐ LƯỢNG

Số lượng phó giáo sư tất nhiên đông đảo hơn số giáo sư. Sau đây là bức tranh tổng thể của việc công nhận chức danh giáo sư, phó giáo sư ngành Toán cũng như trong tương quan với ngành khác trong suốt 40 năm qua. Chú ý rằng do một số năm đầu ngành Toán còn ghép

với một số ngành khác (xem [2]), nên có thể có một vài sai khác nhỏ (đặc biệt trong phần Phụ lục), tùy theo quan niệm của người làm thống kê. Lý do, một vài người được công nhận làm việc trong lĩnh vực khác (chẳng hạn, giảng dạy về Toán, hay Toán điều khiển), nhưng trong [1] có người nhận là PGS về Toán, có người lại nhận về ngành khác.

Danh sách chi tiết tên tất cả những người được công nhận chức danh phó giáo sư cùng với tên cơ quan khi được công nhận được nêu tại các Bảng 6,7,8,9 ở phần Phụ lục. Tuy tổng số được công nhận phó giáo sư ngành Toán là 372, nhưng 75 trong số đó sau này được công nhận là giáo sư ngành Toán. Một số ít nữa sau đó cũng được công nhận là giáo sư, nhưng không phải ngành Toán. Vì không có số liệu chính xác, nên tôi không thống kê đầy đủ những trường hợp như vậy. Tính chung, đến đầu năm 2021, có tất cả 297 người có chức danh phó giáo sư, nhưng không là giáo sư. Tổng số người có chức danh giáo sư hoặc phó giáo sư là **391**. Như vậy tỷ lệ GS/GS+PGS ngành Toán trong tất cả 40 năm qua là $94/391 = 24,1\%$; trong khi toàn bộ các ngành tỷ lệ này là khoảng 15% (không thể tính chính xác từ bảng thống kê trên vì có một số giáo sư được công nhận thẳng (không qua phó giáo sư). Điều này cũng phù hợp với nhận xét chung là ở Việt Nam, nghiên cứu Toán học, đặc biệt là công bố quốc tế, phát triển hơn các ngành khoa học khác.

⁽¹⁾Viện Toán học, Viện HLKHCN Việt Nam. Email: lthoa@math.ac.vn

BẢNG 1. Số lượng giáo sư, phó giáo sư được công nhận đến năm 2020

Các đợt công nhận (phong)	Giáo sư		Phó giáo sư	
	Tất cả các ngành	Ngành Toán	Tất cả các ngành	Ngành Toán
Trước 1980	29	2	Không phong	
1980	83	6	347	20
1984	117	8	898	58
1986 (bổ sung)	6	0	9	0
1988 (bổ sung)	14	0	87	0
1989 (bổ sung)	2	0	0	0
1991	247	12	835	35
1992	134	10	625	26
1996 (1 đợt chính thức + 1 đợt bổ sung)	214	9	779	29
2002 (xét bảo lưu 1997)	96	3	391	8
2002	111	6	542	23
2003	61	5	388	18
2004	37	2	301	14
2005	41	1	312	11
2006	44	2	411	11
2007	54	6	445	13
2009	65	3	641	9
2010	71	1	507	8
2011	34	3	374	10
2012	42	2	427	5
2013	57	1	514	6
2014	59	2	585	7
2015	52	1	470	5
2016	65	0	638	7
2017 (2 đợt, đều ký vào 2018)	83	1	1101	15
2019 (1 đợt chính + 1 đợt bổ sung)	74	5	453	21
2020	39	3	300	13
Tổng cộng	1931	94	12380	372

Theo suy đoán của tôi, Việt Nam ta có khoảng 1200 tiến sĩ toán học. Như vậy, khoảng 8% được công nhận chức danh giáo sư và khoảng 30% được công nhận chức danh phó giáo sư. Đây là một con số khá cao nếu so với các nước. Có thể giải thích là ở nước ta, tỷ lệ người có bằng tiến sĩ không theo con đường khoa học là khá ít nếu so với các nước công nghiệp.

Thế nhưng, nếu làm thống kê về tỷ lệ số người có học hàm so với tổng số tiến sĩ (hay thậm chí toàn bộ giảng viên) Toán

tại các trường đại học của Việt Nam thì tỷ lệ chắc chắn thấp hơn nhiều so với các nước tiên tiến trên thế giới. Lý do là giảng viên Toán ở các nước như Châu Âu hay Mỹ, những nơi có hệ thống học hàm 2 cấp PGS – GS, thì sau một số ít năm làm việc muốn có biên chế cố định, thường phải có chức danh phó giáo sư trở lên. Chú ý rằng một số nước như Đức hay Pháp không có chức danh phó giáo sư, mà chỉ có chức danh giáo sư (nhưng được chia thành một số mức – mà một số người khi

dịch cứ qui đổi sai thành phó giáo sư và giáo sư).

2. ĐỘ TUỔI KHI ĐƯỢC CÔNG NHẬN CHỨC DANH PHÓ GIÁO SƯ

Trong số 372 người được công nhận chức danh phó giáo sư, tôi chỉ có số liệu của 356 người và việc thống kê và phân tích sẽ được tiến hành trên danh sách 356 người này. Tuổi bình quân của những người này khi được công nhận chức danh phó giáo sư là 45,7. Xin nhắc lại rằng tuổi bình quân của những người được công nhận chức danh giáo sư tính đến đầu năm 2020 là 51,7 (xem [2]). Nếu tính cả đợt phong 2020 thì độ tuổi bình quân sẽ thấp hơn chút ít, là 51,4. Như vậy theo tuổi bình quân thì người được công nhận chức danh giáo sư già hơn phó giáo sư chưa đến 6 tuổi – trong khi thực tế thời gian trung bình để phân đấu của những người thực sự đã được công nhận chức danh giáo sư là 7-8 năm (xem Hình 4 ở Mục 3).

Người trẻ nhất khi được công nhận là PGS Phạm Hoàng Hiệp, 29 tuổi vào năm 2011. Tiếp theo là các phó giáo sư Lê Anh Vinh (30 tuổi, năm 2013), Ngô Việt Trung (31 tuổi, năm 1984) và Lý Kim Hà (31 tuổi, năm 2019). Không có gì lạ khi ba người đầu sau đó cũng nhanh chóng trở thành giáo sư, ở các độ tuổi tương ứng là: 35, 37, 38. Người già nhất khi được công nhận chức danh phó giáo sư có tuổi là 62. Như vậy, khi bắt đầu được công nhận, các phó giáo sư dàn trải ở 34 độ tuổi, và tập trung nhất trong khoảng 36 - 55 tuổi. Độ tuổi chín nhất là 46 - 50.

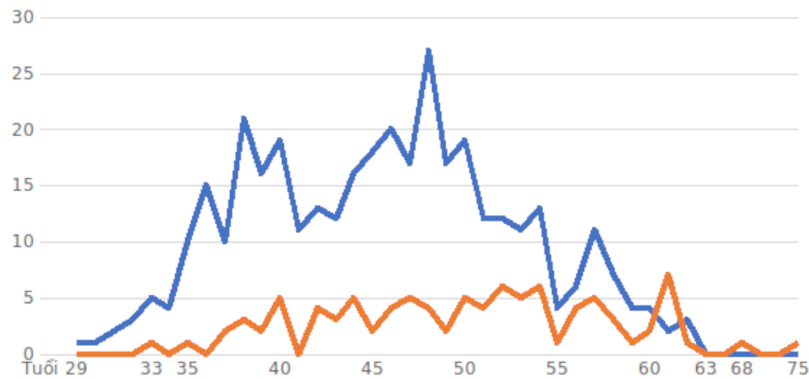
Bảng 2 cho chúng ta thấy phân bố các độ tuổi khi được công nhận chức danh phó giáo sư.

Hình 1 cho ta một cái nhìn trực giác phân bố chi tiết số PGS của Bảng 2 và số GS, tính theo độ tuổi khi được công nhận.

Đồ thị trong Hình 2 cho chúng ta thấy độ tuổi bình quân của những người được công nhận chức danh phó giáo sư trong các năm xét. Nhìn vào đồ thị ta thấy quãng từ 1980 tới 2009, con số khá ổn định, chung quanh khoảng 49 tuổi. Từ năm 2010, tuổi bình quân khi được công nhận phó giáo sư có xu hướng giảm xuống, nhưng chưa thật sự bền vững. Từ năm 2017 thì đường đồ thị đã xuống dưới 40 tuổi và hy vọng sẽ được duy trì. Lý do của việc kéo tuổi bình quân xuống là sự thúc đẩy nghiên cứu thông qua sự tài trợ của Quỹ nghiên cứu khoa học NAFOS-TED, của Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển Toán học giai đoạn 2010 – 2020 và các chính sách khuyến khích nghiên cứu của các trường đại học và viện nghiên cứu. Thêm vào đó là sự trưởng thành trong việc hướng dẫn nghiên cứu của các lớp đàn anh. Nhờ sự phối hợp của nhiều biện pháp khác nhau, cán bộ trẻ có điều kiện tốt hơn về vật chất, thời gian và môi trường làm việc để bắt tay vào nghiên cứu sớm, có khi ngay từ bậc đại học. Cũng phải nói thêm là trong hơn 10 năm vừa qua, các tiêu chuẩn về công nhận chức danh PGS, GS đã có một số thay đổi, với xu hướng đề cao hơn công bố quốc tế, đặc biệt là công bố ở các tạp chí có uy tín. Ngành Toán vốn là một trong ít ngành đi đầu trong hướng này, nên đó là lợi thế cho các ứng viên trẻ.

BẢNG 2. Độ tuổi khi được công nhận PGS

Độ tuổi	29-35	36-40	41-45	46-50	51-55	Trên 56
Số người (và con số chi tiết của từng độ tuổi)	26 (1/1/2/3/ /5/4/10)	71 (15/10/21 16/9)	70 (11/13/12/ 16/18)	100 (20/17/27/ 17/19)	52 (12/12/11 13/4)	37 (6/11/7 /4/4/2/3)



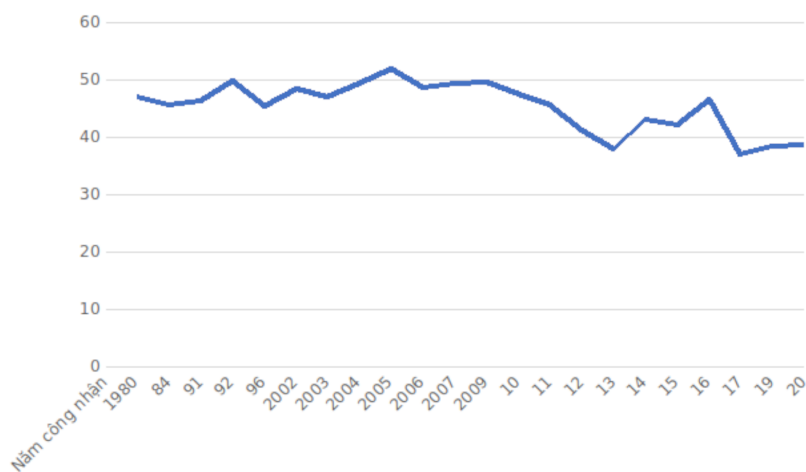
HÌNH 1. Số PGS và GS theo tuổi, đồ thị cao hơn ứng với các PGS

Trong số các nhà toán học có học hàm từ phó giáo sư trở lên, có 106 người (kể cả nam lẫn nữ) không quá 60 tuổi. Kể cả 7 năm gia hạn thì có thêm 32 giáo sư và 131 phó giáo sư, tổng cộng 163 người. Ngoài ra còn có 7 giáo sư trong độ tuổi 68-70. Tuy nhiên, có một số không gia hạn công tác và một số ít nữa không may đã qua đời, nên trên thực tế có không quá 150 người đang công tác. Tuyệt đại đa số trong số đó đang trực tiếp giảng dạy đại học (kể cả những người làm việc ở các viện nghiên cứu). Con số này là quá ít ỏi so với hệ thống trường đại học ở Việt Nam. Nó hoàn toàn trái ngược (ít nhất là trong ngành Toán) với nhận định thuần

