

Hội Toán Học Việt Nam



THÔNG TIN TOÁN HỌC

Tháng 9 Năm 2020

Tập 24 Số 3



THÔNG TIN TOÁN HỌC

Newsletter of the Vietnamese Mathematical Society

TỔNG BIÊN TẬP

ĐOÀN TRUNG CƯỜNG, Viện Toán học, Viện
HLKHCN Việt Nam (dtrucuong@math.ac.vn)

PHÓ TỔNG BIÊN TẬP

NGUYỄN THỊ LÊ HUƠNG, Hội Toán học Việt Nam
(ntlhuong@viasm.edu.vn)

THƯ KÝ

NGUYỄN ĐĂNG HỢP, Viện Toán học, Viện HLKHCN
Việt Nam (ngdhop@gmail.com)

BAN BIÊN TẬP

NGÔ QUỐC ANH, ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG
Hà Nội (bookworm_vn@yahoo.com)

PHAN THỊ HÀ DƯƠNG, Viện Toán học, Viện
HLKHCN Việt Nam (phanhaduong@math.ac.vn)

NGUYỄN ĐĂNG HỒ HẢI, ĐH Khoa học, ĐH Huế
(ndhohai@yahoo.com)

NGÔ HOÀNG LONG, ĐH Sư phạm Hà Nội
(ngolong@hnue.edu.vn)

ĐỖ ĐỨC THUẬN, ĐH Bách khoa Hà Nội
(ducthuank7@gmail.com)

NGUYỄN CHU GIA VƯỢNG, Viện Toán học, Viện
HLKHCN Việt Nam (ncgvuong@math.ac.vn)

Bìa 1. Giáo sư Hoàng Tụy tại Viện Toán học năm
2012. Ảnh: Viện Toán học.

THỂ LỆ GỬI BÀI

Bài viết bằng tiếng Việt. Tất cả các bài, thông tin về sinh hoạt toán học ở các khoa (bộ môn) toán, về hướng nghiên cứu hoặc trao đổi về phương pháp nghiên cứu và giảng dạy đều được hoan nghênh. Bản tin cũng nhận đăng các bài giới thiệu tiềm năng khoa học của các cơ sở cũng như các bài giới thiệu các nhà toán học.

Bài viết xin gửi về tòa soạn theo địa chỉ email của một trong các biên tập viên, hoặc địa chỉ bưu điện ở trên. Nếu bài được đánh máy tính, xin gửi kèm theo file với phông chữ unicode. Tòa soạn khuyến khích các tác giả sử dụng chương trình soạn thảo Latex và gói tiếng Việt vntex.

ĐỊA CHỈ BƯU ĐIỆN

Bản tin **Thông Tin Toán Học**,
Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học
và Công nghệ Việt Nam,
18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy,
10307 Hà Nội

© Hội Toán Học Việt Nam

BẢN ĐIỆN TỬ CỦA TẤT CẢ CÁC SỐ TẠP CHÍ
CÓ THỂ TRUY CẬP TỪ TRANG MẠNG CỦA
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM
www.vms.org.vn

Tưởng nhớ giáo sư Hoàng Tụy

Giáo sư Hoàng Tụy (1927–2019) là một trong những người thuộc thế hệ đầu tiên xây dựng nền toán học hiện đại của Việt Nam. Ông tham gia và ghi dấu trong tất cả những hoạt động then chốt để xây dựng nền toán học non trẻ ấy: xây dựng sách lược, nghiên cứu, giảng dạy, đào tạo, quản lý, hợp tác quốc tế. Công cuộc do thế hệ của ông khởi xướng vẫn đang được các thế hệ sau tiếp nối để xây dựng một nền toán học ở tầm quốc tế và hữu ích cho việc xây dựng, phát triển đất nước. Bản tin *Thông tin Toán học* trân trọng dành số báo này để tưởng nhớ ông.

Hoàng Tụy trước hết là một nhà toán học tài năng, một chuyên gia lớn về lý thuyết tối ưu. Phần lớn trong hơn 160 bài báo và 3 cuốn sách chuyên khảo tiếng Anh đã được ông hoàn thành trước khi các quỹ tài trợ nghiên cứu xuất hiện ở Việt Nam. Ông không dùng khoa học để làm giàu, hay thăng quan tiến chức. Bên cạnh hoạt động toán học thành công trải dài suốt 60 năm, ông còn tha thiết với sự nghiệp phát triển và hiện đại hóa giáo dục, văn hóa, kinh tế của đất nước mình. Giáo sư Hoàng Tụy được Đại học Linköping (Thụy Điển) trao bằng Tiến sĩ danh dự năm 1995. Tại buổi lễ nhận bằng, giáo sư Tụy đã phát biểu về mối tương tác đôi bên cùng có lợi giữa toán học và nhu cầu phát triển kinh tế, hai mối quan tâm lớn trong cuộc đời ông. Bài phát biểu này đã in trên *Vietnam Journal of Mathematics* năm 1995, được dịch và đăng lại trong số này.

Nhân ngày giỗ đầu của cố giáo sư Hoàng Tụy, tác giả Hoàng Dương Tuấn, một trong số bốn người con của giáo sư, kể lại những kỷ niệm về cha trong cuộc đời làm toán của mình. Không chỉ là một nhà toán học đáng kính, sâu sắc

như chúng ta đã biết, Hoàng Tụy còn là một người cha hết lòng vì con, hướng con mình đến những sự nghiệp cao cả, vượt lên những khó khăn tất yếu của cuộc sống mưu sinh. Ông nhắn nhủ "Lao động vất vả, nghiêm túc như con kể thì có gì mà lo. Đừng để khó khăn đè mình xuống mà phải đứng trên mọi chuyện".

Nhân dịp sinh nhật 80 tuổi của GS. Hoàng Tụy, GS. Phan Đình Diệu tổng kết những hoạt động và cống hiến đa dạng của giáo sư Tụy trong nghiên cứu và ứng dụng toán học, giáo dục, và xây dựng một nền khoa học tại Việt Nam. GS. Phan Quốc Khánh, tuy không trực tiếp học tập, cộng tác nhiều với Hoàng Tụy, ghi nhận những tác động sâu sắc từ tấm gương của giáo sư Tụy. Các tác giả Lê Dũng Mưu và Lê Xuân Thanh trình bày khái quát về ngành tối ưu toàn cục, nơi GS. Hoàng Tụy không chỉ có công khai phá mà còn lưu lại những cống hiến lâu bền. Tổng kết từ nhiều dịp tiếp xúc trực tiếp và tiếp xúc gián tiếp qua công trình, giáo sư Nguyễn Đông Yên vẽ nên một chân dung Hoàng Tụy uyên bác, tài năng, và tinh tế trong toán học.

Thông tin Toán học hy vọng số tưởng niệm này có thể bổ sung cho kho tư liệu về Hoàng Tụy, vốn đã có nhiều bài viết xuất sắc của những tác giả như Hà Huy Khoái, Neal Koblitz, Bùi Trọng Liễu, Trần Văn Nhung, Hoàng Xuân Phú, Nguyễn Khoa Sơn, Nguyễn Xuân Tấn, Nguyễn Duy Tiên, và nhiều người khác. Chúng tôi xin trân trọng cảm ơn các tác giả đã đóng góp bài dịch và bài viết cho tờ *Thông tin*. Chúng tôi chân thành cảm ơn các cộng tác viên đã nhiệt tình tham gia chia sẻ những ý kiến, nhận xét quý báu để tòa soạn hoàn thành được số báo này.

Ban biên tập

Toán học và phát triển⁽¹⁾⁽²⁾

Hoàng Tụy

Tôi vô cùng xúc động trước niềm vinh dự nhận được hôm nay và rất hân hạnh được thảo luận về một số vấn đề liên quan đến toán học và phát triển, trước cử tọa đáng kính ở đây.

Vai trò của toán học trong quá trình công nghiệp hóa là một chủ đề nhận được sự quan tâm đáng kể từ các quốc gia từ Nam chí Bắc, trong và ngoài cộng đồng toán học. Trên thực tế, trong thời đại chúng ta, công cuộc phát triển – vấn đề lớn nhất đối với phần lớn nhân loại – đang được thực thi trong bối cảnh diễn ra những tiến bộ vũ bão về công nghệ, hầu hết đều liên quan trực tiếp hay gián tiếp tới toán học, một ngành ngày càng quan trọng đối với khoa học, công nghệ, và xã hội.

Không phải vô cớ mà gần đây Liên đoàn Toán học Quốc tế đã đề nghị lấy năm 2000 làm Năm Toán học Thế giới. Một trong những lý do chính cho đề xuất này là, khi thế giới đang nhanh chóng tiến tới thời đại xa lộ thông tin, toán học đáng được xem như một chìa khóa phát triển. Bất cứ ai quan tâm đến sự tiến bộ khoa học và những vấn đề xã hội đang phải đối mặt trong bước chuyển sang kỷ nguyên mới cần hiểu được quá trình toán học hóa tác động ra sao đến cuộc sống và công việc trong thế kỷ tới.

Tuy nhiên, việc thảo luận chi tiết chủ đề quan trọng này nằm ngoài khả năng và mục đích của tôi. Thay vào đó, tôi sẽ giới hạn vấn đề trong những chủ điểm gần

gũi với bản thân, tập trung làm rõ những quan điểm cá nhân và minh họa chúng bằng kinh nghiệm cá nhân nếu được. Vì vậy, tôi sẽ đề cập chủ yếu đến các lĩnh vực toán học mình đã nghiên cứu trong ba thập kỷ qua, bao gồm vận trù học, toán kinh tế và tối ưu hóa. Ngay cả trong phạm vi giới hạn này, tôi cũng chỉ có thể thảo luận một số điểm chính.

Do hoàn cảnh khách quan, từ thời thơ ấu tôi đã luôn sống, học tập, và làm việc ở một đất nước nghèo nàn lạc hậu, không những thế lại có rất ít quan hệ với thế giới bên ngoài trong suốt nhiều thập niên (khoảng 35 năm qua), ngoại trừ việc nhận được không ít bom mìn ("nếu xem đây như một dạng quan hệ ngoại giao", chữ dùng của nhà toán học người Pháp A. Grothendieck trong một bài báo viết về chuyến thăm các trường đại học Việt Nam, vào năm 1967). Đương nhiên ở một đất nước như vậy, khi hòa bình được lập lại, việc chống đói nghèo, đấu tranh phát triển bền vững phải là nhiệm vụ trung tâm, là vấn đề số một của mỗi công dân. Mặt khác, là một nhà toán học, nên về cơ bản, tôi cũng chia sẻ trách nhiệm nghề nghiệp và mối quan tâm khoa học với các đồng nghiệp ở bất cứ đâu. Hai loại hoạt động vừa nêu nghe có vẻ không tương thích, hay ít nhất là khác thường, bởi không có gì đảm bảo cho việc dung hoà thành công giữa tự do học thuật và nhiệm vụ nghiên cứu những vấn đề thực tiễn do các nhóm mục tiêu và các nhà hoạch định chính sách đặt ra. Một câu hỏi hay được

⁽¹⁾Nguyễn văn tiếng Anh "Mathematics and Development", đã đăng trên Vietnam J. Math. Tập 23, số 2 (1995).

⁽²⁾Lời toà soạn tạp chí Vietnam Journal of Mathematics: Giáo sư Hoàng Tụy, nguyên tổng biên tập tạp chí (từ 1980-1990), nguyên viện trưởng Viện Toán học (từ 1980-1990), đã được Đại học Linköping (Thụy Điển), trao bằng Tiên sĩ danh dự vào ngày 2/6/1995. Bài báo này là diễn từ của giáo sư tại lễ trao bằng.

đặt ra là liệu toán học (và các khoa học cơ bản khác) có quá xa xỉ đối với các nước đang phát triển không? Toán học và các nhà toán học có thể đóng góp tích cực vào sự phát triển kinh tế được không? Trong một nền kinh tế lạc hậu, nghiên cứu toán học nghiêm túc có phải một việc bình thường, đáng giá? Đặt vấn đề đơn giản hơn, liệu các nghiên cứu như thế có khả thi không?

Câu trả lời cho những câu hỏi này có thể rất có giá trị với nhiều nước đang phát triển.

Ở các nước công nghiệp phát triển, người ta thường cho rằng xã hội thịnh vượng đến đâu phụ thuộc rất nhiều vào mức độ phát triển của toán học – nền tảng của khoa học và kỹ thuật, và sự vượt trội trong toán học là điều kiện cho sự vượt trội trong công nghệ. Trong vài thập kỷ qua, nhiều ứng dụng toán học mới đã thực sự bùng nổ, do sự xuất hiện của các máy tính tốc độ cao với bộ nhớ lớn. Đặc biệt, việc thay thế nghiệm thực tế bằng mô phỏng toán học, khả năng tạo ra cũng như lưu trữ một lượng dữ liệu khổng lồ chưa từng có, từ đó trích xuất ra các thông tin tiềm ẩn bằng thao tác toán học, đã mang đến nhiều tiến bộ ngoạn mục trong khoa học và công nghệ. Toán học được kỳ vọng sẽ có tác động đáng kể hơn nữa trên toàn bộ phạm vi của cuộc cách mạng công nghệ sắp tới, từ công đoạn thiết lập các hệ thống truyền thông mới cho đến việc xây dựng các phần mềm khai thác và quản lý các hệ thống đó.

Tuy nhiên, có thể phản bác lại rằng tất cả những điều vừa nêu sẽ chỉ đúng đối với các xã hội công nghiệp hóa cao độ, với nhiều ngành công nghiệp quy mô lớn ở trình độ công nghệ tiên tiến, còn các nước đang phát triển phải đối mặt với những vấn đề khác hẳn: cơ sở hạ tầng kém, sản xuất lương thực bấp bênh, cấu trúc thị

trường kém, thiếu hụt các hệ thống tín dụng, v.v. Làm thế nào toán học đưa ra được giải pháp hữu ích cho những vấn đề như vậy?

Để trả lời thỏa đáng vấn đề này, ta hãy nhớ rằng một nước đang phát triển không cần phải bắt chước hoàn toàn lịch sử công nghiệp hoá của các nước đã phát triển. Thông thường, việc đi đường tắt không chỉ là hiện thực mà nhiều khi còn là tất yếu, nếu nhìn vào ví dụ của Nhật Bản một trăm năm trước và các nước công nghiệp phát triển mới vài thập kỷ gần đây. Chẳng có lý do gì buộc ta phải chấp nhận giải quyết mọi vấn đề trong một nền kinh tế lạc hậu chỉ bằng các phương pháp lạc hậu. Quả thực, nhiều phương pháp tiên tiến, đôi khi sâu sắc về mặt toán học, là khả thi và thực tế đã được các nước như Ấn Độ, Trung Quốc, Hàn Quốc áp dụng trong nhiều bài toán từng được giải quyết bằng các phương pháp lỗi thời ở các nước phát triển. Tôi có thể kể ra đây một số ứng dụng vô cùng giá trị của vận trù học, các phương pháp thống kê (như kiểm soát chất lượng thống kê), mô phỏng toán học, tối ưu hóa, giải tích số, v.v., trong các vấn đề của nông nghiệp, sinh thái, môi trường, quản lý tài nguyên nước, kiểm soát lũ, lọc nước, năng lượng, công nghiệp dầu mỏ. Ba mươi năm trước, không ai có thể dự đoán rằng công nghệ cao có thể thâm nhập mạnh mẽ như vậy vào nhiều khía cạnh của cuộc sống hàng ngày ở nhiều nước Đông Nam Á như hiện tại. Các nhà kinh tế ước tính rằng trong hai mươi năm tới, cần tới hàng trăm tỷ đô la cho việc xây dựng và hiện đại hóa cơ sở hạ tầng cần thiết để gia tốc sự phát triển kinh tế Đông Nam Á, nơi mà cách đây không lâu còn được cho là không thể thoát ra khỏi đói nghèo.

Ngay từ cuối những năm 50, nhà toán học Trung Quốc nổi tiếng Hua Loo-Keng⁽³⁾ đã khởi xướng một chiến dịch rộng lớn để ứng dụng vận trù học và tối ưu hoá tại Trung Quốc. Những hoạt động này được trình bày chi tiết trong một bài báo gần đây của Schweigman và Zhang trên tạp chí *Mathematical Intelligencer* năm 1994⁽⁴⁾. Ở Việt Nam, chúng tôi cũng có những kinh nghiệm tương tự, mặc dù ở quy mô nhỏ hơn nhiều: quy hoạch tuyến tính và các phương pháp thống kê được áp dụng trong lĩnh vực giao thông vận tải (ví dụ bài toán tổ chức vận tải bằng xe tải để giảm quãng đường các xe tải trống phải chạy), trong nông nghiệp (tối đa sản lượng thu hoạch hoặc nâng cao thu nhập của nông dân), trong ngành dệt may, trong xây dựng và quản lý dự án (phương pháp đường tới hạn), v.v. Mặc dù kết quả còn lẻ tẻ và có những phương pháp thu được thành công ban đầu phải loại bỏ về sau do quản lý kém và thiếu động cơ khuyến khích, những kinh nghiệm này cho thấy các phương pháp toán học đã nêu là phù hợp và khả thi ngay cả trong hoàn cảnh công nghệ thấp.

Trong một thế giới mà năng suất phụ thuộc nhiều vào lượng chất xám của lực lượng lao động, phát triển toán học là cấp thiết không chỉ đối với các quốc gia muốn nâng cao năng lực cạnh tranh kinh tế mà cả với các nước nghèo hơn, để thu hẹp khoảng cách với các nước giàu trong thời gian ngắn nhất. Để tạo ra một lực lượng lao động có kỹ năng, hệ thống giáo dục phải đủ tốt. Do toán học dạy ở các trường cao đẳng và đại học là cốt lõi của các kỹ năng định lượng cần thiết cho lao động trong khoa học, kỹ thuật và quản lý, lực lượng giáo viên toán có trình độ cao ở

mọi cấp là vô cùng cần thiết. Tuy nhiên, giảng dạy không thể tách rời khỏi nghiên cứu, đặc biệt là ở bậc đại học. Vì vậy, ngay cả ở các nước đang phát triển, nghiên cứu toán học không những không phải là điều xa xỉ mà còn nên được thúc đẩy ngay lúc này, thay vì chờ đến một tương lai tốt đẹp hơn. Vấn đề chủ yếu chỉ là làm thế nào để tận dụng nguồn lực hạn chế hiện có cho nghiên cứu.

Dĩ nhiên vấn đề không hề đơn giản. Chúng ta cần nhận thức được những khó khăn to lớn không thể kể hết của việc nghiên cứu toán học trong điều kiện thiếu thốn cơ sở hạ tầng, môi trường và không khí học thuật. Tuy nhiên, ngay cả sau bao biến động trong những thập kỷ gần đây, toán học vẫn tiếp tục là một khoa học "gọn nhẹ", chỉ đòi hỏi trang thiết bị tối thiểu so với các ngành khoa học khác: giấy, mực, máy tính và đầu óc tốt là đủ để tạo ra rất nhiều nghiên cứu toán học có giá trị. Sự vượt trội về toán học là điều kiện cần, dù tất nhiên chưa đủ, để phát triển kinh tế. Kinh nghiệm của Hungary, Ba Lan, Ấn Độ, Brazil rất quý vì cho thấy một quốc gia có thể sản sinh ra các trường phái toán xuất sắc, ngay cả khi chưa có một nền kinh tế phát triển tương xứng.

Trong trường hợp của Việt Nam, tôi có thể nói rằng những nỗ lực liên kết toán học với phát triển, dù không phải lúc nào cũng thành công, đã có lợi cho sự phát triển của bản thân toán học. Trong những điều kiện vô cùng khó khăn, trong những giai đoạn khủng hoảng nhất, xêmina về nhiều lĩnh vực toán học vẫn diễn ra đều đặn, đội tuyển Việt Nam vẫn liên tục đạt thành tích tốt tại các kỳ Olympic Toán học Quốc tế, viện nghiên cứu toán tại đất

⁽³⁾Hua La Canh (1910–1985), nhà toán học hàng đầu, nhà hoạt động chính trị của Trung Quốc, nổi tiếng với các công trình trong số học (BBT).

⁽⁴⁾C. Schweigman và S. Zhang, *The teachings of Hua Loo Keng: A challenge today?*, The Mathematical Intelligencer vol. 16, 36–46 (1994).

nước tôi vẫn phát triển lành mạnh. Đó là những tín hiệu rất khả quan, bất chấp một số vấn đề nghiêm trọng do phương thức quản lý giáo dục yếu kém gây ra gần đây.



Hoàng Tụy và Leonid V. Kantorovich, nhà toán học và kinh tế học Liên Xô. Ảnh chụp tại Mátxcơva năm 1981.

Đối với bản thân tôi và đồng nghiệp, tất cả các hoạt động trong các lĩnh vực ứng dụng toán học đều rất hữu ích và gợi nhiều cảm hứng.

Cách đây gần bốn mươi năm, tôi bắt đầu sự nghiệp khoa học của mình bằng các nghiên cứu về giải tích thực và giải tích hàm. Vì vậy, khi mới bắt đầu [chuyển sang] nghiên cứu vận trù học, tôi không hứng thú lắm với các công cụ toán được sử dụng trong lĩnh vực này. Tài liệu đầu tiên về quy hoạch tuyến tính tôi được đọc không phải là một tài liệu tốt, và thẳng thắn mà nói tôi thấy lĩnh vực mới này khá nhàm chán nếu so với vẻ diễm lệ và tinh tế của lý thuyết độ đo hay giải tích hàm, những ngành gây ấn tượng với tôi bởi vẻ đẹp thẩm mỹ. Nhưng quyết tâm đi vào những ứng dụng thực tế cuối cùng đã khiến tôi rời bỏ giải tích thực và chuyển hẳn sang tối ưu, đặc biệt là sau khi nghe

những lời khuyên của Kantorovich trong một lần tôi đến thăm ông năm 1962.

Vào thời điểm đó, chúng tôi đang tìm cách áp dụng phương pháp quy hoạch tuyến tính vào bài toán vận tải. Lúc đầu, tôi hứng thú với các bài toán với hàm chi phí phi tuyến lồi, nhưng sau đó tôi nhanh chóng nhận ra rằng tính lồi là một giả thiết dễ chịu cho các nhà toán học nhưng phi thực tế trong nhiều tình huống, do hiệu quả kinh tế nhờ quy mô và giá cả cố định đưa ra những điều kiện khác hẳn. Đó là nguồn gốc cho công trình của tôi về bài toán vận tải chi phí lõm tối thiểu, hay tổng quát hơn, bài toán tối thiểu hoá một hàm lõm dưới các ràng buộc tuyến tính, được xuất bản trên *Báo cáo của Viện Hàn lâm Khoa học Liên Xô* năm 1964⁽⁵⁾, dường như là một trong những nghiên cứu đầu tiên giải quyết bài toán tối ưu toàn cục tất định. Các khái niệm nhất cắt lõm và phân vùng nón (conical partition), sau này được sử dụng thường xuyên trong tối ưu toàn cục, đã được đưa ra trong bài báo này.

Sau này, vì cần nghiên cứu cơ chế hoạt động của nền kinh tế, tôi bắt đầu quan tâm đến bản chất toán học của các khái niệm như giá cả tối ưu, biến đổi ngẫu, nhân tử Lagrange, tính phân rã (decomposition), phân cấp (decentralization), cân bằng, vân vân. Điều này thúc đẩy các nghiên cứu của tôi về các bất đẳng thức lồi, các định lý minimax và các định lý điểm cố định. Trong những định lý cơ bản này, tôi đều thấy vai trò cơ bản của tính lồi. Tuy nhiên, ngày càng xuất hiện nhiều bài toán không lồi không thể xử lý bằng các phương pháp tối ưu hóa địa phương truyền thống, vì có nhiều điểm là cực tiểu địa phương nhưng không phải cực tiểu toàn cục. Như tôi đã đề cập trước đó, tính

⁽⁵⁾H. Tụy, Concave programming with linear constraints (Tiếng Nga), Dokl. Akad. Nauk SSSR 159 (1964), 32-35. [Bản dịch tiếng Anh Soviet Math. Dokl. 5 (1964), 1437-1440] (BBT).

lỗm của hàm chi phí là do hiệu quả kinh tế nhờ quy mô và chi phí cố định sinh ra, ví dụ, trong các bài toán về vận chuyển sản xuất và vị trí nhà máy. Do lĩnh vực ban đầu của tôi là giải tích cổ điển và giải tích hàm, tôi muốn tìm hiểu về cấu trúc giải tích chung ẩn dưới tất cả các bài toán không lồi này. May mắn thay, xem xét kỹ lưỡng cho thấy để giải quyết các bài toán không lồi, tính lồi đóng vai trò quan trọng không kém gì so với trường hợp các bài toán lồi truyền thống, chỉ là theo cách thức khác. Lý do sâu xa nằm ở tính chất tập đặc biệt của không gian \mathbb{R}^n chúng ta đang sống: bất kỳ tập đóng nào trong không gian \mathbb{R}^n đều là hình chiếu của hiệu của hai tập lồi trong không gian \mathbb{R}^{n+1} .

Điều này cho phép chúng ta xem một bài toán tối ưu liên tục trên một tập compact bất kỳ như một bài toán tối thiểu hóa hoặc tối đa hóa một hàm tuyến tính trên một tập d.c., tức là một tập hợp bằng hiệu của hai tập lồi. Đây là sự khởi đầu của một chương mới về tối ưu toàn cục tất định, được gọi là tối ưu hoá d.c.

Sự phát triển của lĩnh vực nghiên cứu mới này trong thập kỷ qua đã tạo nên một

số thành tựu quan trọng, cả về lý thuyết lẫn tính toán thực tiễn. Ngoài các kết quả lý thuyết sâu rộng liên quan đến đối ngẫu, phân rã, cấu trúc không lồi hạng thấp, tôi cũng muốn đề cập đến các lĩnh vực ứng dụng mới: thiết kế kỹ thuật, tối ưu hóa mạng, các bài toán sản xuất - vận tải liên quan đến cả hiệu quả kinh tế và lãng phí kinh tế do quy mô (tăng và giảm lợi nhuận), tối ưu hai cấp (bilevel optimization), quy hoạch đa mục tiêu, các bài toán quản lý tài chính, định vị liên tục và gần đây nhất là sinh học tính toán và hóa học tính toán.

Tóm lại, dù còn nhiều khó khăn thách thức phía trước, tôi nghĩ chúng ta có thể lạc quan về triển vọng [của các lĩnh vực kể trên]. Toán học, khi liên kết với sự phát triển, ngay cả nếu nó chưa thành công trong việc giải quyết các vấn đề thực tiễn đương đại, ít nhất có thể làm phong phú thêm kho tàng kiến thức của chúng ta, và biết đâu có thể hữu ích cho tương lai, qua đó cứu chúng ta khỏi cảm giác bất mãn cay đắng ẩn chứa trong tác phẩm nổi tiếng *Lời biện minh của một nhà toán học*⁽⁶⁾ của Hardy.

Người dịch: Vũ Khắc Kỷ, Đại học FPT.

Ba tôi, người đã có một cuộc đời tuyệt diệu

Hoàng Dương Tuấn⁽¹⁾

Thâm thoát đã một năm kể từ ngày ba mãi mãi ra đi. Một đồng nghiệp của tôi đã viết "Dù biết ngày này không thể tránh khỏi, sự ra đi của bác Tụy vẫn để lại khoảng trống và mất mát. Bác Tụy là một người phi thường trong giới trí thức Việt Nam, không chỉ như một nhà khoa học

mà còn là người đấu tranh cho những gì bác tin. Đóng góp của ông cho khoa học, giáo dục và cho dân tộc Việt Nam là vô song. Tôi như mất một người thân vì tôi biết bác. Dường như mới hôm qua bác và bác gái tới Melbourne và ký ức về ăn Bò Bắp Món với hai bác vẫn sống động. Tôi trân trọng những kỷ niệm như vậy và tôi

⁽⁶⁾A Mathematician's Apology.

⁽¹⁾Đại học Công nghệ Sydney. Email: tuan.hoang@uts.edu.au

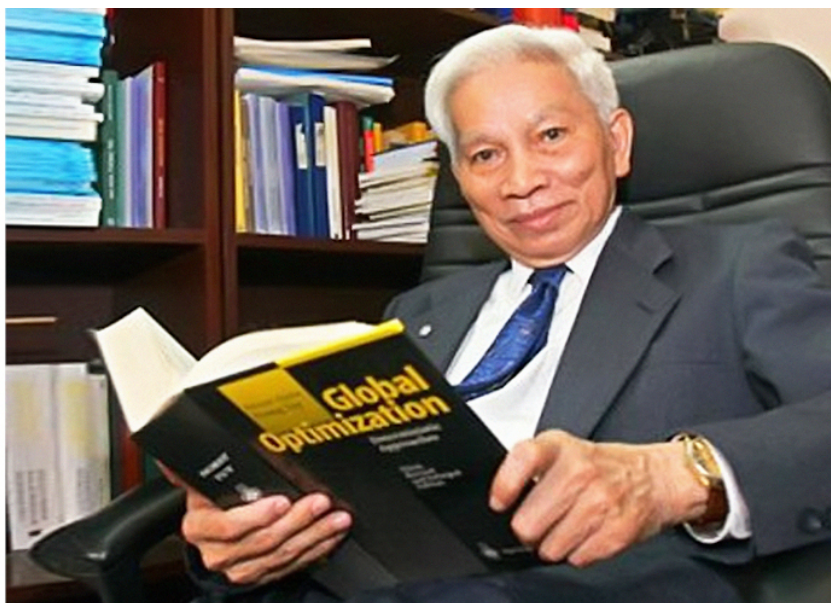
cảm thấy hãnh diện được biết bác. Bác đã ra đi nhưng di sản của ông luôn luôn còn mãi với chúng ta."

Giáo sư Pierre Darriulat, người bạn gần gũi của ba đã nói với tôi *"Cha anh là người đàn ông phi thường và sự ra đi của ông là một mất mát lớn. Cha anh lo cho đất nước hơn là cho bản thân. Ít có những người thật như vậy"*.

Những người bạn của ba đã viết *"ông coi công danh phú quý chỉ là phù vân, nhưng phải sống cuộc đời có nhiều ý nghĩa, dù khó khăn đến mấy cũng tin vào một tương lai tươi sáng của dân tộc ta, một dân tộc đau thương và quật khởi"*.

Giờ đây, đọc đi đọc lại bài viết của ba về thủ tướng Phạm Văn Đồng, tôi mới hiểu rõ thêm vì sao ba lại có và sống với niềm tin không dao động như vậy. Ba bắt đầu sự nghiệp như một nhà giáo khi chưa đầy 20 tuổi từ những năm đầu kháng chiến chống Pháp. Vào thời kỳ mà người ta dễ dàng buông xuôi nhiều thứ để giữ đất và bảo vệ cuộc sống, dân tộc ta đã có được nền giáo dục xuất thân và phát triển một

cách kỳ lạ. Trường Lê Khiết nơi ba dạy, vốn là miền đất nghèo khổ và thiếu học, đã phát triển tới qui mô vượt cả trường trung học thời thực dân ở Quy Nhơn. Cả giáo viên lẫn học sinh đều có niềm tin vào sức mạnh giải phóng của giáo dục với những ước mơ thật lãng mạn. Ít có một dân tộc nào lại làm được đồng thời cả hai việc lớn là đánh giặc và phát triển giáo dục. Ngôi trường Lê Khiết khiêm tốn ở Quảng Ngãi đó đã sản sinh nhiều văn nghệ sỹ, nhà giáo, nhà khoa học chân chính. Họ là những người yêu quê hương, yêu con người đến tận đáy tâm hồn và để lại nhiều di sản giáo dục, tinh thần cho thế hệ sau. Rồi vào thời điểm ác liệt nhất của cuộc chiến tranh chống Mỹ, trong những giờ phút lâm nguy phải sơ tán tránh những cuộc oanh tạc không kích muốn đưa miền Bắc Việt Nam về thời kỳ đồ đá mà Thủ tướng vẫn cất lên tiếng nói *"Khoa học nâng con người ta lên"*. Là người làm khoa học đã hơn 30 năm ở những nước phát triển, tôi chưa bao giờ nghe được câu nói sâu sắc như thế.



GS. Hoàng Tụy (1927–2019).