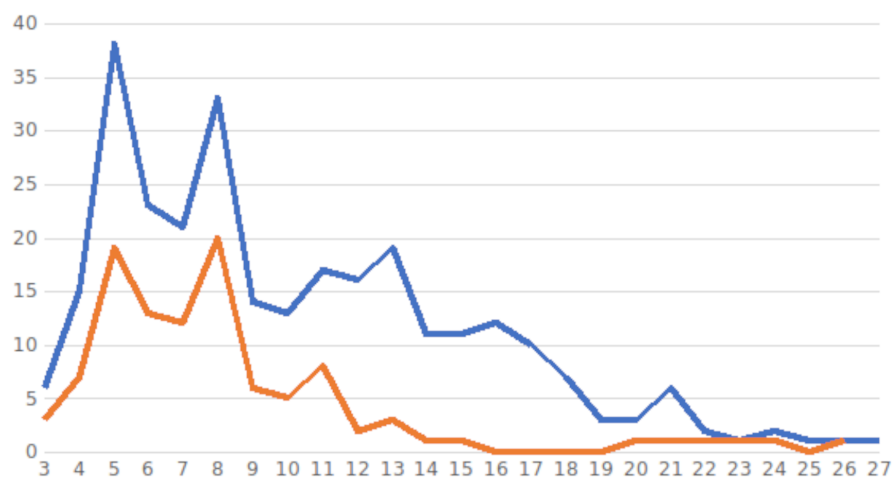
túy cảm tính một số người là Việt Nam lạm phát phó giáo sư, giáo sư!

3. THỜI GIAN THĂNG TIẾN

Thời kì đầu, một số rất ít không có học vị tiến sĩ vẫn được công nhận chức danh phó giáo sư, thậm chí là giáo sư. Đương nhiên sau khi đã được công nhận chức danh thì không cần thiết bảo vệ tiến sĩ nữa. Tuy nhiên ít nhất có một người không nghĩ như vậy! Mười lăm năm sau khi được công nhận chức danh phó giáo sư, ông vẫn bảo vệ tiến sĩ! Thế mới gọi là độc đáo Toán học! Có lẽ từ năm 1991 thì yêu cầu có học vị tiến sĩ là bắt buộc.



HÌNH 2. Tuổi bình quân khi công nhận PGS

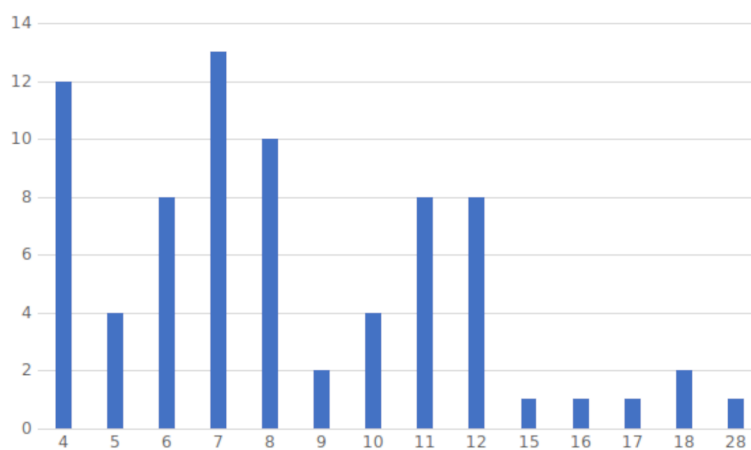


HÌNH 3. Số PGS tính theo thời gian sau khi bảo vệ TS,
đồ thị trên lấy theo toàn bộ các PGS, đồ thị dưới
theo các PGS được phong từ 2009 đến 2020

Vậy loại trừ trường hợp cực biên đó, thì bao lâu sau khi bảo vệ tiến sĩ (tức phó tiến sĩ trước đây) một người sẽ được công nhận chức danh phó giáo sư? Việc tìm cho được các năm bảo vệ tiến sĩ không hề đơn giản. Trong số 372 người nêu ở các Bảng 6–9, sau rất nhiều nỗ lực, tôi chỉ tìm được của 276 người và làm thống kê trên số lượng người này. Theo đó, người nhanh nhất cần 3 năm sau khi bảo vệ tiến sĩ thì được công nhận chức danh phó giáo sư (6 người), và người chờ đợi lâu nhất cần tới 27 năm (1 người). Trung bình, cần 10,5 năm sau khi bảo vệ tiến sĩ mới được công nhận chức danh phó giáo sư. Nếu trừ đi 8 người cực chậm (cần từ 22 năm trở lên), thì con số trung bình sẽ phản ánh chính xác hơn, và số đó là 9,6 năm. Tính riêng 106 người được công nhận phó giáo sư từ năm 2009 đến 2020 – có số liệu đầy đủ - thì số năm bình quân là 8,2 năm – không bớt đi nhiều. Trong số 106 người cuối cùng này, có 3 người chỉ cần 3 năm, còn người lâu nhất vẫn cần tới 26 năm (1

người). Sự chênh lệch nhỏ này là tương đối đáng ngạc nhiên, vì việc công nhận chức danh thời gian đầu bị ngắt quãng, trong khi 20 năm cuối được tiến hành đều đặn, hầu như hàng năm. Hai đường cong ở Hình 3 cho ta một bức tranh tổng thể, cho thấy từ trước tới nay, số năm từ khi bảo vệ tiến sĩ tới phó giáo sư phần nhiều quay quanh từ 5-9 năm – một thời gian không quá lâu để phấn đấu!

Điều quan tâm tiếp theo là khoảng thời gian mà một người được công nhận là phó giáo sư phấn đấu tiếp để được nhận chức danh giáo sư. Dù rằng thời kỳ đầu (năm 1980 đến 2002), việc xét công nhận chức danh không liên tục, ít nhiều ảnh hưởng đến việc công nhận chức danh của một số cán bộ xuất sắc; nhưng vì yêu cầu khoảng cách thời gian tối thiểu giữa hai chức danh là 3 năm, sự ngắt quãng của thời kỳ đầu không ảnh hưởng lắm đến việc thăng tiến này. Tất nhiên ở đây chỉ xét đến 75 giáo sư từng có chức danh phó giáo sư.



HÌNH 4. Số PGS thăng tiến lên GS tính theo số năm từ khi công nhận PGS

Hình 4 cho ta thấy số lượng giáo sư được công nhận tính theo số năm từ khi được công nhận chức danh phó giáo sư. Tính đến thời điểm hiện tại, thời gian thăng tiến kỷ lục là 4 năm, mặc dù về lý thuyết với trường hợp “bình thường” thời gian đó có thể là 3 năm. Số năm hay xảy ra nhất để từ phó giáo sư lên giáo sư là: 7, 4, 8, 6, 11, 12. Lâu nhất là 28 năm (1 người), nói lên sự bền bỉ phần đầu của ông. Thời gian trung bình là 8,5 năm. Nếu trừ đi 6 trường hợp tương đối lâu, thì trung bình là 7,4 năm. Như vậy 7-8 năm là quãng thời gian thông thường để một người nghiên cứu Toán có năng lực phần đầu tiếp để được công nhận chức danh giáo sư sau khi đạt được chức danh đầu tiên. Đây cũng là thời gian khả dĩ, để một bạn trẻ nhìn vào phần đầu. Trong nghiên cứu, không thể làm việc cầm chừng mà lại hy vọng tiền xa. Tuy vậy, cũng không nên quá sốt ruột! Trong nghiên cứu không phải lúc nào kết quả cũng ra đều đều. Và quan trọng hơn là phải làm sao xứng đáng với chức danh khoa học cao nhất

được nhà nước trao – một điều chỉ có thể đạt được nhờ vào chất lượng nghiên cứu.

Bảng 3 cho ta thấy sự thành đạt của các lớp phó giáo sư theo năm công nhận, theo nghĩa có bao nhiêu phó giáo sư sẽ được công nhận chức danh giáo sư. Căn cứ vào thống kê nêu trên thì con số này chỉ phản ánh tương đối chính xác cho các đợt phó giáo sư được công nhận từ khoảng 2010 trở về trước, vì nhiều người mới được gần đây còn chưa kịp “chín”. Qua bảng này ta thấy thành công nhất là lớp được công nhận vào hai năm 1980 và 2013, hơn gấp rưỡi so với bình quân 30% nêu ở trên. Đặc biệt năm 2013 có rất ít người được công nhận phó giáo sư. Rõ ràng chất hơn lượng! Nhưng hãy chú ý: Với lớp đàn anh năm 1980 (và với nhiều người thì họ là các thầy) nếu cộng thêm 6 người được phong thăng giáo sư thì tỷ lệ sẽ là 61,5%, cao tuyệt đối. Người ta thường nói: “hậu sinh khả ứ”, nhưng chưa biết bao giờ lớp trẻ mới theo kịp lớp thầy đầu tiên (còn lớp trung niên thì hết cơ hội rồi)!

BẢNG 3. Tỷ lệ số PGS sau đó được công nhận GS

Năm công nhận PGS	Số sau là GS /số PGS	Tỷ lệ
1980	10/20	50%
1984	16/58	28%
1991	9/35	25,7%
1992	5/26	19,2%
1996	12/29	41,4%
2002	8/31	25,8%
2003	5/18	27,8%
2004	0/14	0 %
2005	1/11	9,1%
2006	1/11	9,1%
2007	1/13	7,7%
2010	1/8	12,5%
2011	1/10	10%
2012	2/5	40%
2013	3/6	50%

4. TỶ LỆ THÀNH CÔNG

Từ khi bắt đầu phong/công nhận chức danh phó giáo sư, giáo sư năm 1980 tới nay, cho dù có nhiều thay đổi về các tiêu chuẩn cụ thể, tên gọi các bước xét duyệt khác nhau, nhưng tựu trung vẫn gồm 3 bước: xét (hoặc đề xuất) từ cấp cơ sở, xét duyệt tại hội đồng ngành, và cuối cùng là Hội đồng cấp Nhà nước. Trong tất cả các ngành thì ứng viên đều cho rằng lần xét ở hội đồng ngành là khó khăn và gay gắt. Điều này được cho là đặc biệt đúng đối với ngành Toán, mặc dù trải qua năm tháng, thành viên của các hội đồng đã thay đổi rất nhiều. Tuy nhiên, Bảng 4 dưới đây cho thấy sự thực không đến mức quá khắt khe như nhiều người vẫn tưởng. Nếu biết được tỷ lệ cạnh tranh

(trượt) khi đăng ký một chân PGS/GS ở các nước tiên tiến, chúng ta sẽ thấy tỷ lệ thành công của các ứng viên khi đăng ký công nhận chức danh là khá cao. Một trong những lý do là trước khi đăng ký, ứng viên phải xem xét kỹ các tiêu chuẩn của từng đợt xét. Nhưng cũng phải lưu ý là, trong các tiêu chuẩn thì tiêu chuẩn đạt đủ phiếu tín nhiệm là khó nhất. Mà để làm được điều đó, thì hồ sơ mới ở mức vừa đạt sẽ rất khó thuyết phục được người bỏ phiếu. Ở các trường đại học tại các nước tiên tiến, chỉ có một tiêu chuẩn duy nhất là phiếu tín nhiệm của hội đồng tuyển dụng! Có thể từng hội đồng sẽ có một định hướng hay chỉ dẫn nhất định, nhưng không rõ có ai sưu tầm được một bộ tiêu chuẩn công khai như ở nước ta không?