Tôi không bao giờ quên những lần nói chuyện với ba. Ba đau đớn khi thấy đất nước qua bao thử thách khốc liệt thời chiến lại bỏ lỡ biết bao cơ hội phát triển trong thời bình, những nề nếp giáo dục hay khoa học may mắn có được từ thời chiến không những không được giữ gìn hay phát huy mà bị lụi tàn bởi những quan điểm hẹp hòi mà cứ tưởng là cách mạng. Quá nhiều những thứ phát triển không giống một ai, thương mại hóa không tha một lĩnh vực nào mà vẫn coi đó là phát huy và sáng tạo. Chúng tôi đã tranh luận rất nhiều về lý tưởng, về những cái giá của dân tộc phải trả sau hai cuộc chiến. Tôi vẫn nhớ ba nói ngày xưa trong chiến tranh, những người cộng sản là những người đi đầu. Ba luôn nhắc thế hệ tôi không sống trong bối cảnh đó nên không hiểu được nỗi nhục của một đất nước bị nô lệ. Khi đi dạo dọc bờ sông Hương ba kể say sưa thời thanh niên ba

đã bơi qua sông Hương do tội Tây thách thức. Nhiều lần khi đi nghỉ cùng gia đình tôi, ba và tôi đi dạo riêng nghe ba chia sẻ những day dứt của ba về thời cuộc. Ba hay nhắc chuyện ông Phạm Văn Đồng nói với ba lúc cuối đời "*Tôi buồn lắm, buồn vô cùng*"⁽²⁾. Một lần vào năm 1987, khi tôi chỉ những dòng báo ca ngợi ông Phạm Văn Đồng là vị thủ tướng lâu đời nhất thế giới, ba bảo họ "quên" nói ông Đồng cũng là thủ tướng ít quyền nhất thế giới. Giờ tôi đọc lại bài viết về Phan Châu Trinh của học trò ba thời Lê Khiết. Phan Châu Trinh đã tìm ra nguyên nhân mất nước, dân tộc sa vào vòng nô lệ thảm khốc là ở trong văn hóa, trong sự lạc hậu quá xa về văn hóa của dân tộc so với đối thủ của mình. Ông không chỉ đặt vấn đề độc lập, ông đặt vấn đề xa hơn, căn bản hơn: phát triển, cho văn minh bằng thiên hạ. Bi kịch lịch sử là ông hầu như hoàn toàn cô độc về tư tưởng và đường lối trong thời của mình.



GS. Hoàng Tụy, phu nhân, và một người cháu nội, tại Sydney năm 2005. Ảnh tư liệu gia đình.

⁽²⁾Xem bài viết của Hoàng Tụy, "Phạm Văn Đồng: Khoa học nâng con người ta lên", trong cuốn *Những Người Cùng Thời*, Nhiều tác giả, NXB Trẻ (2005), trang 11.



GS. Hoàng Tuy và người thân tại Huế năm 2012. Ảnh tư liệu gia đình.

Tôi vẫn giữ đầy đủ những email ba kể vắn tắt những việc ba làm như tổ chức hội thảo hàng tuần về giáo dục và những kiến nghị cải cách giáo dục, sách giáo khoa, rồi cùng các đồng nghiệp ở Viện Nghiên cứu Phát triển đưa ra những kiến nghị, góp ý, kêu gọi. Đến tận tháng Năm năm 2018, sau khi mẹ tôi mất ít lâu và ba đã bắt đầu yếu, ba vẫn nói sang sảng với tôi về tầm nhìn của lãnh đạo cao nhất trong những giờ phút khó khăn quan trọng như thế nào với đất nước. Mấy tháng trước khi mất, ba đồng ý cho xuất bản cuốn *"Xin được nói thẳng"* tập hợp nhiều bài viết của ba trong thời gian dài trên các báo về những vấn đề sống còn của xã hội. Ba nói ba hy vọng cuốn sách đó kích thích sự đổi mới của đất nước. Các bài viết trong sách được sắp xếp rất khoa học, dẫn dắt người đọc từ phân tích cơ bản những khuyết tật của hệ thống dẫn đến xã hội tham nhũng đầy những khối u dị dạng nên chỉ có tái cấu trúc và sửa lỗi hệ thống toàn diện mới giải quyết được vấn đề. Người tài và bản lĩnh người lãnh đạo là nhân tố quan

trọng nhất. Phải có những đột phá trong giáo dục và quản lý khoa học mới có hy vọng dân tộc thích ứng với thời đại kinh tế tri thức thay đổi cực nhanh. Tôi biết vì những bài đó mà có thời các báo được chỉ đạo không được phỏng vấn ba. Máy tính xách tay có nhiều bài ba đã viết và đang viết bỗng dưng bị mất cấp. Sức đã yếu lắm mà ba vẫn hỏi về phản hồi của độc giả về cuốn sách. Anh Phúc thủ tướng đã gửi thư đến thăm hỏi và phản hồi tốt. Nhớ lần đầu gặp mặt ở Sài Gòn cuối năm 2016, anh Phúc có nói với tôi: *"Minh tổ chức sinh nhật 70 năm ba cậu khi còn làm chủ tịch ở Quảng Nam đấy"*. Tôi lại nhớ được xem video ghi lại quê hương Điện Bàn vinh danh ba nhân dịp ba 70 tuổi, ghi lại những lời nói chân thành và mộc mạc của quê hương về ba. Mỗi lần về quê, ba đều kể cho tôi với niềm tự hào. Ba nhắc một Hội An phát triển đàng hoàng một phần nhờ có ông bí thư Sự giỏi và có tầm nhìn.

Ba không chỉ là người cha, ba là người thầy và là thần tượng của tôi, là người dẫn dắt tinh thần và luôn chia sẻ những giờ phút khó khăn nhất. Càng ngày tôi càng thấm lời ba nói sau khi ông Phạm Văn Đồng mất rằng ba thật sự buồn vì ba mất nơi chia sẻ tâm tư, nhiều khi chỉ vài câu ngắn ngủi nhưng động viên thật nhiều. Thật nhớ những dòng ngắn ngủi của ba như *"Con nên giữ sức khoẻ và luôn giữ vững tinh thần, dù khó khăn gì cũng không ngại, miễn mình làm việc đúng đắn, công tâm. Lao động vất vả, nghiêm túc như con kể thì có gì mà lo. Đừng để khó khăn đè mình xuống mà phải đứng trên mọi chuyện. Ba đã từng gặp những chuyện cực kỳ căng thẳng hồi ở ĐH Tổng hợp. Ba và bác Thiêm bị tụi nó đầu lên bờ xuống ruộng, định quật ngã cả Ba và bác Thiêm nhưng cuối cùng tụi nó cũng chẳng làm được gì mình, dù chúng nó có một lực lượng quan chức mao-ít ở cấp trên ra sức ủng hộ. Tất nhiên hồi đó tụi nó gây cho mình rất nhiều khó khăn, Ba cũng có lúc rất nản, nhưng rồi Ba tập trung làm khoa học, chính thời kỳ này Ba nghĩ ra global optimization.*⁽³⁾ *Cừ vùi đầu làm khoa học, bỏ ngoài tai mọi chuyện khác, phớt lờ, quên bốt đi, rồi cuối cùng sẽ vượt qua được khó khăn"* và *"Các điều kiện của con như vậy cũng là mãn nguyện rồi, còn cái gì hơn nữa thì xem như phần phụ thêm, có càng hay, không cũng chẳng sao. Nhiều người cũng chỉ mơ ước chừng đó thôi mà. Ai đó nói muốn sống có hạnh phúc thì nên biết chừng nào là đủ, cái triết lý ấy cũng đúng. Ở các nước như Úc thì cạnh tranh trong xã hội là một áp lực, ở đó không thể thoải mái theo kiểu làm bao nhiêu cũng được, mọi nhu cầu đều có thể ỷ lại vào bao cấp".*

Khi tôi nhỏ, ba dạy về phân số để tôi sau đó tự học. Cuối năm cấp 2, ba dạy đọc

sách toán phổ thông tiếng Nga để giúp tôi tự tìm sách học thêm. Những cuốn sách tiếng Nga cùng những mẫu chuyện hấp dẫn ba kể trong những bữa ăn về những nhà toán học, rồi tấm gương ba nghiên cứu ngày đêm đã giúp tôi say mê học toán với ước mong theo con đường khoa học của ba. Khi sang học ở Liên Xô, tôi được gặp những người bạn nổi tiếng nhưng bình dị của ba. Tôi hay đến nhà giáo sư Aleksandr A. Zykov, chuyên gia hàng đầu về lý thuyết đồ thị. Giáo sư Zykov kể hồi ông ở Novosibirsk, ba có đưa một kết quả rất độc đáo về bài toán đồ thị nên đã có một chương trong cuốn sách *"Lý thuyết đồ thị"* của ông về phương pháp Hoàng Tụy. Có lần sinh nhật ông, con gái ông bảo ngày sinh nhật là ngày của gia đình nhưng cha tôi sẽ rất vui khi có cậu đến. Hôm tôi bảo vệ chính thức luận án Ph.D., ông và cả gia đình đến dự làm cả trường tôi ngạc nhiên, họ không tin là có người nổi tiếng vậy đến dự lễ bảo vệ của tôi. Đến ông thầy hướng dẫn của tôi cũng hỏi sao cậu có quen biết giáo sư Zykov à. Một người bạn khác của ba là giáo sư Rubinstein, nguyên là học trò của Kantorovich-nhà toán học đoạt giải Nobel Kinh tế năm 1975. Từ những năm 60 thế kỷ trước, khi thế giới còn chưa có thuật ngữ "tin học", Rubinstein cùng Kantorovich đã đưa ra bài toán giao thông thông tin mà ngày nay thế giới đang nghiên cứu nhiều. Họ trong số những nhà khoa học hàng đầu của Liên Xô đến lập ra thành phố khoa học nổi tiếng ở Novosibirsk. Năm 1987, khi tôi đến Novosibirsk dự hội nghị của sinh viên, Rubinstein đến gặp và đưa tôi về ở nhà ông luôn. Mấy buổi đi dạo cùng ông toàn gặp các cây đa cây đề trong ngành, không là viện sỹ thì cũng giải thưởng Lênin hay giải thưởng nhà nước

⁽³⁾Xem bài "Những bài học về chính sách với trí thức" của Hoàng Tụy, bản điện tử trên trang chủ của tạp chí Tia Sáng (2008), <https://tiasang.com.vn/khoa-hoc-cong-nghe/nhung-bai-hoc-ve-chinh-sach-voi-tri-thuc-911>

Liên Xô. Sau mỗi lần chào họ, ông hay kể cho tôi những câu chuyện rất thú vị: họ được giải thưởng tầm cỡ như vậy vì những công trình gì, những đóng góp gì. Không khí chính trị khi đó thông thoáng hơn và chúng tôi cũng hay nói những chuyện hài hước chính trị. Là người từng tham gia cuộc chiến tranh giữ nước vĩ đại, ông bảo "*trên màn ảnh thì cứ làm như tại Đức ngu lắm, nhưng tại sao đánh nhau với họ khó thế*". Ông kể rất nhiều chuyện hay về Kantorovich, người tốt nghiệp đại học khi 18 tuổi, thành giáo sư khi 22 tuổi, và làm ra những công trình được giải Nobel năm 27 tuổi. Kantorovich không những là nhà toán học mà còn là nhà kinh tế học. Ai cũng biết giá cả các mặt hàng của Liên Xô thời đó chẳng theo một qui luật kinh tế nào. Kantorovich có nói rằng nếu chúng ta xuất khẩu cách mạng đi toàn thế giới thì cũng nên để một hòn đảo là chủ nghĩa tư bản chứ nếu không thì không biết giá cả các mặt hàng thế nào. Rubinstein nói nhiều về ba và những công trình tối ưu của ba một cách đầy cảm phục và đầy sức thuyết phục. Ông nói có nhiều người có những kết quả hay, nhưng để xây dựng được thành một lý thuyết hay như ba thì không nhiều. Ông khuyên tôi hãy tìm vị trí của mình trong khoa học và đi theo con đường của ba.

Giờ đây, sau hơn 30 năm nghiên cứu, điều mà tôi tự hào với bản thân nhất có lẽ là đủ sức và trí tuệ để làm theo những lời khuyên của ba, với tác phong nghiên cứu Hoàng Tụy. Hồi tôi nhỏ, ba hay kể chuyện ba tự học rồi nhảy cóc, ba nghĩ nên tạo điều kiện để học sinh, sinh viên giỏi có thể nhảy cóc. Đến cuối năm thứ ba đại học, tôi muốn tốt nghiệp sớm nhưng không được vì để tốt nghiệp, ai cũng phải học rất nhiều các môn ngoài lề khác như Kinh tế chính trị Mác-Lênin hay Chủ nghĩa Cộng sản Khoa học. Nhưng

nhờ vậy và nhờ có "máu" nghiên cứu khoa học của ba, tôi tận dụng được 2 năm cuối tập trung học hỏi nghiên cứu. Luận án Ph.D. của tôi hoàn toàn là kết quả của 2 năm nghiên cứu này, với 3 bài báo đăng trên tạp chí có tiếng của Liên Xô. Điều tôi tiếc nhất có lẽ là đã không học tiếng Anh nghiêm chỉnh thời nghiên cứu sinh. Triết lý của ba rất đơn giản và dễ hiểu: muốn hợp tác với phương Tây thì cần biết họ đang quan tâm những vấn đề gì, phải có những công trình đăng ở các tạp chí phương Tây, có những bài báo viết bằng tiếng Anh. Tuy có ý thức đọc các tạp chí phương Tây để hiểu xu hướng nghiên cứu của họ nhưng tôi lại không hề học cách viết một bài báo khoa học bằng tiếng Anh. Mãi tới năm cuối thời nghiên cứu sinh là năm 1990, tôi gửi cho ba 2 bài báo tôi viết bằng tiếng Nga để ba dịch sang tiếng Anh và đăng ở phương Tây. Lúc đó ba đang ở Áo và ba đã cặm cụi dịch sang tiếng Anh, in lại bài báo (thời đó đây là công việc rất nhọc) và đưa cho đồng nghiệp bên đó xem trước cũng như hỏi ý kiến họ nên gửi đăng ở đâu. Ba không kể nhưng sau này tôi biết, thời gian đó có những lúc ba phải nằm viện phẫu thuật răng, đau đến nỗi bác sỹ đã phải gây mê.

Ba có một người bạn Nhật rất đặc biệt là giáo sư T. Mitsui ở trường tổng hợp Nagoya. Ông chính là người đề xướng và cùng các nhà toán học Nhật đóng góp giúp Viện Toán học xây dựng nhà khách năm nào. Thần tượng của Mitsui là Hồ Chí Minh nên khi sang thăm Việt Nam ông mua ảnh chân dung Hồ Chí Minh về treo. Bước vào phòng làm việc của ông sẽ thấy ngay ảnh Hồ Chí Minh. Các đồng nghiệp của ông ở Việt Nam sau kể với tôi là hồi đó tìm mua ảnh Bác Hồ rất khó vì ngoài hiệu sách toàn ảnh chân dài. Ở trường Nagoya có một nhóm phản đối chiến tranh Việt Nam thời những năm 70

gồm Mitsui, Torii và Hosoe. Với họ, Hồ Chí Minh, Phạm Văn Đồng, Võ Nguyên Giáp là những tên tuổi lớn. Giáo sư Hosoe là chuyên gia hàng đầu của Nhật Bản về lý thuyết điều khiển, ngành của tôi. Năm 1993, tôi liên lạc với giáo sư Hosoe qua giới thiệu của giáo sư Mitsui và được ông mời đến Nagoya làm seminar. Sau seminar đó 2 tháng thì ông mời tôi tới Nagoya một lần nữa. Khi gặp, ông bảo giờ chúng tôi phỏng vấn để tuyển anh làm trợ lý nghiên cứu cho nhóm của tôi, và dẫn tôi sang một phòng có mấy giáo sư nữa để phỏng vấn! Lần đầu tiên trong đời được nghe từ "phỏng vấn" và hoàn toàn không chuẩn bị! Ít lâu sau, ông thông báo là tôi đã được nhận. Rồi nhờ có những bài báo tiếng Anh của tôi, trong đó có bài được một giáo sư nổi tiếng ở Boston (Mỹ) khen đã giải quyết được bài toán mà lâu nay bao nhiêu chuyên gia chưa giải được, ông đưa tôi lên làm giảng viên, thay một giáo sư vốn là thầy của ông vừa về hưu. Khi tôi đến chào trưởng khoa kỹ thuật của trường (dean of engineering) để bắt đầu công việc vào tháng Tư năm 1994, tôi được nghe kể mình là giáo sư trẻ nhất trong lịch sử của trường. Ở Nhật, nhất là trong lĩnh vực kỹ thuật ở những trường lớn, họ thường có bằng Ph.D. tương đương thạc sĩ và sau đó làm trợ lý nghiên cứu khá lâu trước khi được làm giảng viên là bậc thấp nhất trong ngạch giáo sư. Chưa hết, sau tôi mới thấy lúc đó chỉ có tôi và một giáo sư lớn tuổi người Hungary là người nước ngoài trong hàng ngũ giáo sư, chứ trợ lý nghiên cứu người nước ngoài thì hầu như nhóm nghiên cứu nào cũng có, nhiều người trong số họ vốn là giáo sư nữa. Cùng là lý thuyết điều khiển nhưng các vấn đề mà phương Tây và Liên Xô quan tâm hoàn toàn khác nhau: lý thuyết điều khiển bên phương Tây nghiên cứu những bài toán điều khiển thực tế, có thật, nhưng lý thuyết điều khiển của

Liên Xô bị những nhà toán học thuần túy dẫn dắt nên nghiên cứu toàn những thứ tự tưởng tượng không ai biết để làm gì. Hosoe có nhiều lần nói với tôi sau này rằng thực ra ông chẳng hiểu gì nội dung seminar của tôi cả, nhưng cảm nhận tôi là người làm việc rất hăng say và có kiến thức cơ bản tốt và ông cần người như vậy. Ông nói tự hào về quyết định rất đúng đắn này! Tôi được làm việc thoải mái chỗ ông 5 năm và ông trở thành người bạn lớn và gần gũi nhất của gia đình chúng tôi. Vợ chồng ông đã ở bên tôi trong bệnh viện khi chờ vợ tôi sinh con. Sau khi ba mất, một lần vợ tôi nói qua điện thoại với ông rằng giờ chúng tôi chỉ có ông như bậc cha chú trong gia đình và vì vậy cuối tháng Mười một năm ngoái vợ chồng ông lại lục tục sang Úc thăm chúng tôi. Đến cuối năm, khi nhà tôi đi nghỉ ở Hokkaido, cả gia đình ông cũng lên đó cùng. Con gái tôi khi có tin gì vui về chuyện học hành trước đây bao giờ cũng gọi cho ông nội đầu tiên, giờ thì gọi cho ông Hosoe đầu tiên. Khác với người Việt, người Nhật không gọi nhiều người là bạn, nhưng một khi đã là bạn, họ là những người đáng tin cậy nhất. Cũng như ba, Hosoe là người không nói nhiều nhưng làm thâm lặng và giúp đỡ, che chở người khác rất nhiều. Bước ngoặt quyết định trong cuộc đời làm khoa học của tôi là được làm việc với giáo sư Hosoe 5 năm, chịu khó và dâng hoàng theo lời khuyên và tấm gương của cha mình. Có lần khi nghe vợ tôi nói là sao việc gì tôi đã làm là cũng cố gắng làm đến đâu đến đâu rất mất sức thì ba rất mừng, ba bảo vậy là con giống cha. Trong 5 năm đó, nghiên cứu của tôi cũng chuyển sang hướng mới là áp dụng các phương pháp tối ưu vào các bài toán khó trong điều khiển, và được hợp tác với ba, nghiên cứu học hỏi những kết quả của ba, và ước mơ có được một vài kết quả hay như một số kết quả của ba.