BẢNG 4. Tỷ lệ GS/PGS được công nhận so với số ứng viên

Năm phong	GS được công nhận /số ứng viên GS	PGS được công nhận /số ứng viên PGS
2009	3/4=75%	9/13=69,2%
2010	1/5=20%	8/11=72,5%
2011	3/5=60%	10/13=76,9%
2012	2/3=66,7%	5/8=62,5%
2013	1/2=50%	6/7=85,7%
2014	2/3=66,7%	7/12=58,3%
2015	1/3=33%	5/12=41,7%
2016	0/1=0%	7/8=87,5%
2017	1/3=33%	15/21=71,4%
2019	5/8=62,5%	21/26=80,8%
2020	3/5=60%	13/16=81,2%

Trong Bảng 4 ở trên chỉ giới hạn 11 lần xét cuối, khi tác giả là thành viên của Hội đồng ngành, và nhờ vậy mới có số liệu. Nhìn vào bảng, có thể thấy trừ một vài lần đặc biệt, tỷ lệ ứng viên phó giáo sư thành công là khoảng 70%. Tỷ lệ đối với ứng viên giáo sư đương nhiên thấp hơn, chiếm khoảng 50%. Đây là cơ sở để các ứng viên tiềm năng tự tin đăng ký, một

khi đã đáp ứng khá tốt các tiêu chuẩn qui định.

Chú ý rằng tuy chưa thể nói đã xem xét thật kỹ lưỡng tất cả các công trình của ứng viên, nhưng Hội đồng ngành Toán luôn coi trọng vấn đề chất lượng công bố. Điều này ngày càng trở nên cần thiết, khi không hiểu bằng những tiểu xảo nào, một số tác giả trên thế giới – đặc biệt là

những nơi có chính sách đếm bài – có thể đăng bài một cách khá dễ dàng. Thậm chí trong một số trường hợp cực đoan, họ đăng được rất nhiều, mà phần lớn bài báo lại được in trên những tạp chí chấp nhận được. Đương nhiên, trong những trường hợp như vậy, khi bị “soi” kỹ, thì sẽ lộ ra hàng loạt điểm yếu về nội dung. Lúc đó, dù cho có số điểm công trình vượt trội, số phiếu tín nhiệm thường rất thấp, khá xa so với mức cần đạt. Tuy không thường

xuyên, nhưng tại Hội đồng ngành Toán đã xảy ra một số lần như vậy.

Để kết thúc bài này, tôi chỉ có một điều tâm sự với các bạn trẻ là hãy kiên trì nghiên cứu, chú ý tới chất lượng công bố. Làm được điều đó, các bạn không những sớm và chắc chắn đạt được ước mơ của mình là sẽ nhận được chức danh khoa học xứng đáng, mà còn cảm nhận được những niềm vui – dù là nho nhỏ – khi tìm ra được một ý tưởng hay một kết quả thú vị.

BẢNG 5. Danh sách giáo sư được công nhận không qua PGS
(dấu + chỉ người nay đã quá cố)

Năm	Họ và tên
Trước 1980	Tạ Quang Bửu+, Lê Văn Thiêm+ (đặc cách)
1980	Đặng Đình Áng+ (ĐHTH Tp HCM); Phan Đình Diệu+ (Viện Tính Toán và Điều Khiển), Hoàng Xuân Sính (ĐHSP HN), Nguyễn Cảnh Toàn+ (ĐHSP HN), Hoàng Tụy+ (Viện Toán học), Nguyễn Ngọc Trân (ĐHTH Tp HCM)
1984	Nguyễn Hữu Anh (ĐHTH Tp HCM), Nguyễn Xuân Lộc (Viện Tính Toán và Điều Khiển), Nguyễn Đình Ngọc+ (Bộ Công An)
1991	Đinh Dũng (Viện CNTT), Nguyễn Văn Khuê (ĐHSP HN), Đào Trọng Thi (ĐHTH HN), Trần Đức Vân+ (Viện Toán học)
1992	Trần Văn Nhung (ĐHTH HN), Nguyễn Văn Thu (Viện Toán học)
2005	Ngô Bảo Châu (ĐH Paris 11)
2009	Vũ Hà Văn (ĐH UC San Diego)

Lời cảm ơn. Khi viết bài này và bài [2], khó khăn lớn nhất đối với tôi là tìm được tài liệu đầy đủ và chính xác. Điều này sẽ không bao giờ trở thành hiện thực, nếu như không có sự giúp đỡ của Văn phòng Hội đồng Giáo sư Nhà nước nhiệm kỳ 2019 – 2024, đặc biệt là chị Lê Thị Hồng, người đã thực hiện ý kiến của PGS. Trần Anh Tuấn sao chụp cho tôi tất cả các quyết định công nhận chức danh GS/PGS ngành Toán của tất cả các năm. GS.TSKH. Trần Văn Nhung, Tổng thư kí Hội đồng chức danh giáo sư Nhà nước hai nhiệm kỳ 2008 – 2017, đã đọc bản thảo và đóng góp ý kiến.

TÀI LIỆU

- [1] Phó Giáo sư Việt Nam, Tập I (1980-1991), NXB Khoa học xã hội, Hà Nội 2007.
- [2] L. T. Hoa, Giáo sư Việt Nam ngành Toán qua 40 năm công nhận, Thông tin Toán học, Tập 24, số 1 (2020), 1-10.
- [3] Các quyết định công nhận GS/PGS và danh sách của ngành Toán.
- [4] Thông tin Toán học, các năm từ 1997 - 2019.

Phụ lục: Danh sách tất cả các phó giáo sư Toán được công nhận đến năm 2020

Dưới đây, đánh dấu + là những người tôi biết đã mất; cơ quan ở đây là cơ quan khi được công nhận chức danh; ?: không rõ cơ quan.

BẢNG 6. Danh sách tất cả các phó giáo sư Toán được công nhận đến năm 2020 (phần 1)

Đợt	Tổng số	Danh sách
1980	20	Hoàng Chúng+ (ĐHSP TP HCM và Báo TH&TT), Phan Đức Chính+ (ĐHTH HN), Đinh Nho Chương (ĐHSP HN), Kim Cương, Nguyễn Đình Điện (?), Tạ Văn Đĩnh+ (ĐHBK HN; GS 1991), Hoàng Hữu Đường+ (ĐHTH HN; GS 1984), Lê Hữu Hạnh+ (ĐHSP HN), Trần Văn Hạo (ĐHSP Vinh), Trần Vinh Hiến (Viện Toán), Phạm Văn Hoàn+ (Viện KHGD), Nguyễn Thừa Hợp+ (ĐHTH HN; GS 1991), Nguyễn Lãm (Cục KH-CN và MT, Bộ QP; GS 1992), Ngô Thúc Lan+ (ĐHSP HN; GS 1984), Hoàng Hữu Như+ (ĐHTH HN; GS 1992), Đoàn Quỳnh (ĐHTH HN; GS 1984), Phạm Hữu Sách (Viện Toán; GS 1984), Phạm Ngọc Thao (ĐHTH HN; GS 1992), Lại Đức Thịnh+ (ĐHSP HN), Nguyễn Đình Trí (ĐHBK HN; GS 1984), Nguyễn Bắc Vãn (ĐHTH HN)
1984	58	Phạm Văn Ất (Viện Kinh Tế Vận Tải – Bộ GT Vận tải), Trần Anh Bảo (ĐHSP HN), Nguyễn Cang (ĐHTH TP HCM; GS 1992), Trần Ngọc Chương (ĐHTH Huế), Văn Như Cương+ (ĐHSP HN), Bùi Công Cường (Viện Toán), Nguyễn Minh Chương (Viện Toán; GS 1992), Phan Văn Chương+ (Viện Toán), Bùi Quang Diệu (Học viện KTQS), Hoàng Đình Dung+ (1939, Viện Toán), Phan Tăng Đa (ĐHBK HN), Nguyễn Dịch (UB Kế hoạch NN), Phạm Gia Đức (ĐHSP Việt Bắc), Nguyễn Văn Gia (Viện Toán), Trần Xuân Hãn (ĐHSP Vinh), Nguyễn Văn Hộ (ĐHBK HN), Nguyễn Sĩ Hồng (?), Đinh Văn Huỳnh (Viện Toán; GS 1991), Nguyễn Văn Hữu (ĐHTH HN; GS 2002), Nguyễn Quý Hỷ (ĐHTH HN; GS 1996), Lê Minh Khanh (ĐHTH HN), Phan Quốc Khánh (Học viện KTQS; GS 1992), Vũ Tấn Khiêm (?), Trịnh Quang Khuynh (Vụ HTQT – VAST), Hà Huy Khoái (Viện Toán; GS 1991), Hoàng Kỳ+ (ĐHSP Vinh), Lê Ngọc Lăng (ĐH Mỏ - Địa Chất; GS 1991), Nguyễn Xuân Liêm (ĐHSP HN), Trần Gia Lịch+ (Viện Toán), Đoàn Kim Luân (ĐH Công nghiệp TN), Ngô Văn Lược+ (Viện Toán; GS 1991), Huỳnh Mùi (ĐHTH HN), Nguyễn Hữu Ngự (ĐHTH HN), Ngô Thành Phong (ĐHTH TP HCM), Lê Thiện Phổ (Viện TTĐK), Nguyễn Khắc Phúc (?), Phạm Ngọc Phúc (Học viện KTQS), Nguyễn Tử Qua (TT Tính Toán UB KHNN), Nguyễn Hồ Quỳnh (ĐHBK HN), Ngô Xuân Sơn+ (ĐHSP HN), Hoàng Văn Tảo (Học viện KTQS), Đỗ Hồng Tấn+ (Viện Toán), Nguyễn Thủy Thanh (ĐHTH HN), Phan Đức Thành (ĐHSP Vinh), Hoàng Văn Thân (?), Nguyễn Quốc Thi+ (ĐHSP Vinh; GS 2002), Lê Đình Thịnh+ (ĐHTH HN), Trần Vũ Thiệu (Viện Toán học; GS 1992), Nguyễn Duy Tiến+ (ĐHTH HN; GS 1991), Trần Thúc Trình (Viện KHGD), Ngô Việt Trung (Viện Toán; GS 1991), Nguyễn Trường (ĐHTH HN), Lý Hoàng Tú (?), Trần Mạnh Tuấn (Viện Toán; GS 1992), Vũ Tuấn (ĐHSP HN; GS 1996), Nguyễn Tường (?), Đỗ Long Vãn (Viện Toán; GS 1996)
1991	35	Nguyễn Năng Anh (ĐH Thủy lợi HN), Hồ Tú Bảo (Viện TT ĐK, GS JAIST – Nhật Bản), Trần Hữu Bổng (ĐHSP TP HCM), Trần Lưu Chương (UB Khoa Học NN), Đỗ Ngọc Diệp (Viện Toán; GS 1996), Đặng Hữu Đạo (Viện TTĐK), Phạm Huy Điển (Viện Toán), Nguyễn Hữu Đức+ (ĐH Đà Lạt), Nguyễn Thế Hoàn+ (ĐHTH HN; GS 2002), Doãn Tam Hòe (ĐH XD HN), Đào Hữu Hồ (ĐHTH HN), Lê Văn Hốt (ĐH KT TP HCM), Trần Trọng Huệ (ĐHTH HN), Nguyễn Hữu Việt Hưng (ĐHTH HN; GS 2002), Nguyễn Mộng Hy (ĐHSP TP HCM), Phan Huy Khải (Viện Toán), Đỗ Công Khanh (ĐHBK TP HCM; GS 2003), Nguyễn Trọng Khâm (ĐHSP TP HCM), Hoàng Văn Lai (Viện TTĐK), Đỗ Văn Lưu (Viện Toán học; GS 2019), Đinh Quang Lưu+ (Viện Toán), Phạm Thế Long (Học viện KTQS; GS 1996), Nguyễn Văn Mậu (ĐHTH HN; GS 1996), Nguyễn Đức Nghĩa + (1954, ĐHBK HN), Hà Tiến Ngoan (Viện Toán), Hoàng Đức Nguyên (ĐHTH HN), Nguyễn Đăng Phát + (ĐHSP HN), Nguyễn Đình Quyết (ĐHSP HN), Đặng Huy Nhuận (ĐHTH HN, GS Tin học 2003), Nguyễn Khoa Sơn (Viện Toán; GS 1996), Đặng Hùng Thắng (ĐHTH HN; GS 2007), Vũ Dương Thụy (ĐHSP HN), Võ Đức Tôn+ (ĐHTH HN), Bùi Minh Trí (ĐHBK HN), Lê Trọng Vinh (ĐHBK HN)