Năm 1997 khi đến Nagoya, ba mừng khi nghe tôi làm việc có kết quả và có nhiều cơ hội thăng tiến. Ba kể chuyện đề xuất với ông Võ Văn Kiệt mở trường Toán công nghiệp, một trong những mục đích là để tạo môi trường làm việc cho những người như "tụi mày". Ba đã rất tâm huyết với dự án đó. Năm sau ba nói ba rất giận ông Kiệt đã không đá động gì thêm sau

những lời ủng hộ ban đầu. Mãi về sau ba mới biết dự án này không thực hiện được vì một lý do rất lãng xẹt không phải từ ông Kiệt. Năm 2000, khi tôi hỏi ý kiến ba về chuyện xin vào công dân Nhật để có hộ chiếu đi lại các nước cho dễ dàng, ba nói tổ quốc ở trong tim chứ không phải ở tấm hộ chiếu để đi lại.



GS. Hoàng Tuy, phu nhân, và gia đình con trai Hoàng Dương Tuấn, tại Đà Nẵng năm 2014. Ảnh tư liệu gia đình.

Năm 2003, giữa lúc đang ở vị trí nhiều người mơ ước và sắp được bổ nhiệm lên vị trí quan trọng của trường, tôi quyết định rời nước Nhật của nền công nghệ tiên tiến bậc nhất thế giới sang nước Úc phát triển chủ yếu bằng cách đào tài nguyên xuất khẩu thô. Ông hiệu trưởng bảo tôi là "khùng" vì đang ở vị trí như thế ở nước Nhật lại sang vị trí thấp hơn ở nước Úc lạc hậu (về mặt công nghệ). Trước khi rời Nhật, ba cũng qua chỗ tôi. Khi nghe

vợ tôi than chuyện phải rời nước Nhật, ba nói ba rất hiểu Tuấn, nó đang ở độ tuổi sáng tạo nhất nên muốn dành hết sức cho khoa học. Ba luôn nói tôi đang có điều kiện mà thời ba không thể mơ được nên hãy hết lòng về khoa học. Hai năm cuối ở trường, do sắp được "đề bạt" nên tôi phải tham gia quá nhiều cuộc họp, khiến còn rất ít thời gian cho nghiên cứu. Giờ tôi vẫn nhớ cảm giác căng thẳng như thế nào khi mỗi sáng đến trường, đang



GS. Hoàng Tụy và phu nhân tại Đà Nẵng năm 2014. Ảnh tư liệu gia đình.

say mê với những ý tưởng khoa học một chút là bị cắt ngang bởi cú điện thoại của thư ký "mời giáo sư đi họp". Nói vậy chứ làm sao so sánh được với hoàn cảnh ba những năm 60 thế kỷ trước, khi ba ngày làm việc, tối chong đèn viết kiểm điểm và giải trình chuyện "chuyên môn thuần túy" mà không "hồng". Có vị lãnh đạo cao nhất của ban Tuyên giáo đã đề: *Trường đại học không phải là nơi để các anh nghiên cứu khoa học*. Không thể tưởng tượng nổi "qui hoạch lôm" của ba đã được ra đời trong hoàn cảnh đó.

Năm 2004, lần đầu tiên gia đình tôi về Việt Nam. Ba mẹ tôi rất mừng. Khi nghe con tôi muốn ăn sữa chua, ba bảo để ba đi mua. Lần đầu tiên trong đời tôi thấy ba đi siêu thị ở Việt Nam. Mới mấy hôm mà ba mẹ đã rạng rỡ hẳn vì vui. Năm 2008, tình cờ tôi viết cho ba mẹ là cuộc sống bên Úc khó khăn hơn nhiều so với tôi nghĩ, tiền lương có được bao nhiêu thì cho vào khoản trả nợ nhà băng tiền mua nhà gần hết, thêm các khoản chi phí cho

cuộc sống ngày càng tăng nữa thì có khi không đủ. Vậy mà khi bạn tôi về Việt Nam công tác, ba mẹ tôi nhờ anh mang sang 10 ngàn đôla Mỹ giúp chúng tôi. Hơn ai hết, ba hiểu được những đồng tiền làm ra ở phương Tây đâu có dễ dàng như nhiều người nghĩ. Dù tôi ở đâu, ba cũng quan tâm sao cho tôi tập trung nghiên cứu. Ba mong chúng tôi về nhưng không nói để khỏi ảnh hưởng đến thời gian nghiên cứu của tôi. Chỉ sau khi mẹ tôi mất, khi tôi viết sẽ thăm ba mấy tháng một lần, ba mới trả lời: *Ừ, con về, ba chờ*.

Tháng Bảy năm 2018 ba bắt đầu ốm nặng. Chị tôi nhắn, mấy hôm nay ba thường xuyên nhắc tôi. Nghe vậy tôi liền gọi để nghe ba. Giọng ba yếu và ba chỉ nói đi nói lại rằng ba rất tự hào về tôi. Tôi nghe vậy buồn hơn là vui vì dường như ba đã thấy không còn nhiều sức, không còn nhiều thời gian trên cuộc đời này. Nửa năm sau, sức khỏe ba có tốt hơn chút và khi gặp tôi, ba bảo: *Ba mong có sức khỏe để sang Úc thăm gia đình con*. Cuối tháng

Sáu năm 2019, tôi về thăm ba. Biết trước tôi sẽ đến lúc 9 giờ sáng, ba hỏi cô chăm sóc mấy giờ rồi. Khi nghe là 8 giờ sáng, ba bảo: *Vậy là còn một tiếng nữa con tôi sẽ tới, nó là giáo sư bên Úc.* Ba quá vui khi thấy tôi nên chị tôi bảo "Tuần mà ở lại lâu chắc ba hết bệnh". Ba vẫn còn nhớ con tôi năm nay thi vào đại học Y và ba bảo ba biết ở các nước phương Tây thi vào trường Y khó lắm. Ba sinh động hẳn lên khi tôi ghé tai ba đọc thư thiệp trong trỏ cháu gửi ông nội (nguyên văn bằng tiếng Anh): "Ông ơi, cháu muốn ông mau khỏe. Ở Úc cháu rất nhớ ông và cháu muốn thăm ông ngay sau kỳ thi đại học. Năm sau cháu sẽ ở Việt Nam lâu để thăm ông thường xuyên. Khỏe và vui ông nhé và cháu sẽ gặp ông sớm. Cháu vẽ ông cầm quyển sách mới của ông. Nhưng ba biết sức lực của mình và ba nói với tôi: "Chắc lần này con gặp ba là lần cuối nên ba chào con".

Ba tuần sau, ngày 14 tháng Bảy năm 2019, ba đã ra đi mãi mãi. Như ba đã viết cho tôi cách đây 5 năm "Về phần cá nhân, Ba vẫn luôn thanh thản. Cả đời mình sống tử tế, có trách nhiệm, nên trong tâm bao giờ cũng nhẹ nhàng", và "Nhiều lần tình cờ trong bệnh viện hoặc trong các buổi gặp gỡ thân mật có những người mình mới gặp lần đầu nhưng cũng bày tỏ sự ngưỡng mộ chân thành của họ, những lúc ấy Ba cảm thấy đời không đến nỗi quá bạc bẽo với mình mà xét ra cũng thật công bằng. Mình sống thế nào, dù có những lúc khó khăn, gần như bế tắc, nhưng rồi cuối cùng tâm lòng và sự thanh sạch bao giờ cũng được đền bù xứng đáng, tuy có khi muộn màng". Ông đã nói với hậu thế "Tôi mong tất cả các bạn tiếp tục con đường dù tôi có chết đi" trước lúc ra đi. Ba ơi, con luôn tự hào là chưa bao giờ có một ý nghĩ nào khác ngoài tiếp tục con đường của ba.

Giáo sư Hoàng Tụy – người anh của nhiều thế hệ toán học nước ta⁽¹⁾

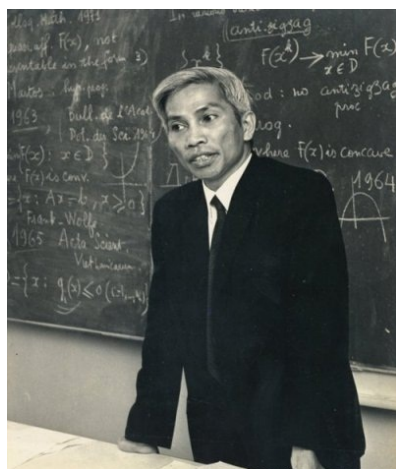
Phan Đình Diệu

Tụy đã được biết tiếng anh từ trước, vào thời gian anh chủ trì Ban Tu thư chuyên việc biên soạn chương trình và sách giáo khoa cho công cuộc cải cách giáo dục phổ thông của nước ta vào những năm 1955-1956 sau cuộc kháng chiến chống Pháp và miền Bắc được hoàn toàn giải phóng, nhưng mãi đến đầu năm 1957 tôi mới được gặp anh và học với anh, khi anh giảng dạy môn "Giáo học pháp" cho khoá sinh viên khoa Toán Đại học Sư phạm Khoa học của chúng tôi vào mấy tháng cuối của khoá học đó. Môn

học Giáo học pháp của anh tụy chỉ có mục đích là truyền cho chúng tôi những kiến thức cơ bản về phương pháp dạy học môn Toán ở bậc học phổ thông để chúng tôi khỏi bỡ ngỡ khi hành nghề dạy học, nhưng cho đến nay tôi vẫn còn nhớ những bài giảng của anh, vượt lên trên những phương pháp cụ thể này nọ để truyền thụ kiến thức, anh còn giảng cho chúng tôi biết nhiều điều cơ bản về bản thân môn Toán học, ý nghĩa của Toán học, vai trò của Toán học trong nhận

⁽¹⁾Bài đã in trong cuốn *Sĩ phu thời nay* của các tác giả Nguyễn Ngọc, Phan Đình Diệu, Hà Huy Khoái, Ngô Việt Trung, và Nguyễn Xuân Xanh, NXB Tri Thức (2008). Đây là cuốn kỷ yếu mừng thọ giáo sư Hoàng Tụy 80 tuổi.

thức, những điều lý thú trong sáng tạo toán học và cả trong việc học nói chung. Nhiều điều tôi lĩnh hội được trong các bài giảng của anh về cái “tri chi” và “bất tri” trong thuyết “học” của Khổng tử, đôi điều triết lý về chuyện học, chuyện luận lý của Platon, Aristote,... tuy chỉ mới thoáng qua nhưng đã gợi trí tò mò trong tôi, và có thể nói không ngoa rằng chính những gợi mở tò mò đó về sau này đã có ảnh hưởng hướng một phần lớn cuộc đời tôi dần thân vào Lôgich toán và cơ sở toán học với hoài vọng hiểu được thấu đáo “toán học là gì?” và “vì sao cần toán học?”, dù cho đến nay đã hiểu được thật thấu đáo các điều đó chưa thì thú thật tôi cũng không dám khẳng định.



Sau khi tốt nghiệp Đại học Sư phạm khoa học hè năm 1957, tôi được giữ lại làm cán bộ giảng dạy của trường, và đến những năm 1959-1960, tôi được sung vào “đội quân tự nguyện” do anh chỉ huy đi làm ứng dụng toán học (chủ yếu là vận trù học) ở một số cơ sở sản xuất ở Hà Nội. Hồi đó, lúc đầu tôi cũng chưa hiểu hết lý do vì sao vừa bảo vệ xong luận án khoa học ở Liên Xô về lý thuyết hàm số thực, anh đã nhảy sang làm ứng dụng vận trù học, nhưng rồi phong trào ứng dụng đang sôi nổi, nên tất cả chúng tôi đều hăm hở theo anh đi làm ứng dụng dù

chỉ với một chút vốn kiến thức nhập môn về vận trù học (chủ yếu là bài toán qui hoạch tuyến tính, đặc biệt là bài toán vận tải, và bài toán qui hoạch mạng PERT). Đội quân theo anh làm ứng dụng toán học khá đông, có “bộ tổng chỉ huy” do anh đứng đầu, được chia thành nhiều tổ, nhóm xuống tận một số nhà máy, cơ sở giao thông vận tải, thậm chí hợp tác xã nông nghiệp.

Thành công của đợt làm ứng dụng đó, theo tôi nhận thức được, chưa phải là những hiệu quả kinh tế của công việc, mà là ở chỗ cho chúng tôi một vài kinh nghiệm và hiểu biết bước đầu về cái phức tạp của cuộc sống thực tế và những đòi hỏi cần có nhiều kiến thức phong phú hơn về cuộc sống đó ngoài những hiểu biết thuần túy toán học nếu muốn thực sự ứng dụng toán học vào thực tế một cách có hiệu quả. Hồi đó tôi mới ngoài hai mươi, còn nhiều ham muốn, nên rồi cũng còn phải trải qua nhiều háo hức và lúng túng trước sự quyền rũ của những vẻ đẹp thuần túy trừu tượng trước khi hiểu được những điều sâu sắc của yêu cầu thực tiễn, còn với anh, như sau này tôi phỏng đoán, anh đã có đủ những kiến thức và kinh nghiệm chín chắn hơn, nên đợt ứng dụng thực tế đã cho anh nhìn thấy cả những yêu cầu hiểu biết sâu sắc hơn thực tiễn cuộc sống, đồng thời cũng cả những yêu cầu cần có thêm nhiều công cụ toán học sắc bén hơn hầu có thể giải quyết các bài toán phức tạp trong cuộc sống thực tế. Và, phải chăng vì thế mà vào những năm đầu của thập niên 1960 anh đã chuyển hẳn từ hướng nghiên cứu lý thuyết hàm số thực sang hướng nghiên cứu tìm kiếm các phương pháp và thuật toán giải các bài toán qui hoạch toán học, mà cụ thể là các bài toán tối ưu phi tuyến.

Vào một buổi sáng năm 1964, khi đó là một nghiên cứu sinh của Khoa Toán-Cơ thuộc Đại học Tổng hợp Mátxcơva, tôi cùng một số bạn bè thấy xuất hiện trên tờ tạp chí khoa học hàng đầu *Báo cáo của Viện Hàn lâm khoa học Liên Xô* một công trình nghiên cứu của anh với đầu đề “Bài toán qui hoạch lổm dưới các ràng buộc tuyến tính”, thoạt đầu chúng tôi cũng vui mừng như mỗi khi thấy một công trình nghiên cứu của một tác giả Việt nam trên tạp chí Liên Xô, nhưng rồi chỉ một thời gian sau, thấy bài nghiên cứu đó được trích dẫn nhiều không những trên các tạp chí khoa học Liên Xô mà còn trên nhiều tạp chí khoa học phương Tây, chúng tôi lấy làm tự hào hiểu ra rằng anh đã có

một công trình nghiên cứu có giá trị khoa học lớn, có ý nghĩa quốc tế, trong lĩnh vực nghiên cứu của anh. Trong nghiên cứu khoa học, có được một công trình nghiên cứu được công nhận là có giá trị, được nhiều người biết đến, đã là rất đáng quý. Còn nếu đó là một công trình được nhiều người trích dẫn và sử dụng, có tác dụng mở đường cho một hướng nghiên cứu mới, gợi được nhiều ý tưởng sáng tạo cho nhiều công trình mới,... thì đó là một sự kiện đặc biệt hiếm hoi, một công trình có tính chất khai phá, mở đường dẫn lối. Bài báo của anh Tuy nói trên, tuy chỉ vắn vắn nằm gọn trong 4 trang tạp chí, nhưng quả thực đã là một công trình có tính chất khai phá như vậy.



GS. Hoàng Tuy và Thủ tướng Phạm Văn Đồng, người đứng bên trái.

Tiếp theo công trình cơ bản kể trên, anh cũng đã mở rộng hoạt động nghiên cứu của mình sang nhiều vấn đề khác, như các bài toán qui hoạch lồi, và do đó các vấn đề của giải tích lồi làm cơ sở cho lý thuyết tổng quát các bài toán cực

trị, các bài toán minimax cùng với các thuật toán tính điểm bất động,... Trong các vấn đề này, anh cũng đã đạt được nhiều kết quả lý thú và quan trọng, được giới chuyên môn trên thế giới đánh giá cao. Rồi sau đó, vào những năm cuối của

thập niên 1970, khi ý nghĩa mở đường của công trình 1964 về qui hoạch lõm của anh đã được công nhận rộng rãi trên thế giới, phương pháp lát cắt Tuy (Tuy-cut) đã trở thành phổ biến trong việc nghiên cứu các thuật toán giải các bài toán qui hoạch tối ưu phi tuyến, thì anh đã cùng với các học trò của mình tiếp tục trở lại với các ý tưởng do chính mình đề xuất để hoàn thiện các nghiên cứu về qui hoạch lõm, mở rộng các nghiên cứu sang các bài toán qui hoạch phi tuyến khác, và đi đến việc tạo cơ sở cho một lý thuyết thống nhất về tối ưu toàn cục (global optimization). Hướng nghiên cứu quan trọng này đã được anh khởi xướng, qui tụ được không những nhiều đồng nghiệp và học trò trong nước hình thành và phát triển nên một trường phái toán học đặc sắc ở Hà Nội, mà còn góp phần phát triển hướng nghiên cứu về các bài toán tối ưu hoá tại nhiều nơi trên thế giới.

Thời gian phát huy nhiều ý tưởng sáng tạo đặc sắc này của anh cũng chính là thời gian anh chuyển về công tác tại Viện Toán học (thuộc Ủy ban Khoa học Kỹ thuật nhà nước, rồi sau đó thuộc Viện Khoa học Việt Nam), cùng giáo sư Lê Văn Thiêm và các học trò, đồng nghiệp xây dựng Viện trong những năm tháng đầu gian khổ, được lớn mạnh dần cho đến ngày nay. Viện Toán học, dưới sự lãnh đạo của các nhà toán học hàng đầu là GS Lê Văn Thiêm, GS Hoàng Tuy, được tiếp nối bởi các thế hệ toán học trẻ và tài năng của nước ta, cho đến nay được đánh giá là một viện nghiên cứu khoa học nghiêm túc, có những đóng góp quan trọng trong việc phát triển khoa học của nước nhà về các mặt nghiên cứu cơ bản, thúc đẩy ứng dụng, và tham gia đào tạo nguồn nhân lực cho đất nước. Trong khi tập trung tài năng sáng tạo của mình cho những vấn đề lý luận cơ bản của các bài toán tối ưu hoá, anh Tuy vẫn

dành nhiều suy tư cho việc phát triển một nền toán học hiện đại và cân đối hơn cho đất nước. Nhiều lần tôi được nghe anh tâm sự về những băn khoăn của anh là ta còn thiếu những tài năng toán học trong một số lĩnh vực trừu tượng đỉnh cao vốn được xem là bộ mặt hiện đại của toán học thế giới, cũng như còn yếu trong một số lĩnh vực ứng dụng đòi hỏi những tư duy và quan điểm mới của toán học và khoa học nói chung. Tôi nhớ có một quãng thời gian khá dài vào thập niên 1980 tôi được cộng tác cùng anh tổ chức và chủ trì một xê-mi-ne tại Viện Toán và Viện Tin học về Khoa học hệ thống, xê-mi-ne đã tập hợp được khá đông đảo anh chị em thuộc nhiều ngành khác nhau cùng tìm hiểu về quan điểm và các cách tiếp cận nghiên cứu hệ thống, triển vọng ứng dụng của các tư tưởng và phương pháp hệ thống,..., tiếc rằng xê-mi-ne đó về sau đã không tiếp tục được. Chúng ta cũng nhớ rằng, cùng với GS. Lê Văn Thiêm, anh Tuy đã tham gia trên thực tế việc lãnh đạo Hội Toán học Việt Nam trong nhiều hoạt động của Hội vào các thập niên từ 1960 về sau, đặc biệt là trong việc tổ chức các hình thức bồi dưỡng và đào tạo các năng khiếu toán học trẻ, đưa học sinh nước ta tham gia các kỳ thi Olympic toán học quốc tế hàng năm, v.v... Trong những năm gần đây, tuy tuổi đã cao, anh vẫn chưa ngừng các hoạt động sáng tạo toán học của mình, và chúng ta đều biết rằng bên cạnh các hoạt động sáng tạo khoa học đó, anh đã tham gia rất tích cực vào các hoạt động nhằm chấn hưng nền giáo dục nước nhà. Nhiều bài viết, nhiều ý kiến sắc sảo, nhiều đề xuất mạnh dạn của anh đã được dư luận của các nhà giáo dục, khoa học, trí thức và đông đảo quần chúng đồng tình và tán thành, hy vọng sớm muộn sẽ được thực hiện trong thực tế.

Là một nhà toán học uyên bác, anh Tuy đồng thời cũng là một trí thức hiểu nhiều

biết rộng về những vấn đề phát triển kinh tế và xã hội, và do vậy, anh cũng luôn có nhiều những nghĩ suy và trăn trở trước tình hình phát triển của đất nước ta, đặc biệt là trong thời kỳ sau chiến tranh từ 1975 đến nay. Tôi biết, và cũng đã một đôi lần được tham gia cùng với anh trong những buổi gặp gỡ với một số vị lãnh đạo để góp ý kiến về những vấn đề phát triển đất nước, và tôi vui mừng nhận thấy rằng những ý kiến của anh bao giờ cũng có sự cân nhắc chín chắn, nhưng luôn thẳng thắn, trung thực, đầy tâm huyết và thể hiện sâu sắc những tư tưởng mới của thời đại.

Tôi là một người học toán và làm toán thuộc lớp đàn em của GS. Hoàng Tụy. Suốt những năm tháng học tập và nghiên cứu của mình, tôi luôn nhìn thấy ở anh một tấm gương của sự kiên trì học tập và sáng tạo để mình ngưỡng mộ và noi theo. Cũng như đồng đảo anh chị em làm Toán ở nước ta, đặc biệt các anh chị em trưởng thành từ sau cuộc kháng chiến chống Pháp đến nay, tôi luôn xem anh là người anh lớn của nhiều thế hệ toán học nước ta. Nhân dịp đại thọ 80 tuổi của anh, xin gửi đến anh lời kính chúc sức khỏe, hạnh phúc và tiếp tục có thêm nhiều thành tích trong sáng tạo.

Tháng 8 năm 2007

Nhớ thầy Hoàng Tụy

Phan Quốc Khánh⁽¹⁾

Tôi không may mắn được học và làm việc trực tiếp nhiều với giáo sư Hoàng Tụy. Nhưng mối liên hệ lâu dài với ảnh hưởng lớn của giáo sư đến cuộc đời gắn với toán của mình làm những kỷ niệm về ông luôn sống mãi trong tôi. Tôi vẫn nhớ rất rõ năm 1959, khi đang học lớp năm (lớp đầu cấp hai hệ mười năm) đã mê mẩn với bài trên báo Nhân Dân giới thiệu Hoàng Tụy, người Việt Nam đầu tiên bảo vệ luận án phó tiến sĩ (PTS), ở Đại học Lô-môn-ô-xốp, Liên Xô, danh tiếng hàng đầu thế giới lúc đó, về lý thuyết hàm thực. (Thời đó nước ta (Miền Bắc) chỉ có vài tờ báo, chủ đạo, phổ biến và uy tín tuyệt đối là báo Nhân Dân; ngay cả trẻ 13 tuổi như tôi cũng được dạy, và cũng thấy hay, là phải đọc báo Nhân Dân, nhất là bài xã luận.) Có lẽ đây là cảm hứng quyết định dẫn tôi đến toán học. Thực tế lúc đó cô Tâm, giáo viên chủ nhiệm lớp 5B,

Trung Vương A của tôi và đồng thời dạy môn toán, đang báo với mẹ tôi là tôi học kém và lười. Nguyên nhân chính là mới đầu năm học này tôi chuyển về từ Khu học xá của Việt Nam (ở Nam Ninh, Trung Quốc để tránh bom đạn trong chiến tranh chống Pháp) nên hơi lạ với chương trình học ở nhà, rồi lại bị ốm nằm viện khá lâu, nên đuối và chán học. Tấm gương phó tiến sĩ Hoàng Tụy làm tôi thay đổi, quyết tâm học toán, rồi đến vật lý và các môn khác. Ít lâu sau, khi làm bài kiểm tra toán 1 tiết (chỉ vài lần trong năm, vì thường chỉ làm bài 15 phút), tôi là một trong 2 người làm xong rất sớm và ngồi chờ. Cô Tâm thấy lạ nên xuống xem bài tôi và quay lên, tỏ ra hài lòng. Đến kỳ 2, cô đã viết trong sổ liên lạc (giữa trường với gia đình) của tôi “học giỏi, nhất là về toán lý”. Ít năm sau tôi thường mua Tạp chí Toán Lý (tiền thân của Tạp chí Toán

⁽¹⁾Đại học Quốc tế, ĐHQG Tp HCM. Email: pqkhanhus@gmail.com

học) về xem, tuy là chẳng hiểu gì, nhưng đã rất thích và nhớ mãi bài về đôi hợp bộ N của Nguyễn Cảnh Toàn. Tôi đọc đi đọc lại vì mới trước đó có bài trên báo Nhân Dân, ca ngợi ông bảo vệ luận án Tiến sĩ Khoa học ở Liên Xô trước hội đồng gồm một viện sĩ thông tấn và nhiều giáo sư nổi tiếng về đề tài này. Điểm mốc thứ hai mà tôi được liên quan đến GS. Hoàng Tụy là lớp ngoại khoá toán do ông tổ chức năm 1963 cho học sinh cấp 3 (thời đó lớp là đặc biệt, vì chưa có trường chuyên, lớp chọn). Tôi qua được kỳ kiểm tra “đầu vào” cũng nhẹ nhàng và rất say mê với bài giảng về lát và lưới của GS. Lê Văn Thiêm (Phó Hiệu trưởng ĐH Tổng hợp), bài giảng về lý thuyết tập hợp và phép toán mệnh đề của GS. Hoàng Tụy (Chủ nhiệm khoa Toán, mà tôi đã rất ngưỡng mộ, của trường này), bài giảng về xác suất của PTS. Trần Vinh Hiến (mới bảo vệ ở Liên Xô về), cùng nhiều giờ dạy thay của thầy My, thầy Lâm (mới tốt nghiệp và trở thành giảng viên khoa Toán). Sau này thầy My vẫn hay gọi đùa lớp ngoại khoá này là A(-1), vì các thể hệ học sinh chuyên toán A0 đã nổi tiếng.

Năm 1964, hết lớp 10, tôi được xếp trong danh sách dự kiến (tôi nhớ là không được hỏi gì trước đó) sang học toán ở Đại học Lômônôxốp. Nhưng tôi cũng như đa số các bạn của mình đều đăng ký, và thực tế chỉ nghĩ đến, đi thanh niên xung phong phục vụ chiến đấu chống Mỹ xâm lược. Năm 1964 là giai đoạn cuối rất ác liệt của chiến tranh đặc biệt ở Miền Nam (Mỹ sắp đổ quân vào ào ạt mở đầu chiến tranh cục bộ). Báo đài liên tục đưa tin chiến thắng vang dội với những tấm gương oanh liệt từ chiến trường. Chúng tôi cũng rất mê buổi nói chuyện của anh Tôn Gia Khai, học sinh cũ của trường, là thanh niên xung phong từ chiến trường về. (Bạn học Tôn Kim Diên của tôi là

em ruột anh Khai, con của nhân sĩ nổi tiếng Tôn Quang Phiệt, Tổng Thư ký Ủy ban Thường vụ Quốc hội.) Nhưng cuối cùng, cả hai hướng đi tiếp đó của đời tôi đều “không thành”. Không hiểu sao, nhà trường đang tập trung tuyên truyền động viên tham gia thanh niên xung phong, lại quay sang “chỉ thị” chúng tôi phải chuẩn bị học đại học để phục vụ đất nước sau này. Sự kiện lớn đồng thời lúc đó là nhà nước bắt đầu ngừng chương trình gửi sinh viên, thực tập sinh, cộng tác viên khoa học sang Liên Xô và Đông Âu nên danh sách mà tôi được dự kiến sang học Đại học Lômônôxốp không còn dùng đến nữa. Chúng tôi cũng tích cực đọc các bài chống chủ nghĩa xét lại Liên Xô và một số Đảng Cộng Sản ở Châu Âu của Việt Nam và Trung Quốc in, rất phổ biến lúc đó. Bây giờ tôi cũng thấy lạ sao khi còn trẻ con mà chúng tôi lại quan tâm và cũng khá hiểu biết về chính trị như vậy. Thế là chúng tôi rủ nhau thi vào Đại học Tổng hợp Toán. Sau mấy tháng không có tin gì và dường như cũng không lo lắng chờ đợi lắm, đến ngày có thông báo, tôi đến hè phố phía trước Đại học Tổng hợp ở đường Lê Thánh Tông và thấy tên mình trong danh sách trúng tuyển. Danh sách lúc đó chỉ có tên và ngày sinh mà không có điểm thi. Các bạn tôi học rất giỏi là Vũ Công Lập lại được chuyển sang học khoa Lý, Đào Văn Lượng sang học Hoá. Tôi hiểu rằng nhà nước cần “phân phối sang các ngành” vì giai đoạn đó đa số học sinh giỏi đều thi vào ngành toán. (Sau này hai bạn tôi đều học giỏi bậc nhất khoa.) Nhân đây cũng giải thích thêm về sự may rủi và cuốn theo dòng thời cuộc của thể hệ chúng tôi. Ngay năm 1965 sau đó, không còn thi tuyển sinh đại học nữa mà học sinh tốt nghiệp lớp 10 được xét để gọi vào các trường đại học (một số không trong danh sách đó năm trước cũng được gọi, vì hình như “chỉ tiêu” nhiều hơn hẳn). Đồng

thời rất nhiều học sinh tốt nghiệp năm đó bất ngờ được tập trung để sang học đại học ở Trung Quốc, trong đó có em gái tôi nên tôi biết rõ. Nhưng than ôi, không may cho họ là vừa xong một năm học tiếng Trung trên đất bắc, lại quay về nước tất cả và vào đại học chậm một năm, vì Cách mạng Văn hoá được Mao Trạch Đông thổi bùng lên trên đất nước hơn 600 triệu dân này.