BẢNG 7. Danh sách tất cả các phó giáo sư Toán được công nhận đến năm 2020 (phần 2)

Đợt	Tổng số	Danh sách
1992	26	Phạm Trà Ân (Viện Toán), Đinh Xuân Bá (ĐHBK HN), Trần Quốc Chiến (ĐHBK Đà Nẵng), Vũ Viết Đào (ĐHXD Hà Nội), Dương Minh Đức (ĐHTH Tp HCM; GS 2007), Trần Xuân Hiến (ĐHBK HN), Tạ Quang Hải (ĐHSP Vinh), Phan Văn Hạp (ĐHTH HN; GS 1996), Nguyễn Xuân Huy (Viện Tin học), Lê Thiên Hương (CĐSP Thanh Hóa), Nguyễn Phụ Hy (ĐHSP HN2), Đặng Văn Khải (ĐHBK HN), Đặng Đức Kim (Ban Cơ yếu TU), Đỗ Xuân Lôi (ĐHBK HN), Vũ Ngọc Phát (Viện Toán; GS 2002), Hoàng Xuân Phú (Viện Toán; GS 1996), Nguyễn Đình Sang (ĐHTH HN), Thái Thanh Sơn (ĐHBK HN), Lê Hùng Sơn (ĐHBK HN; GS 2002), Lê Văn Thành+ (Viện Toán), Võ Đăng Thảo (ĐHBK Tp HCM), Nguyễn Quốc Toàn (ĐHTH HN), Bùi Tường Trí (ĐHSP Tp HCM), Lê Văn Trực (ĐHTH HN), Tô Cẩm Tú (Viện QH Thiết kế NN), Nguyễn Xuân Tuyển (ĐHSP Huế)
1996	29	Phạm Kỳ Anh (ĐH KHTN HN; GS 2002), Hà Huy Bảng (Viện Toán; GS 2003), Nguyễn Hữu Bảo (ĐH Thủy Lợi), Nguyễn Hữu Công+ (ĐHKHTN HN; GS 2002), Nguyễn Tự Cường (Viện Toán; GS 2003), Chu Đức (ĐHKHTN HN), Nguyễn Quý Dy (ĐHSP Vinh), Trần Ngọc Giao (ĐHSP Vinh), Lê Mậu Hải (ĐHSP HN; GS 2004), Trần Huy Hồ (ĐHKHTN HN), Lê Tuấn Hoa (Viện Toán; GS 2004), Phạm Văn Kiều (ĐHSP HN), Đinh Thế Lục (Viện Toán; GS 2002), Trần Thị Lệ (ĐHTH Tp HCM), Lê Dũng Mưu (Viện Toán; GS 2003), Nguyễn Văn Minh (ĐHKHTN HN, GS UALR - Mỹ), Nguyễn Tổ Như (Viện Toán, GS ĐH New Mexico – Mỹ), Nguyễn Nhựt (ĐHSP Vinh), Phạm Trọng Quát (ĐHKHTN HN), Bùi Thế Tâm (Viện Toán), Nguyễn Tiến Tài (ĐHSP HN), Nguyễn Xuân Tấn (Viện Toán; GS 2007), Đỗ Đức Thái (ĐHSP HN; GS 2003), Lê Văn Thuyết (ĐHSP Huế; GS 2007), Lê Quang Trung (ĐHSP HN), Vũ Kim Tuấn (Viện Toán, GS ĐH West Georgia – Mỹ), Cẩn Văn Tuất (ĐHSP HN), Hà Huy Vui (Viện Toán), Nguyễn Đông Yên (Viện Toán; GS 2007)
2002 (xét tiếp 1997)	8	Trần Văn Ân (ĐHSP Vinh), Nguyễn Đình Hóa (ĐHKHTN HN), Nguyễn Huy Lợi (ĐHSP HN2), Phạm Anh Minh+ (ĐHSP Huế), Lê Viết Ngự (ĐHSP Huế), Nguyễn Huỳnh Phán (ĐHSP Vinh), Ngô Đắc Tân (Viện Toán; GS 2006), Nguyễn Thanh Thủy (ĐHBK HN, GS Tin học 2010)
2002 (có 2 lần bổ sung)	23	Phạm Khắc Ban (ĐHSP HN), Nguyễn Văn Chân (ĐH KT quốc dân), Trần Việt Dũng (ĐHBK HN), Nguyễn Việt Dũng (Viện Toán), Nguyễn Hữu Dư (ĐHKHTN HN; GS 2006), Bùi Khởi Đàm (ĐHBK HN), Nguyễn Định (ĐHSP Tp HCM; GS 2019), Bùi Xuân Hải (ĐHKHTN tp HCM; GS 2014), Nguyễn Hoàng (ĐHSP Huế), Lê Hoàn Hóa (ĐHSP Tp HCM), Trần Lộc Hùng (ĐHKH Huế), Nguyễn Bích Huy (ĐHSP Tp HCM), Tạ Lê Lợi (ĐH Đà Lạt), Tạ Mân (ĐHSP HN), Mỵ Vinh Quang (ĐHSP Tp HCM), Nguyễn Văn Quảng (ĐHSP Vinh; GS 2013), Trần Hùng Thao (Viện Toán), Nguyễn Quốc Thắng (Viện Toán; GS 2010), Nguyễn Minh Tuấn (ĐHKHTN HN), Ngô Sĩ Tùng (ĐH Vinh), Dương Quốc Việt (ĐHBK HN), Nguyễn Mạnh Hùng (ĐHSP HN; GS 2011), Nguyễn Bường (Viện CNTT; GS 2009)
2003	18	Đặng Quang Á (Viện CNTT; GS 2012), Nguyễn Đình Công (Viện Toán; GS 2007), Trần Đạo Đồng (ĐHSP Huế), Lê Quốc Hán (ĐHSP Vinh), Đinh Nho Hào (Viện Toán; GS 2009), Đinh Huy Hoàng (ĐH Vinh), Lê Hải Khôi (Viện CNTT), Nguyễn Thiện Luận (HVKTQS), Trần Thị Huệ Nương (ĐHKHTN Tp HCM), Huỳnh Thế Phùng (ĐHKH Huế), Nguyễn Hữu Quang (ĐH Vinh), Đinh Ngọc Thanh (ĐHKHTN Tp HCM), Nguyễn Hải Thanh (ĐHNN1 HN), Nguyễn Xuân Thảo (ĐH Thủy Lợi), Phan Doãn Thoại (ĐHSP HN), Đặng Đức Trọng (ĐHKHTN Tp HCM; GS 2011), Nguyễn Minh Trí (Viện Toán; GS 2014), Tôn Thất Trí (ĐHKH Huế)

BẢNG 8. Danh sách tất cả các phó giáo sư Toán được công nhận đến năm 2020 (phần 3)

Đợt	Tổng số	Danh sách
2004	14	Đậu Thế Cấp (ĐHSP Tp HCM), Nguyễn Văn Châu (Viện Toán), Nguyễn Gia Định (ĐHKH Huế), Lê Văn Hạp+ (ĐHSP Huế), Nguyễn Đức Hiếu (HVKTQS), Phan Trung Huy+ (ĐHBK HN), Nguyễn Cảnh Lương (ĐHBK HN), Nguyễn Hội Nghĩa (ĐHQG Tp HCM), Nguyễn Đình Phư (ĐHKHTN Tp. HCM), Nguyễn Thành Quang (ĐH Vinh), Nguyễn Tiến Quang (ĐHSP HN), Thái Thuần Quang (ĐH Quy Nhơn), Hoàng Quốc Toàn (ĐHKHTN HN), Nguyễn Xuân Viên (HVKTQS)
2005	11	Nguyễn Đức Đạt (ĐHKHTN HN), Đoàn Thế Hiếu (ĐHSP Huế), Vũ Đình Hòa (ĐHSP HN), Nguyễn Đình Huy (ĐHBK Tp. HCM), Nguyễn Quý Khang (ĐHSP HN2), Vũ Văn Khương (ĐHGTVT), Võ Liên (ĐH Quy Nhơn), Lê Thị Thanh Nhân (Khoa KHTN Thái Nguyên; GS 2015), Trần Xuân Sinh (ĐH Vinh), Nguyễn Sum (ĐH Quy Nhơn), Nguyễn Doãn Tuấn (ĐHSP HN)
2006	11	Đặng Đình Châu (ĐHKHTN HN), Nông Quốc Chinh (Khoa KHTN Thái Nguyên), Tạ Khắc Cư (ĐH Vinh), Phạm Việt Đức (ĐHSP TN) Trương Xuân Đức Hà (Viện Toán), Phùng Hồ Hải (Viện Toán; GS 2012), Nguyễn Đức Minh (ĐH Quy Nhơn), Tống Đình Quỳ (ĐHBK HN), Nguyễn Anh Tuấn (ĐHSP Tp. HCM), Vũ Viết Yên+ (ĐHSP HN), Lê Anh Vũ (ĐHSP Tp. HCM)
2007	13	Tô Văn Ban (HVKTQS), Phạm Ngọc Bội (ĐH Vinh), Nguyễn Quang Diệu (ĐHSP HN; GS 2011), Nguyễn Văn Kính (ĐH Quy Nhơn), Vũ Hoàng Linh (ĐHKHTN HN), Lê Bá Long (HVBCVT), Nguyễn Vũ Lương (ĐHKHTN HN), Nguyễn Minh Mẫn (ĐH Mỏ-ĐC), Tạ Duy Phượng (Viện Toán), Phạm Tiến Sơn (ĐH Đà Lạt), Nguyễn Năng Tâm (ĐHSP HN2), Phan Viết Thư (ĐHKHTN HN), Nguyễn Chánh Tú (ĐHSP Huế)
2009	9	Phan Thành An (Viện Toán), Tạ Thị Hoài An (Viện Toán), Phạm Hiến Bằng (ĐHSP Thái Nguyên), Nguyễn Hữu Điển (ĐHKHTN HN), Đinh Thanh Đức (ĐH Quy Nhơn), Nguyễn Bạch Kim (ĐHBK HN), Nguyễn Bá Minh (ĐH Thương mại HN), Đàm Văn Nhị (ĐHSP HN), Phan Nhật Tính (ĐHKH Huế)
2010	8	Tô Anh Dũng (ĐHKHTN Tp HCM), Nguyễn Việt Hải (ĐH Hải Phòng), Đặng Khánh Hội (ĐH Hòa Bình), Nguyễn Thiệu Huy (ĐHBK HN), Hồ Đăng Phúc (Viện Toán), Mai Đức Thành (ĐH Quốc tế - ĐHQG Tp HCM), Nguyễn Văn Trào (ĐHSP HN), Trần Văn Tấn (ĐHSP HN; GS 2020)
2011	10	Phạm Ngọc Anh (HV CN Bưu chính VT), Nguyễn Sinh Bảy (ĐH Thương mại HN), Phan Thị Hà Dương (Viện Toán), Lê Minh Hà (ĐHKHTN HN), Phạm Hoàng Hiệp (ĐHSP HN; GS 2017), Lê Hồng Lan (1961, ĐHGTVT HN), Trần Tuấn Nam (ĐHSP Tp HCM), Khuất Văn Ninh (ĐHSP HN2), Phạm Hoàng Quân (ĐH Sài Gòn), Nguyễn Thành Văn (ĐHKHTN HN)
2012	5	Lâm Quốc Anh (ĐH Cần Thơ; GS 2020), Nguyễn Quang Huy (ĐHSP HN2), Vũ Thế Khôi (Viện Toán), Lê Thị Phương Ngọc (CĐSP Nha Trang), Phạm Hữu Anh Ngọc (ĐH Quốc tế - ĐHQG Tp HCM; GS 2019)
2013	6	Cung Thế Anh (ĐHSP HN; GS 2019), Phan Thanh Nam (ĐH Quy Nhơn), Huỳnh Văn Ngải (ĐH Quy Nhơn), Sĩ Đức Quang (ĐHSP HN; GS 2019), Phan Văn Thiện (ĐHSP Huế), Lê Anh Vinh (ĐH Giáo dục – ĐHQG HN; GS 2020)
2014	7	Nguyễn Thị Dung (ĐH Nông lâm- ĐH Thái Nguyên), Nguyễn Ngọc Hải (ĐHQT – ĐHQG Tp HCM), Lê Văn Hiện (ĐHSP HN), Trần Đình Kế (ĐHSP HN), Hà Trần Phương (ĐHSP Thái Nguyên), Lê Văn Thành (ĐH Vinh), Trịnh Tuấn (ĐH Điện lực)
2015	5	Kiều Phương Chi (ĐH Vinh), Lê Sĩ Đồng (ĐH Ngân Hàng), Cao Huy Linh (ĐHSP Huế), Nguyễn Công Minh (ĐHSP HN), Nguyễn Huy Tuấn (ĐHKHTN Tp HCM)
2016	7	Đinh Công Hường (ĐH Quy Nhơn), Nguyễn Hữu Khánh (ĐH Cần Thơ), Nguyễn Thị Hồng Loan (ĐH Vinh), Nguyễn Văn Quý (HV Tài Chính), Phó Đức Tài (ĐHKHTN HN), Nguyễn Thị Thu Thủy (ĐHKH – ĐH Thái Nguyên), Lê Xuân Trường (ĐH KT Tp HCM)