Tôi rất ấn tượng với buổi Khoa Toán gặp mặt sinh viên mới chúng tôi năm 1964, có mặt GS. Tạ Quang Bửu, GS. Lê Văn Thiêm, GS. Hoàng Tụy, và nhiều thầy có danh tiếng khác. GS. Tạ Quang Bửu (Bộ trưởng Bộ Đại học) bắt đầu bài phát biểu khai mạc buổi gặp mặt rất hài hước: “Đáng lẽ thầy Thiêm, thầy Tụy phát biểu mới đúng, nhưng các thầy lại đề nghị tôi nói cho thêm phần long trọng; vậy tôi xin nhận trách nhiệm long trọng này”. Một trong các môn học đầu tiên, bên cạnh các môn chính trị, là Toán nhập môn của thầy Tụy. Phần chính của môn học là các bài giảng mà tôi đã học ở lớp ngoại khoá của thầy gần hai năm trước, kể cả bài tập cũng chính thầy Tụy đảm nhận. Tiếc là do nhút nhát chỗ đông người, tôi không hề xung phong lên chữa bài tập mặc dù đã giải được (do quen với môn học rồi), kể cả khi thầy rất mong có người lên bảng giải bài khó mà không có ai. Nếu lúc đó tôi mạnh dạn “ghi điểm” trước thầy thì có lẽ tôi đã sớm và thuận lợi hơn khi “vào nghề Tối ưu Toán học”. Số là sang học kỳ 2 năm thứ nhất, khoa bắt đầu chia lớp ra hai ban Toán và Cơ; tôi ghi nguyện vọng là Toán vì đã nhắm đến Ban Vận trù-Giải tích hàm của thầy Tụy, nhưng lại được xếp học Cơ. Tôi xin đổi nhưng không được (ít ngày sau tôi biết nguyên nhân là anh Hoàng Thọ Được, lớp trưởng, đảng viên cán bộ đi học, muốn tôi vào Cơ để học nhóm với anh). Nếu lúc đó thầy Tụy biết

đến tôi thì có lẽ tôi đã dám lên xin với thầy.

Thời gian học ở nơi sơ tán, Phú Yên, Đại Từ, Thái Nguyên, rất thiếu thốn gian khổ, nhưng chúng tôi luôn mơ về tương lai toán học của mình để cố gắng, chính là nhờ được nghe về sự nổi tiếng và gương sáng của thầy Tụy, thầy Đường cùng chuyện về các nhà toán học, phổ biến nhất được nghe và đọc là các nhà toán học Liên Xô thời sau Cách mạng Tháng Mười, đã rất khích lệ chúng tôi. Tháng 8 năm 1966 thầy Tụy đi dự Đại hội Toán học Quốc tế ở Mátxcova về, nói chuyện cho sinh viên nghe rất hay. Tôi mê mẩn khi thầy kể đến giải thưởng Fields của Cohen về Bài toán Continuum, bài toán hàng đầu trong 23 bài toán của Hilbert. Sau đó, mặc dù học ban Thủy khí, tôi say mê sưu tầm và đọc về những vấn đề đại cương toán học (dù chẳng hiểu gì) và theo học các môn như đại số đại cương, tô pô tổng quát ở mấy ban chuyên ngành của lớp trên tôi một năm. Cuối năm 1967, các GS. Tạ Quang Bửu, Lê Văn Thiêm, Hoàng Tụy dẫn GS. Grothendieck (giải Fields năm 1966, rất ủng hộ Việt Nam chống Mỹ) lên thăm Khoa Toán và giảng bài ở nơi sơ tán. Đang học kỳ 2 năm thứ ba, nhưng tôi háo hức nghe giảng (buổi này thầy Phan Đức Chính dịch), có lẽ với vẻ mặt hơi tươi cười vì “người Việt ta hay cười”, vì có hiểu gì đâu mà tập trung suy nghĩ. Tôi còn nhớ là giữa chừng GS. Grothendieck tự nhiên dừng giảng mà so sánh toán học ở Việt Nam với một nước khá phát triển. Mọi người đều nghĩ Grothendieck pha trò, nhưng ngay sau đó biết ông pha hài hước vào một tình huống cụ thể, vì ông tiếp lời “tôi mới giảng bên đó những nội dung này thì thấy người nghe chăm chú theo dõi nhưng có vẻ đăm chiêu, hình như khó hiểu, còn ở đây mọi người cười vui tiếp nhận thoải mái”.

Cuối năm 1972, tôi được cử đi thi tuyển NCS và quyết định thi theo chuyên ngành Phương trình vi phân, vì tôi chỉ có thể soạn đề cương nghiên cứu về điều khiển tối ưu (tham khảo từ sách *Lý thuyết toán học các quá trình tối ưu* của Pontryagin-Boltyanskii-Gamkrelidze-Mishchenko, và một số bài báo về trò chơi đuổi bắt và chạy trốn, đều bằng tiếng Nga) và vốn thích “tối ưu”; mà không thấy có chuyên ngành Tối ưu để thi. Tôi thi kém, chỉ may mà đổ vào khoảng cuối danh sách chung những người trúng tuyển vì thi trái chuyên ngành học và từ khi tốt nghiệp năm 1968, tôi được phân công vào quân đội công tác, gần như không có thời gian và điều kiện nghiên cứu. Chuyên ngành Phương trình vi phân của thầy Hoàng Hữu Đường và chuyên ngành Vật lý lý thuyết của GS. Nguyễn Văn Hiệu được coi là có đề thi khó hàng đầu, nhiều người thi năm trước và các năm sau bị trượt. (Lớp tôi có bạn Đỗ Văn Lưu, tốt nghiệp giỏi chính ban Vận trù-Giải tích hàm của thầy Tụy rồi về công tác ở Viện Toán, trong nhóm của thầy, lúc đó đã vững vàng hơn tôi nhiều, nhưng chưa được cử đi thi. Năm 1980 anh Lưu bảo vệ luận án PTS trong nước vào những đợt đầu tiên mà tôi lại vô tình may mắn được tham gia hội đồng). Từ cuối năm 1974, tôi sang NCS tại Viện Toán, Viện Hàn lâm KH Ba Lan ở Vácxava cũng như sau này đi dự hội nghị và hợp tác khoa học nhiều nơi, thì thấy là cứ nói đến toán học Việt Nam thì tên đầu tiên được nước ngoài nhắc đến là Hoàng Tụy. Thấy tôi, GS. Rolewicz, kém thầy Tụy 5 tuổi, có lần “khoe” với tôi là tại một hội nghị, đã ở chung phòng với GS. Hoàng Tụy và nói chuyện rất thú vị (có lẽ Ba Lan cũng nghèo nên đã bố trí ở chung phòng như vậy). Ngay nổi tiếng như GS. Ekeland khi nói chuyện với tôi cũng nói “tự hào” vì có quen biết cá nhân với Hoàng Tụy.

Kỷ niệm về một lần được mượn sách thầy Tụy cũng rất ấm lòng tôi. Vào khoảng đầu thập niên 80, tôi rất cần tìm tham khảo một quyển sách chuyên môn mà các thư viện (vốn cũng nghèo nàn) không có. Một người mách là thầy Tụy có và thầy cũng có thể cho mượn đấy. Nhà tôi lại chỉ cách nhà thầy khoảng 50m, thầy ở một căn hộ nhỏ trong nhà B5 (xây từ đầu những năm sáu mươi) còn tôi ở nhà mẹ là một nửa căn hộ “hiện đại” hơn một xíu trong nhà B15 (xây xong và được ở từ 1970), cùng trong khu tập thể Kim Liên, quận Đống Đa, Hà Nội. Hôm đó là lần đầu tôi đến nhà thầy (vì suốt thời gian này tôi là giáo viên Trường Đại học Kỹ thuật Quân sự ở Vĩnh Phú, cách Hà Nội hơn 60km, và chỉ đạp xe về mỗi tháng một lần). Vừa vào nhà tôi giật mình vì thấy hai thầy Tụy, một lát sau mới biết người trẻ hơn một tí chút nhưng đầu cũng bạc trắng hoàn toàn là thầy Hoàng Chúng, em ruột thầy Tụy. Thầy nói ngay với tôi là các em mượn sách thì thầy cho mượn ngay nhưng phải giữ cẩn thận và nhớ trả đấy. Thầy dẫn tôi đến giá sách đóng thành tủ riêng khá lớn rồi tìm sách rất nhanh, đưa tôi và lấy một kẹp giấy treo ngay đầu tủ ghi tôi vào danh sách người mượn gồm tên người mượn, tên sách, ngày mượn, ngày trả và cột cuối để ký tên. Tôi rất mừng vì có tài liệu. Sự nhiệt tình giúp học trò và đồng nghiệp cùng cách làm việc cẩn thận, chính xác của thầy làm tôi cảm phục và cố gắng học theo cho đến nay. Nhưng cũng hơi buồn là các thế hệ sau này tuy giỏi giang và có điều kiện hơn hẳn lại rất ít người có tính cẩn thận như thế.

Tôi được nghe thầy Tụy giảng chuyên đề và báo cáo ở hội nghị nhiều lần và thấy các bài nói đều rất hay, không những về nội dung mà cả phương pháp trình bày. Đặc biệt là tôi rất kính nể tác phong

của thầy là khi chứng minh cụ thể trên bảng cũng không cầm tài liệu, có vẻ cũng không thuộc lòng, mà là tự nghĩ ngay khi nói. Tôi chưa thấy thầy “bị tắc” bao giờ. Lúc giảng bài nhiều khi tôi cũng muốn bắt chước ông mà không được. Tôi thường xuyên nhắc đến ông cho sinh viên và học viên, mong các em coi đó là nguồn cảm hứng để học toán, theo nghề toán, đồng thời giới thiệu sách của ông cho học trò, và cảm nhận là có tác dụng thực sự. Tôi cũng dùng các sách về quy hoạch tuyến tính và hàm thực và giải tích hàm của thầy khi soạn giáo trình dạy sinh viên. Nói riêng, mặc dù không chuyên về thuật toán và tối ưu toàn cục, tôi vẫn soạn môn tối ưu hoá toàn cục theo sách của ông để dạy cao học và NCS.

Ai cũng cảm phục thầy vì khi đã rất cao tuổi, thầy vẫn giữ được nếp nghiên cứu, suy nghĩ sâu và nhạy bén. Đầu năm 2013, khi nhóm tôi tổ chức hội thảo quốc tế ở Viện Nghiên cứu Cao cấp về Toán (VI-ASM), tôi viết mail và gọi điện mời GS. Hoàng Tuy trình bày báo cáo mời cùng GS. Rockafellar và GS. Wets, các chuyên

gia hạng nhất thế giới về tối ưu hoá và các lĩnh vực liên quan, nhưng nghĩ là để tỏ sự tôn trọng chứ ông khó nhận lời được vì đã yếu. Không ngờ ông nhận lời ngay và nói là rất thú vị khi được báo cáo cùng Rockafellar và Wets. Quả thật không những ông trình bày suốt một buổi mà còn hào hứng tham gia nhiều buổi của hội thảo. Tôi cũng tự hào vì các giáo sư Rockafellar và Hoàng Tuy chăm chú nghe mình báo cáo. Vài ngày trước hội thảo, GS. Wets báo gấp là không đến được vì mệt; GS. Rockafellar và GS. Hoàng Tuy cũng buồn khi biết tin này vì mọi việc đã sắp xếp ổn định cả. GS. Wets nhờ GS. Rockafellar trình bày hộ phần một báo cáo của ông và nhờ tôi phần hai (vì khi ở UC Davis một năm vào 2010 tôi hợp tác với ông về vấn đề này).

Thỉnh thoảng thầy Tuy có email cho tôi trao đổi chuyên môn hoặc nhờ làm phản biện bài mà ông làm biên tập viên chuyên môn cho *Journal of Global Optimization*. Chẳng hạn tôi còn giữ được thư dưới đây, nhân một lần thầy nhờ tôi đọc và góp ý một bài mới đang muốn gửi cho Rockafellar xem trước khi gửi đăng.

From: Tuy Hoang <htuy@math.ac.vn>
Date: Mon, Apr 28, 2014 at 9:19 AM
Subject: bai viet
To: pqkhanhus <pqkhanhus@gmail.com>

Anh Khánh thân mến,

Cám ơn anh đã chịu khó đọc bài viết mới của tôi và cho ý kiến. Về cái mistake anh nói đó thì tôi nghĩ không phải là mistake mà là trình bày chưa đủ rõ. Vì vậy tôi có viết lại chỗ ấy cho rõ hơn (chỉ xen một biểu thức của S giữa dấu bằng (=) ở giòng thứ hai từ dưới lên ở trang 2). Tôi đã gửi lại anh bài viết có sửa chữa nhỏ đó, anh có nhận được không? Vì không thấy tin anh nên hôm nay tôi gửi lại anh lần nữa, mong anh cho biết ý kiến.

Tôi định submit sớm, nhưng muốn chắc chắn không sai sót gì vì ở tuổi tôi có khi phạm những sai sót vớ vẩn vì trí nhớ suy

nhược và khả năng làm việc sáng suốt không như xưa.

H. Tụy

Khi GS. Hoàng Tụy 90 tuổi, tôi xúc động và vui mừng vì nhận được sách *Convex Analysis and Global Optimization* của thầy, do Springer in lần thứ hai cuối năm 2016, với dòng viết tay của thầy “Thân tặng anh Phan Quốc Khánh, Hà Nội, ngày 20/6/2017”. Đây là “revised and enlarged edition to give up-to-date account of the field, in response to the needs of research, teaching, and applications in the years to come” mà ông đã dồn sức vào cuối đời để có dấu ấn và cũng rất tâm đắc với sách. Tôi ngạc nhiên hơn vì sau đó được các anh ở Viện Toán cho biết giáo sư có rất ít bản và hầu như chỉ tặng mấy bạn nước ngoài.

Tôi vui mừng được các anh Viện/Hội Toán học mời viết về kỷ niệm với GS. Hoàng Tụy. Các anh nêu mục đích khá lớn cho các bài để in trong một số đặc biệt nào đó kỷ niệm Ông. Tôi biết mình không góp phần vào mục đích đó được mấy, vì

không có liên hệ nghề nghiệp với giáo sư nhiều. Nhưng tôi mạnh dạn viết những kỷ niệm suốt nhiều năm về Ông, với ý muốn nói là Ông đã ảnh hưởng rất lớn đến sự học toán, làm toán của tôi. Đồng thời cũng mong những việc cụ thể tôi kể sẽ góp phần nhỏ bé phản ánh cuộc đời có thể nói là vinh quang và đáng khâm phục của GS. Hoàng Tụy. Tôi nghĩ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, Hội Toán học Việt Nam, Đại học Quốc gia Hà Nội, và có thể nhiều tổ chức khác nữa, nên đề nghị nhà nước đặt tên ông cho một đường ở Hà Nội, vì ông xứng đáng không kém gì nhiều nhà văn, nhà thơ, nghệ sĩ, hoặc trí thức từ thời thuộc Pháp hay Việt kiều được đặt tên phố. Bản thân tôi lại nghĩ chính những danh nhân trưởng thành hoàn toàn dưới chế độ mới đáng được xét đến.

Tp. Hồ Chí Minh, ngày 14/2/2020

Hoàng Tụy – cha đẻ của tối ưu toàn cục

Lê Dũng Mưu⁽¹⁾, Lê Xuân Thanh⁽²⁾

Nhân dịp *Thông Tin Toán học* ra số kỷ niệm về giáo sư Hoàng Tụy, người mở hướng nghiên cứu Tối ưu toàn cục, chúng tôi xin có đôi lời dưới đây về Tối ưu toàn cục.

Đến nay, Tối ưu toàn cục (Global Optimization) đã trở thành một bộ môn quan trọng của Tối ưu hóa, và sự mở đường của GS. Hoàng Tụy cho bộ môn này đã được cộng đồng toán học thế giới thừa nhận.

Trong Tối ưu hóa, người ta chia ra khá nhiều lớp bài toán tối ưu khác nhau, trong đó tối ưu liên tục (một mục tiêu) có ba lớp bài toán quan trọng là Tối ưu lồi (Convex Optimization), Tối ưu không lồi (Nonconvex Optimization) và Tối ưu toàn cục (Global Optimization). Nói nôm na, Tối ưu lồi là lớp bài toán mà trong đó mọi điểm cực trị⁽³⁾ địa phương trên tập ràng buộc lồi đều là cực trị tuyệt đối (cực trị

⁽¹⁾Viện Toán học và Khoa học ứng dụng Thăng Long, Đại học Thăng Long, Hà Nội

⁽²⁾Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

⁽³⁾Điểm cực trị là điểm cực tiểu nếu xét bài toán cực tiểu, điểm cực đại nếu xét bài toán cực đại.

địa phương được hiểu chỉ là cực trị trong một lân cận giao với miền ràng buộc, còn cực trị tuyệt đối là cực trị trên toàn miền ràng buộc). Hai lớp bài toán Tối ưu không lồi và Tối ưu toàn cục không có tính chất mọi cực trị địa phương đều là cực trị tuyệt đối. Tuy nhiên, người ta vẫn phân thành hai lớp khác nhau, vì đối với lớp bài toán Tối ưu không lồi người ta thường nghiên cứu về cực trị địa phương, còn trong Tối ưu toàn cục người ta quan tâm mọi khía cạnh của nghiệm toàn cục. Từ đây ta có thể thấy rằng các công cụ nền tảng của Giải tích toán học mang tính địa phương như giới hạn, đạo hàm v.v. . . là chưa đủ để nghiên cứu bài toán Tối ưu toàn cục.