BẢNG 9. Danh sách tất cả các phó giáo sư Toán được công nhận đến năm 2020
(phần 4 và hết)

Đợt	Tổng số	Danh sách
2017	15	Nguyễn Thạc Dũng (ĐHKHTN HN), Nguyễn Văn Đức (ĐH Vinh), Nguyễn Văn Hoàng (ĐHSP TN), Nguyễn Minh Khoa (ĐH Điện Lực), Lương Đăng Kỳ (ĐH Quy Nhơn), Ngô Hoàng Long (ĐHSP HN), Hoàng Việt Long (ĐH KT Hậu cần CAND), Nguyễn Văn Lợi (1982 , HV Phụ nữ VN), Vũ Trọng Lưỡng (ĐH Tây Bắc), Phùng Văn Mạnh (ĐHSP HN), Phạm Hùng Quý (ĐH FPT), Trương Công Quỳnh (ĐHSP Đà Nẵng), Đoàn Thái Sơn (Viện Toán), Ninh Văn Thu (ĐHKHTN HN), Đỗ Đức Thuận (ĐHBK HN)
2019	21	Ngô Quốc Anh (ĐHKHTN HN), Nguyễn Lê Hoàng Anh (ĐHKHTN Tp HCM), Mai Hoàng Biên (ĐHKHTN Tp HCM), Đoàn Trung Cường (Viện Toán), Nguyễn Huy Chiêu (ĐH Vinh), Nguyễn Thanh Diệu (ĐH Vinh), Nguyễn Tiến Dũng (ĐHKHTN HN), Lý Kim Hà (ĐHKHTN Tp HCM), Nguyễn Đăng Hồ Hải (ĐHKH Huế), Nguyễn Xuân Hồng (ĐHSP HN), Vũ Nhật Huy (ĐHKHTN HN), Phan Quốc Hưng (ĐH Duy Tân), Trần Vũ Khanh (ĐH Tân Tạo), Nguyễn Thị Kim Sơn (ĐHSP Thủ Đức), Tạ Quang Sơn (ĐH Sài Gòn), Võ Văn Tài (ĐH Cần Thơ), Nguyễn Duy Tân (Viện Toán), Dương Anh Tuấn (ĐHSP HN), Lê Thanh Tùng (ĐH Cần Thơ), Lê Công Trình (ĐH Quy Nhơn), Hoàng Lê Trường (Viện Toán).
2020	13	Trần Nguyên An (ĐHSP Thái Nguyên), Phan Hoàng Chơn (ĐH Sài Gòn), Nguyễn Thành Chung (ĐH Quảng Bình), Phạm Thành Dương (ĐH Việt- Đức), Phạm Triều Dương (ĐHSP HN), Phạm Hoàng Hà (ĐHSP HN), Võ Hoàng Hưng (ĐH Sài Gòn), Nguyễn Trường Thanh (ĐH Mở - Địa chất), Phạm Đức Thoan (ĐH Xây dựng), Lê Quý Thường (ĐHKHTN, ĐHQG HN), Phạm Trọng Tiến (ĐHKHTN, ĐHQG HN), Lê Minh Triết (ĐH Sài Gòn), Nguyễn Văn Tuyên (ĐHSP HN2).



HÌNH 5. Hội đồng chức danh giáo sư ngành Toán, nhiệm kì 2014 - 2018

Phương pháp tán xạ ngược và áp dụng trong các phương trình khả tích phi tuyến

Phạm Lợi Vũ⁽¹⁾

Bài viết giới thiệu sách chuyên khảo có tiêu đề “Inverse Scattering Problems and Their Application to Nonlinear Integrable Equations”. Cuốn sách được nhà xuất bản CRC Press Taylor Francis Group công bố tháng 11 năm 2019 và đang được giới thiệu trên mạng⁽²⁾. Nội dung sách phản ánh kết quả giải bài toán ngược tán xạ và mở rộng việc áp dụng kết quả của bài toán ngược tán xạ để giải một lớp các phương trình truyền sóng phi tuyến. Phần 1 của bài viết giới thiệu kết quả nổi tiếng về phương pháp bài toán ngược tán xạ và áp dụng để giải phương trình sóng phi tuyến Korteweg-de Vries (KdV) trên toàn trục. Phần 2 đi vào giới thiệu nội dung cuốn sách chuyên khảo nói trên.

1. PHƯƠNG PHÁP BÀI TOÁN NGƯỢC TÁN XẠ

Phương pháp bài toán ngược tán xạ, tên tiếng Anh là Inverse Scattering Method (ISM) có lịch sử hình thành và phát triển dài hơn một nửa thế kỷ, tính từ năm 1967. Phương pháp được sử dụng để giải một lớp rộng rãi các phương trình đạo hàm riêng phi tuyến của Vật lý Toán có dạng tiến hóa

$$u_t = P(u, u_x, u_y, \dots)$$

với ẩn hàm $u = u(x, y, \dots, t)$. Ẩn hàm $u(x, y, \dots, t)$ mô tả một số đo vật lý phụ thuộc vào thời gian t và các biến không gian $x, y, \dots$. Các phương trình giải được

theo phương pháp này xuất hiện rộng khắp trong cơ học thủy khí, lý thuyết trường lượng tử, vật lý plasma, quang học phi tuyến, v.v. Năm 1967, nghiệm của phương trình đạo hàm riêng Korteweg-de Vries (KdV) với biến không gian x biến thiên trên toàn trục $[-\infty, \infty]$, được xây dựng từ kết quả của bài toán ngược tán xạ đối với phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 Schrödinger. Kết quả này của Gardner, Greene, Kruskal và Miura mang tính đột phá và được đánh giá là một trong những phát minh đẹp nhất của Vật lý Toán thế kỷ 20. Theo phương pháp này, phương trình KdV với hàm ẩn u được viết lại hình thức dưới dạng một phương trình toán tử: $L' = [L, A]$, được gọi là phương trình Lax, trong đó toán tử L là toán tử vi phân tuyến tính cấp 2 Schrödinger. Toán tử này được sử dụng trong bài toán tán xạ của cơ học lượng tử. Toán tử A cũng là một toán tử vi phân tuyến tính để xác định quy luật tiến hóa theo thời gian t của toán tử L . Cặp toán tử L và A được gọi là cặp Lax. Phương pháp bài toán ngược tán xạ đã xây dựng thành công lời giải của bài toán Cauchy đối với phương trình KdV trên toàn trục. Xuất phát từ điều kiện ban đầu $u(x, 0)$ là giá trị của hàm $u(x, t)$ tại thời điểm $t = 0$, phương pháp ISM được thực hiện theo hai bước tính toán để tìm nghiệm $u(x, t)$ của phương trình KdV trên toàn trục theo sơ đồ sau đây:

$$u(x, 0) \longrightarrow s(0) \longrightarrow s(t) \longrightarrow u(x, t).$$

⁽¹⁾Email: phamloivu77@gmail.com

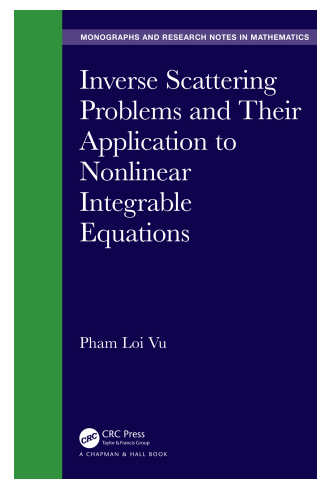
⁽²⁾<https://www.crcpress.com/Inverse-Scattering-Problems-and-Their-Application-to-Nonlinear-Integrable/Vu/p/book/9780367334895>

Trong sơ đồ này $u(x, 0)$ đóng vai trò thế năng của toán tử L tại thời điểm $t = 0$. Tập dữ liệu $s(0)$ tính được từ lời giải của bài toán giá trị riêng đối với phương trình Schrödinger với thế năng $u(x, 0)$ cho trước. Trong cơ học lượng tử, tập dữ liệu $s(0)$ được gọi là dữ liệu tán xạ, nó chứa các thông tin về phổ liên tục và phổ rời rạc của bài toán thuận. Nghiệm của bài toán thuận được biểu diễn thông qua toán tử biến đổi. Từ kết quả này chúng ta nhận được biểu thức quan hệ của thế năng $u(x, 0)$ với nhân của toán tử biến đổi. Việc phục hồi lại thế vị $u(x, 0)$ từ tập dữ liệu tán xạ $s(0)$ được gọi là bài toán tán xạ ngược và nó được thực hiện bằng việc giải một hệ phương trình tích phân cơ bản trong bài toán ngược. Ở đây tính giảm nhanh của hàm thế năng $u(x, 0)$ cần được thỏa mãn để sao cho cặp bài toán tán xạ có nghiệm duy nhất, thông thường hàm $u(x, t)$ giảm theo tốc độ lũy thừa. Nội dung tính toán của bước 1 bao gồm giải cặp bài toán tán xạ thuận và ngược ở thời điểm $t = 0$. Ở bước thứ 2, cặp toán tử L, A phải thỏa mãn đẳng thức tương thích Lax. Phương trình KdV tương đương với đẳng thức tương thích Lax, nghĩa là từ đẳng thức này ta suy ra phương trình KdV và ngược lại. Quy luật tiến hóa theo thời gian t của tập dữ liệu $s(t)$ được xác định bởi toán tử A . Tiếp theo là giải bài toán ngược để phục hồi $u(x, t)$ từ tập dữ liệu tán xạ $s(t)$. Nghiệm $u(x, t)$ của phương trình KdV tìm được từ nghiệm của phương trình tích phân cơ bản phụ thuộc thời gian t . Đây là nguồn gốc của

tên gọi phương pháp bài toán ngược tán xạ ISM.

2. BÀI TOÁN NGƯỢC TÁN XẠ VÀ MỞ RỘNG ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP BÀI TOÁN NGƯỢC TÁN XẠ (ISM)

Cuốn sách “Inverse Scattering Problems and Their Application to Nonlinear Integrable Equations” viết về các bài toán ngược tán xạ và áp dụng những kết quả về bài toán ngược tán xạ để giải một lớp các phương trình sóng phi tuyến. Nội dung cuốn sách là tập hợp các bài báo đã công bố của tác giả. Những bài báo này được trích dẫn và ghi ở phần Mở đầu của mỗi chương và trong phần Giới thiệu. Kết quả nghiên cứu được trình bày trong sách này có liên quan mật thiết với các kết quả viết trong những chuyên khảo nổi tiếng của Marchenko, Levitan, Nizhnik và Novikov–Manakov–Pitaevskii–Zakharov⁽³⁾.



⁽³⁾Xem S. Novikov, S.V. Manakov, L.P. Pitaevskii và V.E. Zakharov, *Theory of solitons. The inverse scattering method*. Translated from the Russian. Contemporary Soviet Mathematics. Consultants Bureau [Plenum], New York, 1984

⁽⁴⁾Xem A.S. Fokas and A.R. Its, *An initial-boundary value problem for the sine-Gordon equation in laboratory coordinates*. Teoret. Mat. Fiz. 92 (1992), no. 3, 387–403; reprinted in Theoret. and Math. Phys. 92 (1992), no. 3, 964–978 (1993), và A.S. Fokas and A.R. Its, *The linearization of the initial-boundary value problem of the nonlinear Schrödinger equation*. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 27 (3):738–764, 1996.

a. Các công trình nghiên cứu của Fokas và Its⁽⁴⁾ đã khẳng định rằng sơ đồ được mô tả trong phần 1 để tìm nghiệm của bài toán Cauchy đối với phương trình phi tuyến trên toàn trục rất khó áp dụng cho bài toán với biên không gian hữu hạn. Những bài toán biên này có ý nghĩa quan trọng về vật lý và toán học. Khó khăn ở chỗ tập dữ liệu tán xạ phụ thuộc vào những giá trị biên không gian không được biết trước. Chương 1 và 3 đã giải các bài toán ngược tán xạ đối với hệ hai phương trình vi phân cấp 1 trên nửa trục $0 \leq x < \infty$ cho nhiều trường hợp khác nhau với ma trận thế năng không tự liên hợp và giảm theo tốc độ của hàm mũ và cho trường hợp ma trận thế năng tự liên hợp và giảm theo tốc độ của hàm lũy thừa. Trong các chương 2, 3, 4, 6 và 7, tác giả sử dụng kết quả của các bài toán ngược tán xạ ở các Chương 1 và 3 để giải các bài toán biên và bài toán Cauchy đối với một lớp các phương trình phi tuyến trên nửa trục sau đây: phương trình phi tuyến Schrödinger đẩy và hút, phương trình phi tuyến bậc 3, modified KdV, sine-Gordon, sinh-Gordon. Sơ đồ giải những bài toán biên này gồm hai bước:

Bước 1: Bài toán tán xạ với ma trận thế năng $C(x)$ và biên tại $x = 0 \iff$ tập $s(0)$,

Bước 2: Cặp Lax và các điều kiện ban đầu và biên $\implies$ Phương trình tìm giá trị biên $\implies$ Tập dữ liệu $s(t) \implies$ Nghiệm $C(x, t)$ của phương trình cơ bản $\implies$ Nghiệm của bài toán biên đối với phương trình phi tuyến.

Định lý về điều kiện cần và đủ của tập dữ liệu tán xạ được thiết lập, do đó nghiệm của bài toán ngược là duy nhất, và mỗi tập $s(t)$ tương ứng với nghiệm duy nhất của bài toán biên đối với phương trình phi tuyến, và ngược lại.

Trong các Chương 2, 3, 4 và 6, nghiệm tường minh và nghiệm soliton của các phương trình phi tuyến liệt kê ở trên được trình bày trong lớp các hàm thế năng không tán xạ. Ở đây, định nghĩa của tác giả về thế năng không tán xạ tương tự như định nghĩa về thế năng không phản xạ đã viết trong các sách về soliton của các tác giả khác.

b. Phương trình Lax suy rộng được sử dụng để giải bài toán biên đối với phương trình phi tuyến nhiều chiều. Phương trình này được xây dựng từ n toán tử ($n > 2$) với các quan hệ ràng buộc khắt khe. Xây dựng phương trình Lax này và dẫn ra quy luật tiến hóa của dữ liệu tán xạ là những khó khăn gặp phải khi áp dụng phương pháp ISM. Trong Chương 8, bài toán ngược tán xạ đối với phương trình dây bị nhiễu loạn trên toàn trục đã được giải và bài toán biên đối với phương trình KdV hai chiều được giải bằng phương pháp ISM.

c. Bài toán thuận và ngược tán xạ đối với hệ n phương trình vi phân cấp 1 với $n > 2$ và đối với phương trình vận tải trên toàn trục đã được giải trong Chương 5. Toán tử tán xạ của các bài toán tán xạ đối với các phương trình này không thể được nhân tử hóa giải tích. Tính chất này cần thiết để chứng minh tính giải được duy nhất nghiệm của bài toán ngược. Khó khăn được khắc phục bằng việc đưa vào một toán tử trung gian có khả năng nhân tử hóa giải tích và thiết lập được các biểu thức quan hệ giữa toán tử trung gian này và toán tử tán xạ của bài toán tán xạ. Sử dụng kết quả về bài toán ngược tán xạ, tác giả đã dẫn ra được phương trình các sóng phi tuyến tương tác. Bài toán Cauchy đối với phương trình các sóng phi tuyến tương tác đã được giải bằng phương pháp ISM.

3. NHẬN XÉT KẾT LUẬN

(a) Các bài toán ngược tán xạ trong sách được giải trọn vẹn, đã mô phỏng đầy đủ tập các dữ liệu tán xạ, nghĩa là đã thiết lập được điều cần và đủ để cho các đại lượng cho trước là dữ liệu tán xạ đối với bài toán sinh ra bởi phương trình vi phân tuyến tính với thể năng giảm nhanh và thỏa mãn các điều kiện biên và ban đầu. Yêu cầu a./ được giải quyết là điều kiện tiên quyết để áp dụng có hiệu quả việc giải các bài toán biên và bài toán Cauchy đối với phương trình tiến hóa phi tuyến.

(b) Chương 9 so sánh phương pháp ISM được sử dụng trong sách với các phương pháp khác. Hai bước tính toán

của sơ đồ viết ở trên hoàn toàn nằm trong phương pháp ISM, trong khi đó theo Fokas, Habibullin và các giả khác thì bước 2 được thực hiện bằng cách dẫn về giải bài toán Riemann-Hilbert.

Cuốn sách là tài liệu tham khảo về Bài toán ngược và áp dụng giải các bài toán Cauchy và bài toán biên đối với phương trình phi tuyến. Nội dung sách được trình bày hệ thống, các Định lý và Bổ đề trong sách được chứng minh đầy đủ, diễn giải từng bước để sinh viên, học viên cao học có thể sử dụng. Tác giả cảm ơn Tiến sỹ Hà Tiến Ngoạn và Tiến sỹ Nguyễn Huy Hoàng đã đọc bản thảo bài viết và góp nhiều ý kiến hữu ích.

Chuyện giữa tiệt trà

Đối đồng điều Gödel-Tarski⁽¹⁾

Colin Adams⁽²⁾ và Steven G. Krantz⁽³⁾

Bạn đã bao giờ choàng tỉnh giữa đêm, mồ hôi lạnh toát sống lưng vì sợ toàn bộ bài báo dài hơi mới viết có thể sụp đổ vì một lỗi trong chứng minh Bổ đề 4.3.7? Bạn có e ngại rằng phần mềm kiểm tra chứng minh của Babai quá phức tạp để có thể sử dụng cho bài báo của mình? Bạn đã bao giờ mơ thấy giữa bài giảng mời mình trình bày ở Harvard, một huy chương Fields đứng phắt dậy, lắc đầu, và rời khỏi giảng đường?

Không sao hết, hãy yên tâm trở lại giường ngủ. Vâng, chúng tôi nói rằng bạn có thể bỏ thuốc ngủ qua một bên. Đã có

một lời giải cho vấn đề, một thần dược làm giãn mọi nếp nhăn trên trán bạn. Và còn gì ngạc nhiên hơn nữa, thần dược này đến từ chính các tiên đề Eilenberg-Steenrod!

Có lẽ bạn đã quen với việc các tiên đề hết sức cơ bản về đồng điều và đối đồng điều này khiến câu chuyện trong một bữa tối buồn tẻ bỗng trở nên sinh động. Không ít lần bạn đã dùng Eilenberg-Steenrod để tán gẫu trong chuyến đi dài đến một hội thảo. Và còn những lần viện đến các tiên đề này để vấn hồi một bài giảng giải tích tẻ ngắt.

⁽¹⁾Nguyên bản "The cohomology of proofs", đăng trên The Mathematical Intelligencer Vol. 28, No 3 (2006), 30–32. Tên gốc bài báo có lẽ là phép chơi chữ dựa trên "The cohomology of groups" (đối đồng điều của nhóm), một khái niệm toán học chặt chẽ.

⁽²⁾Williams College, Williamstown, MA 01267, USA. Email: cadam@williams.edu; colin.c.adams@williams.edu.

⁽³⁾Washington University in St. Louis, St. Louis, MO 63130, USA. Email: sk@math.wustl.edu

Nhưng hôm nay chúng ta sẽ nói về áp dụng của các tiên đề Eilenberg-Steenrod trong một lý thuyết mới mang tên Đối đồng điều Gödel-Tarski, hay Đối đồng điều của lập luận. Vâng, đối đồng điều Gödel-Tarski là một công cụ tuyệt vời để phát hiện lỗ hổng trong các chứng minh của bạn. Tin vui là lý thuyết này cho phép phát hiện lỗ hổng ở chiều bất kỳ! Đáng kinh ngạc hơn nữa, các toán tử đối đồng điều Steenrod cho phép ta tổ hợp nhiều lỗ hổng, dán các lỗ hổng với nhau, và thực hiện phẫu thuật trên lỗ hổng! Khó nói hết những gì có thể làm được nếu áp dụng thêm đối ngẫu Poincaré.

Lỗ hổng một chiều như tính nhằm một con tính đơn giản chẳng có gì lạ. Nhưng với lý thuyết đối đồng điều Gödel-Tarski, hay đối đồng điều lập luận, ta có thể phát hiện những lỗ hổng nhiều chiều trong các chứng minh, với chiều cao đến mức đánh bại mọi lý giải bằng khái niệm triết học hay hình ảnh của thế giới vật lý.