Bài báo Tối ưu toàn cục đầu tiên [4] được GS. Hoàng Tụy công bố năm 1964 trên *Báo cáo của Viện Hàn lâm Khoa học Liên Xô*, là một nghiên cứu về cực tiểu toàn cục của một hàm lõm liên tục trên một tập đa diện lồi, được cho dưới dạng một hệ hữu hạn các (bất) đẳng thức tuyến tính. Để đăng được trên tạp chí rất uy tín này của Liên Xô, bài báo phải được viết rất súc tích, ngắn gọn (thường là không có chứng minh chi tiết các kết quả) và quan trọng là phải được một Viện sỹ Viện Hàn lâm Khoa học Liên Xô giới thiệu.

Chúng tôi không có dịp được hỏi GS. Hoàng Tụy là xuất phát từ đâu mà giáo sư nghiên cứu bài toán cực tiểu hàm lõm, nhưng chúng tôi nghĩ ý tưởng dẫn đến việc nghiên cứu này là từ các bài toán thực tế như bài toán vận tải hoặc các bài toán chi phí sản xuất thấp nhất xuất hiện trong kinh tế. Ví dụ, trong bài toán vận tải, chi phí để vận chuyển một đơn vị hàng hóa, không tăng đều, mà càng chở nhiều thì chi phí trên một đơn vị hàng hóa sẽ giảm dần (hàm chi phí tăng, nhưng gia tốc tăng thì giảm dần). GS. Hoàng Tụy là người đã từng tham gia giải

quyết các bài toán thực tế của Việt Nam trong những năm 60 của thế kỷ 20, và ông cũng là người quan tâm nhiều đến Vận trù học và Toán kinh tế.



Hua Loo-Keng, Hoàng Tụy, và Wu Tsin Muo tại Bắc Kinh năm 1964.

Trong bài báo công bố năm 1964 nói ở trên, GS. Hoàng Tụy đã đưa ra một khái niệm lát cắt (sau này thường được gọi là lát cắt Tụy hoặc lát cắt lõm). Dựa vào lát cắt này và cấu trúc của bài toán, ông đã xây dựng một thuật toán cắt để tìm cực tiểu toàn cục của một hàm lõm liên tục trên một đa diện lồi. Trong bài báo, ông có viết, nhưng không chứng minh, rằng ta có thể chỉ ra thuật toán kết thúc sau một số hữu hạn bước lặp và cho một nghiệm toàn cục. Mười năm sau, năm 1974, Zwart [8] đã chỉ ra một phản ví dụ cho thấy thuật toán bị xoay vòng (trong không gian 2-chiều thì không xoay vòng). Sau này người ta cũng nhận thấy trong ví dụ của Zwart có những tính toán sai, nhưng sửa được.

Cũng cần nói rằng năm 1966 Ritter (là giáo sư ở Đại học Munich, Cộng hòa liên bang Đức) cũng đưa ra một thuật toán cắt tương tự, nhưng cho bài toán hẹp hơn là bài toán cực tiểu hàm toàn phương lõm (nửa xác định âm) trên tập lồi đa diện. Thuật toán của Ritter cũng bị xoay vòng. Trong nhiều năm, giới toán học Mỹ và Tây phương vẫn cho rằng Ritter là người đầu tiên nghiên cứu bài toán tối ưu toàn cục.

Mãi sau đại hội quy hoạch toán học thế giới (Mathematical Programming Symposium) ở Hungary năm 1974 (GS. Hoàng Tụy có đi dự), cộng đồng toán học mới ghi nhận GS. Hoàng Tụy là người mở đường cho Tối ưu toàn cục. Những năm trước thời kỳ đổi mới, được Nhà nước cho đi dự hội nghị quốc tế ở nước ngoài là một việc hy hữu, các nhà khoa học ở Việt Nam ít người dám nghĩ đến.

Trong khoảng nửa thế kỷ phát triển, kể từ ngày công trình đầu tiên của GS. Hoàng Tụy ra đời, bộ môn Tối ưu toàn cục đã có một bước phát triển đáng kể. Người ta đã xây dựng được những tiếp cận chung để giải quyết một bài toán Tối ưu toàn cục cả về mặt lý thuyết và chủ yếu là thuật toán. Nói chung bài toán Tối ưu toàn cục, trừ trường hợp rất đặc biệt, là một bài toán NP-khó. G. Dantzig đã từng nhận xét cái khó của Tối ưu toàn cục là “inherent difficulty” (tạm dịch là khó khăn cố hữu), vì thế mà có nhiều người nản chí và tin rằng các thuật toán tìm nghiệm toàn cục của bài toán không lời chỉ có thể giải được các bài toán cỡ nhỏ. Bản thân chúng tôi đến giờ vẫn tin là với các thế hệ máy tính hiện nay, các thuật toán tất định chung chỉ cho phép giải được các bài toán tối ưu toàn cục với số chiều vừa phải: một-hai chục biến, nếu không có cách xử lý riêng “biến khó”, “biến dễ” trong mỗi bài toán. Điểm khó cơ bản nhất khi giải một bài toán tối ưu toàn cục là nhận biết một điểm có phải là tối ưu toàn cục hay chưa, và nếu chưa phải thì có cách nào để tìm một điểm tốt hơn không? GS. Hoàng Tụy gọi cách này là vượt kỷ lục.

Với hy vọng thu được các thuật toán giải hiệu quả, người ta đã phân các bài toán Tối ưu toàn cục ra nhiều loại khác nhau. Xin kể ra đây một số lớp điển hình sau:

- (1) Quy hoạch lồi (cực tiểu hàm lồi trên một đa diện lồi) [4]. Bài toán này luôn có nghiệm đạt tại một đỉnh. Như vậy có thể nghĩ ngay là để giải, ta chỉ cần so sánh giá trị của hàm tại từng đỉnh. Đúng thế, nhưng số đỉnh có thể rất nhiều, ví dụ trong các bài toán thực tế thông thường tập ràng buộc là một siêu hộp; trong không gian Euclid n -chiều số đỉnh đã là 2^n ;
- (2) Quy hoạch toàn phương với ràng buộc tuyến tính. Trong bài toán này hàm mục tiêu để cực tiểu là một dạng toàn phương nửa xác định âm;
- (3) Quy hoạch song tuyến tính với ràng buộc tuyến tính [8]. Trong bài toán này hàm mục tiêu có dạng $f(x, y)$, có tính chất cố định biến này thì hàm là tuyến tính theo biến kia (ví dụ $f(x, y)$ là tích vô hướng của hai véc-tơ x và y);
- (4) Quy hoạch tuyến tính có thêm một ràng buộc lồi đảo [5], tức là bài toán quy hoạch tuyến tính có thêm ràng buộc $g(x) \leq 0$ với g là một hàm lồi liên tục.
- (5) Quy hoạch DC với ràng buộc tuyến tính [5], tức là bài toán cực tiểu hàm $f(x) = g(x) - h(x)$ với ràng buộc tuyến tính, trong đó $g(x)$ và $h(x)$ là các hàm lồi. Như đã biết Giải tích DC đã được nghiên cứu từ khá lâu, nhưng bài toán tối ưu toàn cục hàm DC mới được Hoàng Tụy công bố lần đầu tiên trong [5] vào năm 1987.
- (6) Quy hoạch lồi - lồi với ràng buộc tuyến tính [21]. Trong bài toán này hàm mục tiêu là $f(x, y)$ có tính chất: nếu cố định biến x , thì hàm lồi theo y và cố định biến y , thì hàm lồi theo x (đây là hàm yên ngựa, xuất hiện trong bài toán minimax). Điểm khác cơ bản là trong minimax, người ta quan tâm đến cực tiểu hàm theo nhóm biến lồi trên một tập lồi X và cực đại theo nhóm biến lồi trên một tập lồi Y trong

không gian các biến lồi. Trong quy hoạch lồi-lồi người ta quan tâm đến cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) theo tập thể hai nhóm biến. Chú ý rằng hàm DC là một trường hợp riêng của hàm lồi-lồi. Điểm mấu chốt của quy hoạch lồi-lồi là phân biệt hai nhóm biến: trong bài toán cực tiểu, biến lồi là “biến dễ” và biến lõm là “biến khó”. Trên cơ sở đó ta chỉ thực hiện các phép toán tốn kém thời gian trong các phương pháp giải bài toán tối ưu toàn cục trên không gian các biến lõm; còn đối với các biến lồi thì dùng kỹ thuật của quy hoạch lồi đã khá hoàn chỉnh về cả lý thuyết và phương pháp giải. Nhờ cách làm này mà có thể giải được các bài toán cỡ lớn, miễn là số biến khó không lớn. Một ví dụ điển hình là bài toán cực tiểu hàm toàn phương n -chiều với ràng buộc tuyến tính, mà số giá trị riêng âm của hàm này nhỏ, trong khi tổng số biến có thể rất lớn. Bài toán này ngay khi chỉ có một giá trị riêng là âm cũng đã được chứng minh là bài toán NP-khó. Trong khi nếu mọi giá trị riêng đều không âm, thì hàm toàn phương sẽ lồi và có thể giải được bằng các thuật toán đa thức. Tuy nhiên phương pháp phân biệt biến lồi và lõm có thể giải bài toán NP-khó này với số biến rất lớn, vì các phép toán đắt của tối ưu toàn cục chỉ cần thực hiện trong không gian 1-chiều. Nếu không dùng kỹ thuật lồi-lồi mà dùng phương pháp giải quy hoạch toàn phương thông thường, thì theo chúng tôi, cũng chỉ giải được các bài toán với khoảng chừng 20 biến.

- (7) Tối ưu đơn điệu [6], là bài toán cực trị hàm f có tính đơn điệu (tức là $x \geq y$, thì $f(x) \geq f(y)$) với các ràng buộc cũng được xác định bởi các hàm đơn điệu.

Để giải một bài toán tối ưu toàn cục, trước tiên người ta thường xét xem bài

toán thuộc lớp nào, tiếp theo khai thác các tính chất đặc thù của bài toán và áp dụng một phương pháp giải cụ thể, với hy vọng có được các thuật toán hiệu quả. Đến nay đã có các tiếp cận giải cơ bản sau cho bài toán tối ưu toàn cục:

- (1) Phương pháp nhánh-cận;
- (2) Phương pháp cắt;
- (3) Phương pháp xấp xỉ ngoài, xấp xỉ trong;
- (4) Phương pháp tìm kiếm ngẫu nhiên;
- (5) Kết hợp các phương pháp trên.

Bạn đọc quan tâm thêm có thể tham khảo cuốn chuyên khảo *Convex Analysis and Global Optimization* [7] của GS. Hoàng Tuy.

Hiện nay, Tối ưu toàn cục đã có một vị thế vững vàng trong Tối ưu hóa. *Tạp chí Tối ưu toàn cục* (Journal of Global Optimization) mà GS. Hoàng Tuy là một trong những người sáng lập, đã trở thành một tạp chí hàng đầu về tối ưu.

Một hướng nghiên cứu rất được quan tâm hiện nay là tìm các phương pháp giải hiệu quả cho các bài toán khai thác dữ liệu, học máy v.v... Người ta nhận thấy các bài toán trong học máy thường là các bài toán tối ưu toàn cục với số chiều rất lớn. Việc áp dụng các phương pháp tối ưu toàn cục tất định để giải các bài toán cỡ lớn này là khó có hy vọng. Trong trường hợp này người ta thường dùng các phương pháp địa phương để tìm điểm cực trị địa phương, hoặc điểm nghi ngờ, sau đó kết hợp các phương pháp ngẫu nhiên, trực cảm v.v... để vượt kỷ lục.

Ngoài Tối ưu toàn cục, giáo sư Hoàng Tuy còn có các nghiên cứu về bất đẳng thức lồi và bài toán minimax, được nhiều người nhắc đến. Ông là tác giả và đồng tác giả của hai cuốn chuyên khảo về Tối ưu toàn cục, được nhà xuất bản Springer tái bản nhiều lần. Theo thống kê trên

MathSciNet, ông có 168 bài báo đăng trên các tạp chí chuyên ngành quốc tế uy tín; đến lúc này đã có 1312 trích dẫn bởi 1033 tác giả.

Giáo sư Hoàng Tụy là một tấm gương sáng về lao động cần cù, ở tuổi hiếm có 90 ông còn biên soạn lại với rất nhiều chỉnh sửa, cập nhật, bổ sung để gửi lại các thể hệ sau cuốn sách chuyên khảo *Convex Analysis and Global Optimization* [7] dày trên 500 trang do nhà xuất bản Springer ấn hành.

TÀI LIỆU

- [1] Hillestad R. J., Jacobsen S. E. (1980), *Linear programs with an additional reverse convex constraint*, Appl. Math. Optim. 6, 257-269.
- [2] Konno H. (1971), *Algorithms for solving bilinear programming*, Tech. Rept. 71-90, Stanford University.
- [3] Muu L. D., Oettli W. (1991), *Method for minimizing a convex-concave function over a convex set*, J. Optim. Theory Appl. 70, 377-384.
- [4] Tụy H. (1964), *Concave programming under linear constraints*, Sov. Math. Dokl. 5, 1437-1440.
- [5] Tụy H. (1987), *Global minimization of a difference of two convex functions*, Math. Programming. Study 30, 150-182.
- [6] Tụy H. (2000), *Monotonic optimization: problems and solution approaches*, SIAM. J. Optim. 11, 464-494.
- [7] Tụy H. (2016), *Convex Analysis and Global Optimization*, (Second Edit.), Springer.
- [8] Zwart P. B. (1974), *Global maximization of a convex function with linear inequality constraints*, Operations. Res. 22, 602-609.

Nhớ về giáo sư Hoàng Tụy – một người thầy ân cần

Nguyễn Đông Yên⁽¹⁾

Giáo sư Hoàng Tụy (7/12/1927-14/7/2019) là một trong những nhà toán học Việt Nam nổi tiếng và có ảnh hưởng nhất trong thời hiện đại. Ông đã công bố ba cuốn sách tiếng Anh [5, 8, 21], một vài cuốn sách tiếng Việt [17, 18], và hơn 160 bài báo. Ở trên Mathematical Reviews, tính đến ngày 2/9/2020, các công trình của ông được 1033 tác giả trích dẫn 1312 lần. Ông được trao tặng Giải thưởng Hồ Chí Minh đợt I (1996), Giải thưởng Constantin Carathéodory đầu tiên của Hội Tối ưu Toàn cục Quốc tế (tháng 9/2011), và được phong tặng danh hiệu Tiến sĩ danh dự của trường Đại học Linköping, Thụy Điển (1995) và Viện Quốc gia về Khoa học Ứng dụng tại Rouen (INSA), Pháp (2007). Theo tài liệu [3], Giáo sư

Hoàng Tụy đã tham gia ban biên tập của 4 tạp chí quốc tế lớn của tối ưu và giải tích: *Mathematical Programming* (1976-1985), *Optimization* (từ 1974), *Journal of Global Optimization* (từ lúc thành lập, 1991) và *Nonlinear Analysis Forum* (từ 1999), và cả ban biên tập từ sách *Nonconvex Optimization and Its Applications* của Nhà xuất bản Springer. Trong nhiều năm (1980-1990), vào thời kỳ khó khăn nhất, giáo sư Hoàng Tụy cũng là Tổng biên tập của hai tạp chí toán học của Việt Nam: *Acta Mathematica Vietnamica* và *Tập san toán học*, sau được đổi tên thành *Vietnam Journal of Mathematics*. Bài viết [1] trên Wikipedia có thông tin khá đầy đủ về cuộc đời và sự nghiệp của giáo sư Hoàng Tụy.

⁽¹⁾Viện Toán học, Viện Hàn lâm KHCN Việt Nam. Email: ndyen@math.ac.vn

Tuy không là học trò trực truyền của giáo sư Hoàng Tụy, tôi vẫn luôn coi ông là một trong những người thầy của mình trong khoa học, cũng như trong cuộc sống. Khi viết những dòng này, tôi xúc động nhớ lại những lời ông dạy và những cử chỉ ân cần của ông. Phần còn lại của bài là một số câu chuyện nhỏ và danh mục tài liệu tham khảo.