Sự thay đổi hệ hình này chi tiết là như thế nào? Câu trả lời hết sức giản dị. Ta hãy định nghĩa nhóm đối đồng điều Gödel-Tarski (G-T) thứ nhất. Trước hết, ta cần xác định tất cả những bước lập luận không đầu không cuối trong bài báo của bạn. Chúng lù lù xuất hiện, xây tổ, rồi chột tan biến. Đây là những đối xích. Một mô-đun con quan trọng của các đối xích là tập các đối biên: những lập luận lẫn lẩn. Đối biên thường dễ xác định vì chúng giống như những chuỗi lẩn nhảm. Bây giờ lấy thương của đối xích cho đối biên: Eureka! Đó chính là nhóm đối đồng điều G-T thứ nhất của bài báo. Các nhóm đối đồng điều G-T cao hơn liên quan đến những lập luận tự quy chiếu phức tạp hơn, và sẽ không được bàn đến trong phạm vi bài báo này. Điểm chính là từ các nhóm đối đồng điều G-T, ta có thể xây dựng toàn bộ đại số đối đồng điều của

bài báo bạn vừa viết. Trong trường hợp các nhóm đối đồng điều (và do đó đại số đối đồng điều tương ứng), là tầm thường, bạn có một bài báo không có lỗ hổng nào, một viên ngọc ngon lành. Nhưng ngay cả nếu bài báo của bạn có lỗ hổng to bằng núi Thái Sơn và không hy vọng gì đăng được ở kỷ yếu hội nghị khoa học "Tử vi đầu số và Cách mạng Công nghiệp 4.0", bạn vẫn có thể viết một bài báo khác tính toán nhóm đối đồng điều của bài báo đó, và gửi đăng trên tờ *Annals*.

Tất nhiên, áp dụng công cụ tô pô vào các tác phẩm toán học không phải là một ý tưởng mới. Để đơn giản hãy nói về niềm đam mê con số 8 của trường phái Pythagore. Đam mê ấy thực chất bắt nguồn từ kết quả phép tính số Betti Gödel-Tarski thứ nhất của chứng minh sai Pythagore từng đưa ra cho định lý mang tên ông. Ít người biết rằng môn đệ của Pythagore đã tìm ra đối đồng điều Gödel-Tarski nhưng không may công trình này bị lãng quên suốt hai nghìn năm sau đó (xem [Cangaloop]). Phát minh của họ đặc biệt ấn tượng nếu ta nhớ rằng phải đợi thêm 1900 năm sau lý thuyết mô-đun mới ra đời.

Nửa sau thế kỷ 19, nhiều nhà toán học đã nỗ lực để làm sáng tỏ tô pô của công trình toán học (xem [Gauss], [Möbius]). Khái niệm tập con mở liên thông của một bài báo, các metric tương thích với cấu trúc tô pô của một bài báo, và câu hỏi khi nào các metric này có tính cứng (rigid), đã được xem xét khá tường tận. Không ít sự nghiệp đã tan thành mây khói sau khi người ta phát hiện ra bài báo của khổ chủ có vô hạn thành phần liên thông đường. Nhưng phải đợi đến khi Weierstrass chứng minh rằng với mọi bài báo, một dãy các bản sửa đổi của bài báo đó có thể hội tụ đến một bản thảo cuối cùng, thì cộng đồng toán học mới nhất loạt bùng

tĩnh và chăm chú theo dõi lý thuyết tô pô của công trình toán học.

Một đỉnh cao phát triển của lý thuyết này là chứng minh đưa ra bởi Poincaré [Poincaré] năm 1897 cho kết quả: Tập tất cả các định lý là mở trong tô pô Công-bô-hay-là-chết. Kết quả đáng kinh ngạc ấy khai sinh một thời đại vàng trong toán học, mở đường cho lớp lớp các công trình dựa hơi, *me too* ào ạt ra đời. Tuy nhiên, kết quả của Poincaré cũng là thủ phạm khiến rất nhiều chuyên gia về tô pô của chứng minh bỏ nghề, bởi họ cho rằng mọi vấn đề đều đã bị tát cạn. Toàn bộ lý thuyết rơi vào thoái trào trong suốt hơn 100 năm.

Từ đó đến nay, tô pô học đã tiến bộ vượt bậc. Giờ đây ta có thể thoải mái nghiền cứu đại số đối đồng điều của một bài báo, khỏi cần bận tâm bài báo gốc sai đúng ra sao. Những cơ hội mới mở ra đến vô cùng.

Tuy nhiên, chúng tôi xin kết thúc công trình này với một cảnh báo. Hãy coi chừng cái thôi thúc sản xuất hàng loạt các bài báo từ một ý cón con bằng cách sử dụng đại số đối đồng điều G-T. Lao vào việc đó là một sai lầm chết người. Vì định lý ổn định Hilbert-Einstein nói rằng đại số đối đồng điều là ổn định tiệm cận: Nếu bài báo thứ $k + 1$ được viết ra để tính

cấu trúc đối đồng điều của lập luận trong bài báo thứ k , thì từ một $k = k_0$ đủ lớn trở đi, kết quả của các bài báo sẽ giống hệt nhau. Nhìn vào hiện trạng của thời gian xếp hàng chờ xuất bản⁽⁴⁾ ở các tạp chí toán học, định lý Hilbert-Einstein quả là một tin mừng cho tất cả chúng ta.

TÀI LIỆU

- [1] Adams, C.C., and Krantz, S.G., *The cohomological dimension of "The Cohomology of Proofs,"* Journal of Topological Proof Theory and its Ramifications, sắp xuất bản.
- [2] Adams, C.C., and Krantz, S.G., *The cohomological dimension of "The cohomological dimension of "The Cohomology of Proofs,"* Topology, sắp xuất bản.
- [3] Cangaloop, C.F., *Despair at the Pythagorean School: Who Lost the Cohomology?* Bulletin of the Topological Proof Theory Historical Society Vol. 227 (2003), 124-236.
- [4] Gauss, Karl Friedrich, *Disquisitiones De Operum Mathematicorum Geometria Situs,* Journal für Reine und Angewandte Mathematik 70 (1865), 116-148.
- [5] Möbius, A.F., *Über die Nicht-orientierbarkeit eines Artikels von Gauss,* Abhandlungen Sächsischer Gesellschaft der Wissenschaften, 1866.
- [6] Poincaré, J. Henri, *Méthodes nouvelles de la topologie des papiers mathématiques,* Bulletin Société Mathématique de France, Vol. 29(1897), 251-255.

Nguyễn Đăng Hợp phỏng dịch.

Tin tức hội viên và hoạt động toán học

* Chương trình trọng điểm quốc gia **phát triển toán học giai đoạn 2021-2030** vừa được chính phủ phê duyệt vào ngày 22/12/2020. Đây là kết quả của việc kết thúc thành công Chương trình phát triển toán học 2010-2020. Theo báo cáo tổng kết chương trình của PGS. Lê Minh Hà,

một trong những thành tựu xuất sắc nhất của chương trình 10 năm trước đó là đã xây dựng thành công Viện NCCCT với mô hình và quy chế tổ chức, hoạt động đặc thù. Sau khi thành lập được 3 năm, Viện đã được Hội Toán học châu Âu công nhận là “Trung tâm Toán học xuất sắc khu vực” giai đoạn 2013-2017 và tiếp tục được

⁽⁴⁾Backlog trong nguyên văn (ND).

công nhận trong giai đoạn 2019-2023. Đặc biệt, Chương trình giai đoạn 2010-2020 đã góp phần đưa Toán học Việt Nam từ vị trí 50-55 lên vị trí trong khoảng 35-40 trên thế giới, và đứng đầu ASEAN (xét trên tiêu chí số lượng công bố quốc tế).

Các mục tiêu cụ thể của chương trình 10 năm tiếp theo bao gồm: (1) Đến năm 2030, phần đầu có 05 cơ sở giáo dục đại học được xếp hạng trong top 500 của thế giới về lĩnh vực toán học; (2) tăng gấp đôi số lượng công bố quốc tế chất lượng so với giai đoạn 2010 - 2020; (3) tăng gấp đôi số lượt nhà khoa học nước ngoài đến làm việc, trao đổi và hợp tác khoa học; (4) phần đầu có ít nhất 05 hướng nghiên

cứu chủ đạo về Toán ứng dụng và Toán trong công nghiệp; (5) hỗ trợ, phối hợp và tham gia đào tạo khoảng 400 tiến sĩ ngành Toán, Toán ứng dụng và Thống kê; (6) đào tạo, bồi dưỡng khoảng 80% giảng viên, giáo viên Toán cốt cán của các cơ sở giáo dục đại học, trung học phổ thông đáp ứng yêu cầu đổi mới chương trình; và (7) xây dựng Hệ tri thức các khoa học về Toán trong Hệ tri thức Việt số hóa.

Cơ quan chủ trì Chương trình giai đoạn 2021-2030 là Bộ Giáo dục và Đào tạo, Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán là đơn vị thường trực điều phối thực hiện. (Theo Viện NCCC về Toán)



Ảnh tại lễ tổng kết Chương trình QGPT Toán học 2010-2020. Nguồn: VIASM.

* Ngày 16/10/2020, **Viện Toán học, Viện HLKHCN Việt Nam** đã tổ chức kỷ niệm 50 năm đi vào hoạt động. Viện Toán học được thành lập ngày 5/2/1969 theo Quyết định 25/CP của chính phủ. Viện chính thức đi vào hoạt động năm 1970, với quyết định của nhà nước bổ nhiệm GS. Lê Văn Thiêm làm phó Viện

trưởng Viện Toán học (khi đó chưa có Viện trưởng). Tại buổi lễ kỷ niệm 50 năm, thay mặt cán bộ và người lao động Viện Toán học, GS. Phùng Hồ Hải, Viện trưởng, đã tóm tắt quá trình hình thành và phát triển của Viện.

Trải qua nửa thế kỷ, Viện Toán học đã đạt được không ít thành tựu quan trọng. Về việc xây dựng đội ngũ cán bộ, Viện duy trì kiên trì tiêu chí chất lượng, xây dựng một môi trường học thuật chuyên nghiệp, tạo điều kiện làm việc tốt, và đảm bảo sự phát triển bền vững. Tính đến nay, Viện Toán học đã có 31 GS, 34 PGS, 39 TSKH và 88 TS. Về thành tích nghiên cứu khoa học, tính đến năm 2020, cán bộ Viện đã công bố trên 3500 công bố khoa học, với nhiều công bố trên những tạp chí uy tín nhất, hoàn thành 45 sách chuyên khảo, giáo trình xuất bản trong và ngoài nước. Không ít cán bộ Viện đã tham gia ban biên tập những tạp chí quốc tế uy tín. Về việc đào tạo, tính đến năm 2020 Viện Toán học đã đào tạo 176 Tiến sĩ, 7 Tiến sĩ khoa học, 522 Thạc sĩ và 134 thạc sĩ của chương trình cao học quốc tế (72 người trong số này tiếp tục học lên tiến sĩ). Về nội dung hợp tác quốc tế và hội nhập, Viện Toán học đã tổ chức nhiều hội nghị

hội thảo quốc tế có chất lượng, và ký kết nhiều thỏa thuận hợp tác đào tạo, nghiên cứu.

Thành tích hoạt động của Viện có thể nhìn thấy qua các khen thưởng đã được nhận. Có thể kể đến huân chương Lao động hạng Nhất (1990), huân chương Độc lập hạng Ba (2000) và hạng Nhì (2010). Giải thưởng Hồ Chí Minh về KH&CN đã được trao cho các giáo sư Lê Văn Thiêm và Hoàng Tụy (1996), tập thể các giáo sư Ngô Việt Trung, Nguyễn Tự Cường, và Lê Tuấn Hoa (2017). Giải thưởng Tạ Quang Bửu của Bộ Khoa học và Công nghệ đã được trao cho GS. Nguyễn Đông Yên và GS. Phạm Hoàng Hiệp (2015). Cán bộ nghiên cứu của Viện Toán học được trao một số giải thưởng quốc tế, như GS. Hoàng Tụy (giải Caratheodory, năm 2011), GS. Phạm Hoàng Hiệp (giải Ramanujan của ICTP, năm 2019), v.v.



Lễ kỷ niệm 50 năm Viện Toán học

* Thông tin về buổi **gặp mặt Đầu Xuân của Hội Toán học Việt Nam** tại Hà Nội: Theo truyền thống, Hội Toán học Việt

Nam tổ chức buổi gặp mặt Đầu Xuân và lễ trao giải thưởng Lê Văn Thiêm vào những tuần đầu năm sau kì nghỉ Tết Nguyên

đán. Tuy nhiên do diễn biến dịch bệnh Covid hiện nay, Ban chấp hành Hội THVN quyết định lùi thời gian tổ chức vào một thời gian thích hợp và sẽ có thông báo đến các hội viên sau (nếu tình hình cho phép).

* **Trụ sở của Hội Toán học Việt Nam** đã hoàn tất việc xây dựng. Khởi công từ 15/3/2019, trụ sở hội tại số 22 đường Văn Cao, Ba Đình, Hà Nội đã được hoàn thành vào tháng 12/2020.

* Do tình hình dịch Covid-19 trong nước diễn ra phức tạp vào đầu năm 2021 nên Ban tổ chức **Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên-Học sinh năm 2021** đã quyết định đổi lịch kỳ thi từ tháng 4/2021 sang lịch mới từ 10-15/5/2021. Kỳ thi dự kiến được tổ chức tại Trường Đại học Sư phạm – Đại học Huế. Thông tin chi tiết được Hội Toán học gửi đến các trường trong thông báo số 2.

* Ngày 5/12/2020, **Hội đồng Giáo sư Nhà nước** đã họp và thông qua danh sách ứng viên chức danh giáo sư, phó giáo sư năm 2020. Danh sách cụ thể như sau:

- Chức danh giáo sư: Lâm Quốc Anh (ĐH Cần Thơ), Trần Văn Tấn (ĐHSP Hà Nội), Lê Anh Vinh (Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam).
- Chức danh phó giáo sư: Trần Nguyên An (ĐHSP Thái Nguyên), Phan Hoàng Chơn (ĐH Sài Gòn), Nguyễn Thành Chung (ĐH Quảng Bình), Phạm Thành Dương (ĐH Việt Đức), Phạm Triều Dương (ĐHSP Hà Nội), Phạm Hoàng Hà (ĐHSP Hà Nội), Võ Hoàng Hưng (ĐH Sài Gòn), Nguyễn Trường Thanh (ĐH Mỏ - Địa chất), Phạm Đức Thoan (ĐH Xây dựng), Lê Quý Thường (ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội), Phạm Trọng Tiến (ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội), Lê Minh Triết (ĐH Sài Gòn), Nguyễn Văn Tuyên (ĐHSP Hà Nội 2).

* **Quỹ Đổi mới sáng tạo (VINIF)** của Viện nghiên cứu dữ liệu lớn (Tập đoàn VinGroup) đã thông báo các chương trình hợp tác, tài trợ của VINIF cho các giảng viên và nhà khoa học trong năm 2021. Tương tự như năm 2020, Quỹ có các chương trình tài trợ tài chính để thực hiện các dự án khoa học và công nghệ, tài trợ tổ chức các hội nghị, hội thảo, Chương trình Hợp tác đào tạo thạc sỹ và Chương trình Học bổng cho học viên cao học và nghiên cứu sinh. Trong năm 2021, Quỹ cũng triển khai thêm hai chương trình tài trợ gồm Học bổng sau tiến sỹ (postdoc) và các dự án lưu giữ các giá trị văn hoá, lịch sử. Một điểm mới được nhiều nhà khoa học trong nước quan tâm là việc mở rộng phạm vi tài trợ các dự án khoa học và công nghệ từ hướng ứng dụng sang cả các đề tài theo hướng cơ bản. Thông tin chi tiết xem tại <https://vinif.org>.

* Tin buồn: **GS. Nguyễn Duy Tiến**, sinh năm 1942, nguyên ủy viên Ban chấp hành Hội Toán học Việt Nam, nguyên Chủ nhiệm Khoa Toán – Cơ – Tin học, nguyên Chủ nhiệm Bộ môn Xác suất Thống kê Trường ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG HN (ĐH Tổng hợp Hà Nội); đã từ trần ngày 02/12/2020 (tức 18 tháng 10 năm Canh Tý), hưởng thọ 79 tuổi.



GS. Nguyễn Duy Tiến (1942–2020).

Vào học Khoa Toán ĐHTH Hà Nội năm 1961, bốn năm sau Nguyễn Duy Tiến tốt nghiệp xuất sắc và được giữ lại Khoa làm giảng viên. Năm 1971 ông được cử sang Liên xô làm NCS và năm 1974 Nguyễn Duy Tiến bảo vệ luận án TS tại Đại học Tbilisi (nay thuộc nước cộng hoà Gruzia). Trở về nước năm đó, ông công tác tại Bộ môn XS-TK, Khoa Toán ĐHTH Hà nội. Năm 1981, ông được cử sang Ba Lan làm thực tập sinh cao cấp và bảo vệ thành công luận án TSKH tại Viện Toán, Trường ĐHTH Wroclaw, vào năm 1983. Nguyễn Duy Tiến được phong học hàm PGS năm 1985 và GS năm 1991.

GS. Nguyễn Duy Tiến đã có nhiều đóng góp đáng ghi nhận cho việc phát triển lĩnh vực Lý thuyết xác suất ở Việt Nam. Ông là tác giả và đồng tác giả của gần 50 công trình khoa học được công bố trên các tạp chí có uy tín ở quốc gia và quốc tế. Các nghiên cứu có giá trị của ông liên quan tới Luật số lớn cho các dãy biến ngẫu nhiên và mảng các biến ngẫu

nhien nhận giá trị trong không gian Banach, Chuỗi ngẫu nhiên, Độ đo xác suất ổn định, Quan hệ giữa tính chất hình học và tính chất xác suất của không gian Banach, Các định lý giới hạn trong lý thuyết Martingale. Giáo sư là tác giả và đồng tác giả của 9 cuốn sách về Giải tích, Xác suất-Thống kê, Quá trình ngẫu nhiên và biên dịch một số cuốn sách Toán học kinh điển khác.

Một đặc điểm nổi bật ở GS. Nguyễn Duy Tiến là ông rất quan tâm bồi dưỡng, giúp đỡ và khuyến khích các tài năng toán học trẻ. Từ 1965, ông là một trong những người đầu tiên tham gia giảng dạy ở Khối Chuyên Toán A0 ĐHTH Hà Nội khi khối này mới thành lập. Ông là một trong những người đặt nền móng cho Hệ Cử nhân Khoa học Tài năng Trường ĐHKHTN và từng là Trưởng ban điều hành của hệ. Với những cống hiến bền bỉ cho giáo dục, GS. Nguyễn Duy Tiến đã được Nhà nước phong tặng danh hiệu Nhà giáo ưu tú năm 2006.

Tin thế giới

* **Đại hội Toán học Quốc tế (ICM) 2022** dự kiến sẽ diễn ra từ ngày 6 đến 14 tháng Bảy năm 2022, tại Saint Petersburg (Liên bang Nga). Ban tổ chức ICM 2022 mời các ứng viên nộp hồ sơ nhận tài trợ tham dự đại hội. Trong chương trình tài trợ, có học bổng Chebyshev cung cấp toàn bộ chi

phí tham dự cho 1000 ứng viên từ các nước đang phát triển theo định nghĩa của Liên đoàn Toán học Thế giới (IMU). Thời hạn nộp hồ sơ được khuyến khích là trước **31 tháng Ba năm 2021**. Thông tin chi tiết về học bổng Chebyshev và các tài trợ khác có trên trang icm2022.org/grants.

**Kính mời quý vị và các bạn đồng nghiệp
đăng kí tham gia Hội Toán học Việt Nam**

Hội Toán học Việt Nam được thành lập vào năm 1966. Mục đích của Hội là góp phần đẩy mạnh công tác giảng dạy, nghiên cứu, ứng dụng và phổ biến toán học. Tất cả những ai có tham gia giảng dạy, nghiên cứu, ứng dụng và phổ biến toán học đều có thể gia nhập Hội. Là hội viên, quý vị sẽ được tham gia cũng như được thông báo đầy đủ về các hoạt động của Hội, được đăng ký nhận miễn phí bản tin Thông tin Toán học, được mua một số ấn phẩm toán với giá ưu đãi. Để gia nhập Hội lần đầu tiên hoặc để đăng kí lại hội viên, quý vị cần điền và cắt gửi phiếu đăng ký dưới đây tới BCH Hội theo địa chỉ:

Chị Cao Ngọc Anh, Viện Toán Học, 18 Hoàng Quốc Việt, 10307 Hà Nội

Việc đóng hội phí có thể thực hiện theo tập thể hoặc từng cá nhân bằng một trong các hình thức sau:

1. Đóng trực tiếp hoặc gửi tiền qua bưu điện đến chị Cao Ngọc Anh theo địa chỉ trên.
2. Chuyển khoản tới tài khoản của Hội:

Tên tài khoản: Hội Toán học Việt Nam.

Số tài khoản: 0491000028899.

Ngân hàng TMCP Ngoại thương Việt Nam - Chi nhánh Thăng Long.

(Đề nghị thông báo cho chị Cao Ngọc Anh danh sách những hội viên đóng hội phí).

Thông tin về hội viên Hội Toán học Việt Nam cũng như tình hình đóng hội phí được cập nhật thường xuyên trên trang web của Hội.

BCH Hội Toán học Việt Nam

✂

Hội Toán Học Việt Nam Phiếu đăng kí hội viên	Hội phí năm 2021
1. Họ và tên:	Hội phí: 200 000 Đ ☐
2. Nam ☐ Nữ ☐	Acta Math. Vietnamica (*): 120 000 Đ ☐
3. Ngày sinh:	Vietnam J. Mathematics (*): 112 000 Đ ☐
4. Nơi sinh (huyện, tỉnh):	Tổng cộng:
5. Học vị (năm, nơi bảo vệ): Cử nhân: Thạc sỹ: Tiến sỹ: TSKH:	Hình thức đóng: ☐ Đóng tập thể theo cơ quan Tên cơ quan:
6. Học hàm (nơi được phong): PGS: GS:	☐ Đóng trực tiếp
7. Chuyên ngành:	☐ Chuyển khoản
8. Nơi công tác:	☐ Gửi bưu điện (Đề nghị gửi kèm bản chụp thư chuyển tiền)
9. Chức vụ hiện nay:	
10. Địa chỉ liên hệ: Email: Điện thoại: Ngày: Kí tên:	(*) Việc mua các tạp chí Acta Mathematica Vietnamica và Vietnam Journal of Mathematics là tự nguyện. Trên đây là giá ưu đãi dành cho hội viên Hội Toán học (gồm 4 số, kể cả bưu phí).

THÔNG TIN TOÁN HỌC, Tập 24 Số 4 (2020)

Phan Thành Nam và giải thưởng Hội Toán học châu Âu năm 2020	2
Ngô Quốc Anh và Trần Vũ Khanh	
Hồ đen – kỳ dị toán học hay thực thể vật lý	9
Nguyễn Anh Kỳ	
Giáo sư Việt Nam ngành Toán qua 40 năm công nhận II.	
Đội ngũ Phó giáo sư	18
Lê Tuấn Hoa	
Phương pháp tán xạ ngược và áp dụng trong	
phương trình khả tích phi tuyến	31
Phạm Lợi Vũ	
Đối đồng điều Gödel-Tarski	34
Colin Adams và Steven G. Krantz	
<i>Nguyễn Đăng Hợp phỏng dịch</i>	
Tin tức hội viên và hoạt động toán học	36
Tin thể giới	40