1. GIÁO SƯ HOÀNG TỤY THỜI TRẺ

Theo [1], vào tháng 3/1959, Hoàng Tụy trở thành một trong hai người Việt

Nam đầu tiên bảo vệ thành công luận án Phó tiến sĩ khoa học Toán-Lý tại Đại học Tổng hợp Quốc gia Mátxcơva mang tên Lomonosov, dưới sự hướng dẫn của GS. Dmitrii Evgenevich Menshov. GS. Hoàng Tụy có lần nói rằng những bài tập mà GS. Menshov đưa ra thường khá phức tạp và khi giải một trong những bài tập đó, ông phải sử dụng một phép xây dựng đặc biệt mà sau này mới biết đó là một fractal. Ông rất vui khi kể lại kỷ niệm này.



GS. Hoàng Tụy tại nhà. Ảnh: Mai Anh.

Theo [2], “Một phân dạng (còn được biết đến là fractal) là một vật thể hình học thường có hình dạng gấp khúc trên mọi tỷ lệ phóng đại, và có thể được tách ra thành từng phần: mỗi phần trông giống như hình tổng thể, nhưng ở tỷ lệ phóng đại nhỏ hơn. Như vậy phân dạng có vô tận các chi tiết, mỗi chi tiết này có thể có

cấu trúc tự đồng dạng ở các tỷ lệ phóng đại khác nhau. Nhiều trường hợp, có thể tạo ra phân dạng bằng việc lặp lại một mẫu toán học, theo phép hồi quy. Từ fractal được nói đến lần đầu vào năm 1975 bởi Benoît Mandelbrot, lấy từ tiếng Latin fractus nghĩa là “đứt gãy”. Trước đó, các cấu trúc này (ví dụ bông tuyết Koch)

được gọi là “đường cong quý”. Cũng theo [2], “Phân dạng ban đầu được nghiên cứu như một vật thể toán học. Hình học phân dạng là ngành toán học chuyên nghiên cứu các tính chất của phân dạng; những tính chất không dễ gì giải thích được bằng hình học thông thường. Ngành này có ứng dụng trong khoa học, công nghệ, và nghệ thuật tạo ra từ máy tính. Ý niệm cơ bản của môn này là xây dựng phép đo đặc mới cho kích thước của các vật thể, do các phép đo thông thường của hình học Euclid và giải tích thất bại khi mô tả các phân dạng.” GS. Menshov có bài báo viết chung [7] với A. N. Kolmogorov từ năm 1927 (Kolmogorov được bầu làm Viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa học Liên Xô năm 1939). Vì Hoàng Tụy đã nghiên cứu rất sâu một bộ môn toán học lý thuyết (xem [11, 12, 13]) trước khi nghiên cứu toán học ứng dụng, nên các công trình về toán học ứng dụng của ông có vẻ đẹp và chiều sâu của các lý thuyết toán học chặt chẽ, nghiêm túc.

2. NHỮNG CHUYẾN ĐI NƯỚC NGOÀI

Vào quãng những năm 1982-1988, việc đi nước ngoài còn rất khó khăn. Vì thế, thông tin về các hội nghị, hội thảo, và các hoạt động nghiên cứu ở nước ngoài là rất quý. Viện trưởng Hoàng Tụy thường gặp mặt tất cả cán bộ công nhân viên Viện Toán học sau mỗi lần từ phương Tây trở về. Những câu chuyện sôi nổi của ông (đã đi những đâu, gặp những ai, họ đang quan tâm đến chuyện gì, họ làm được cái gì hay, các nghiên cứu của người Việt Nam được họ đánh giá như thế nào), đã truyền cảm hứng mạnh mẽ cho chúng tôi. Tôi rất biết ơn ông về điều này.

3. VIẾT MỘT BÀI BÁO NHƯ THẾ NÀO?

Hơn 30 năm trước, GS. Hoàng Tụy đã có một buổi nói chuyện với Chi đoàn

thanh niên Viện Toán học về chủ đề “Viết một bài báo như thế nào?”. Tôi nhớ được một số ý như sau:

- Viết là viết cho người đọc. Vì thế, phải luôn luôn nghĩ đến người đọc.

- Đừng nghĩ rằng người đọc hiểu được tất cả những suy nghĩ của mình.

- Khi đặt bút viết một câu, hãy tự hỏi: Liệu người đọc có hiểu nội dung câu này đúng như mình mong muốn hay không?

- Đừng viết nhanh quá. Để viết câu tiếp theo, hãy đọc lại câu đã viết.

- Viết xong mỗi đoạn, hãy dừng lại để đọc lại đoạn đó, sửa chữa nó cẩn thận, rồi hãy viết tiếp.

- Hãy tự hỏi: Mình định nói gì với người đọc trong bài báo này?

- Hãy viết cho dễ hiểu. Hãy trân trọng người đọc. Hãy nghĩ rằng: Người đọc theo mình được đến đoạn này là quý hóa quá rồi, mình cần viết tốt để xứng đáng với sự quan tâm của người đọc.

- Cần có một dàn bài tổng thể trước khi viết bài báo.

- Nhiều khi người ta chỉ đọc cái tóm tắt, hoặc một phần mục nhập đề của bài báo, rồi quyết định có đọc bài báo hay không. Vì thế, hãy đầu tư để viết phần tóm tắt và mục nhập đề cho thật sáng sủa, rõ ràng.

- Khi viết xong một bài báo, để yên không động đến bản thảo trong khoảng một tuần. Sau một tuần mới đọc lại toàn bộ bài báo, ta sẽ dễ phát hiện lỗi sai trong chứng minh, trong logic trình bày, và trong cách viết hơn.

Những lời căn dặn nói trên của GS. Hoàng Tụy đã giúp đỡ tôi rất nhiều khi tôi viết những bài báo và sách chuyên khảo.

4. TỐI ƯU TOÀN CỤC

Với 745 (727 + xviii) trang in, cuốn "Tối ưu toàn cục" của Reiner Horst và Hoàng Tụy [5] là một cẩm nang quan trọng về chuyên ngành này. Bài nhận xét của GS Panos M. Pardalos trên Math. Reviews về bản in đầu tiên của cuốn sách này có những đoạn sau: "Cuốn sách trình bày một nghiên cứu toàn diện về các phương pháp tất định để giải các bài toán tối ưu toàn cục. Nội dung bao hàm trong sách được sắp xếp như sau: Phần A gồm nhập đề và các kỹ thuật cơ sở (Chương I–IV), Phần B bàn về vấn đề cực tiểu hàm lồi (Chương V–VIII), và Phần C bàn về các bài toán quy hoạch phi tuyến tổng quát (Chương X–XI). Chương I thảo luận một số lớp các bài toán tối ưu toàn cục như cực tiểu hàm lồi, tối ưu DC⁽²⁾ và các ràng buộc lồi đảo, và tối ưu Lipschitz. Thêm vào đó, nhiều bài toán tối ưu tổ hợp kinh điển được phát biểu như các bài toán cực tiểu hàm lồi hoặc các bài toán DC. Trong các chương II–IV, một số phương pháp tối ưu toàn cục như các phương pháp xấp xỉ ngoài, lát cắt lồi, và phương pháp nhánh cận được thảo luận. Trong phần hai của cuốn sách, các phương pháp sau đây được trình bày để giải các bài toán cực tiểu hàm lồi: phương pháp siêu phẳng cắt, phương pháp chia và xấp xỉ liên tiếp, và các kỹ thuật phân rã. Ngoài ra, một số bài toán đặc biệt như bài toán quy hoạch song tuyến, bài toán bù tuyến tính, và quy hoạch lồi có tham số được thảo luận chi tiết thêm... Cuốn sách kết thúc với một danh sách bao quát các tài liệu tham khảo (31 trang) về tối ưu toàn cục, các ứng dụng, và các vấn đề có liên quan. Tất cả các kết quả được trình bày một cách chặt chẽ, và nhiều phương pháp đã được minh họa bằng các ví dụ số cỡ nhỏ. Cuốn sách là đầy đủ [self-contained]

⁽²⁾Tối ưu hiệu hai hàm lồi.

và nó trình bày tối ưu toàn cục ở mức độ phát triển cao nhất [the state of the art]." (trích dịch)

Các giáo sư Lê Dũng Mưu, Panos M. Pardalos, Nguyễn Khoa Sơn, và tôi đã tham gia biên tập số đặc biệt của tạp chí *Acta Mathematica Vietnamica* (tập 45 số 2 năm 2020), gồm 14 bài báo, để tưởng nhớ giáo sư Hoàng Tụy.

5. THUẬT TOÁN QUY HOẠCH LỒM HOÀNG TỤY VÀ LÁT CẮT TỤY

Hồi đó, vào những năm 1993-1994, tôi làm nghiên cứu ở Đại học Tổng hợp Pisa dưới sự hướng dẫn của GS. Franco Giannessi theo một học bổng của Italian Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR) dành cho các nhà toán học trẻ không là người Ý. Một hôm, GS. Giannessi bất ngờ hỏi tôi: "Vì anh làm ở Viện Toán học Hà Nội, nên chắc rằng anh biết rõ Thuật toán Hoàng Tụy?". Tôi bối rối trả lời: "Rất tiếc rằng tôi chỉ nghe nói về thuật toán đó, mà không biết rõ nó." GS. Giannessi nói nửa đùa nửa thật: "Thế thì xấu hổ quá!" ("What a shame!"). Tôi đã dành 3-4 ngày để học Thuật toán Hoàng Tụy [14] theo cuốn sách của F. Forgó [4]. Nhờ đó, tôi đã hiểu được thuật toán này (đáng tiếc rằng đoạn cuối của chứng minh trong sách về sự hội tụ của dãy nghiệm xấp xỉ đến một nghiệm gần đạt mức tối ưu toàn cục là không chính xác). Vì trong thời gian này tôi cũng học Thuật toán Lemke (cũng được công bố năm 1964) giải bài toán bù tuyến tính nên tôi dễ dàng thấy được điểm chung của Thuật toán Lemke và Thuật toán Hoàng Tụy, đó là mỗi thuật toán này đều khai thác một cách hữu hiệu khía cạnh liên tục (continuity aspect) và khía cạnh tổ hợp (combinatorial aspect) của bài toán được xét. Bài toán được xét trong [14] là bài toán

tìm cực tiểu hàm số thực $f(x)$ xác định và liên tục trên một đa diện lồi compact D trong không gian Euclide n chiều. Hàm f được giả thiết là lõm ở trên D , tức là ta có $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ với mọi $x, y \in D$ và mọi số thực $\lambda \in [0, 1]$. Tập nghiệm toàn cục của bài toán này có giao khác rỗng với tập điểm cực biên của D . Vì số điểm cực biên của D có thể là rất lớn, nên việc so sánh các giá trị của f tại các điểm cực biên để tìm giá trị nhỏ nhất nói chung là không hiệu quả. Nếu u^k là nghiệm xấp xỉ tại bước thứ k của thuật toán và D_k là đa diện lồi compact chứa trong D và có chứa u^k , và nếu u^k chưa phải là nghiệm toàn cục, thì ta có thể xây dựng điểm xấp xỉ u^{k+1} thuộc đa diện lồi compact D_{k+1} sao cho $f(u^{k+1}) < f(u^k)$, ở đó D_{k+1} thu được từ D_k bằng cách sử dụng một siêu phẳng để cắt đi một phần có chứa u^k mà không chứa điểm nghiệm toàn cục nào. Đó là những nét chính của Thuật toán quy hoạch lõm của Hoàng Tụy và lát cắt Tụy theo hiểu biết của tôi.

6. CÁC ĐỊNH LÝ MINIMAX CỦA HOÀNG TỤY

Biagio Ricceri là người sáng lập các tạp chí *Set-Valued Analysis* (về sau được đổi tên thành *Set-Valued and Variational Analysis*) và *Minimax Theory and its Applications*. Vào năm 1997, tôi đến làm nghiên cứu một tháng ở Khoa Toán, Đại học Tổng hợp Messina trên đảo Sicily (Italia) theo lời mời của GS. Ricceri. Ngoài phòng làm việc ở Messina, GS. Ricceri còn có một phòng làm việc ở Khoa Toán, Đại học Tổng hợp Catania, nơi mà ông chuyển về làm giáo sư khoảng hai năm sau. Một hôm, GS. Ricceri lái xe ô tô đưa tôi từ Messina về Catania chơi (khoảng cách đường bộ giữa hai thành

phố là 100km). Khi đến Đại học Tổng hợp Catania, ông nói với tôi: “Chúng tôi đặt mua đều đặn tạp chí *Acta Mathematica Vietnamica* đây!”. Rồi ông dẫn tôi xuống phòng tạp chí của thư viện của Khoa Toán ở dưới tầng ngầm của tòa nhà, tôi giá để tạp chí AMV. Tôi xúc động khi nhìn thấy những cuốn tạp chí màu trắng đã ngả sang màu vàng theo thời gian. Kích thước của chúng có vẻ cũng không thật đều nhau, vì thời ấy tạp chí được in ở những nhà in khác nhau. GS. Ricceri nói: “Tôi đánh giá rất cao các kết quả của GS. Hoàng Tụy về minimax. Các định lý minimax của GS. Tụy rất đẹp và thông minh (clever). Tôi đã sử dụng các định lý này trong các nghiên cứu của mình. Đó là lý do chúng tôi quan tâm đến tạp chí toán của Việt Nam.” Theo tôi biết, GS. Tụy và GS. Ricceri đã gặp nhau vào năm 2009, tại một hội thảo về giải tích phi tuyến và minimax ở Đà Loan. Năm 2017, khi Viện Toán học tổ chức Hội thảo quốc tế “Các thuật toán tối ưu và một số vấn đề có liên quan” nhân dịp sinh nhật lần thứ 90 của GS. Hoàng Tụy, chúng tôi gửi thư mời GS. Ricceri tham dự. Ông vui vẻ nhận lời và đã đến Hà Nội để trình bày báo cáo mời toàn thể tại Hội thảo. Ông cũng đã góp bài [10] cho Số đặc biệt, dành để tưởng nhớ GS. Hoàng Tụy, của *Acta Mathematica Vietnamica*. Trong nhiều công trình về minimax của GS. Ricceri ta thấy có điểm tương đồng với công trình [15] và những công trình khác về minimax của GS. Tụy, đó là cách sử dụng hiệu quả các giả thiết về tính liên thông tôpô.

Ngày 22/7/2019, GS. Ricceri gửi email cho tôi để chia buồn về việc GS. Tụy từ trần: “Tôi vừa biết rằng GS. Tụy ra đi một tuần trước. Tôi sẽ luôn nhớ đến ông ấy

(3) Nguyên văn: “I just learned that Professor Tụy passed away one week ago. I will always remember him as a great mathematician and a fine man.”

như một nhà toán học lớn và một con người cao quý.”⁽³⁾

Cảm hứng từ những chứng minh chặt chẽ và đẹp đẽ của GS. Hoàng Tụy trong bài báo [19] đã đưa anh Nguyễn Quang Huy và tôi đến khái niệm bất đẳng thức biến phân minimax và bài báo [6].

7. TỐI ƯU ĐƠN ĐIỀU

Lý thuyết Tối ưu đơn điệu (Monotonic optimization) được GS. Hoàng Tụy đề xuất trong bài báo [16], dài tới 31 trang, đăng trên SIAM Journal on Optimization – một tạp chí hàng đầu về lý thuyết tối ưu, khi ông đã 73 tuổi. Tiếp sau công trình này là một loạt bài báo của ông và các cộng sự về tối ưu đơn điệu và ứng dụng. Một hàm số xác định trên orthant dương của không gian \mathbb{R}^n (là tập hợp các vectơ mà tất cả các tọa độ đều là các số thực không âm) được gọi là tăng nếu nó là đơn điệu không giảm trên mỗi nửa đường thẳng thuộc orthant dương đó. GS. Hoàng Tụy đã đề xuất cách tìm cực tiểu/cực đại toàn cục của một hàm tăng hoặc của hiệu của hai hàm tăng. Khái niệm đa khối (polyblock), tập chuẩn tắc (normal set), và các phương pháp xấp xỉ bằng đa khối (polyblock approximation methods) đã được đưa ra trong [16]. Có 8 mô hình ứng dụng của Tối ưu đơn điệu, bao gồm cả quy hoạch toàn phương không xác định dấu (indefinite quadratic programming) và quy hoạch đa thức (polynomial programming) đã được thảo luận trong [16, Mục 8, tr. 482-489].

GS. Hoàng Tụy đã truyền cảm hứng duy trì nghiên cứu toán học ở tầm quốc tế (có thể gọi là cảm hứng “boi trong dòng chính”) cho nhiều thế hệ những người làm toán ứng dụng ở Việt Nam.

⁽⁴⁾A. Auslender, P. Coutat, “Sensitivity analysis for generalized linear-quadratic problems”, J. Optim. Theory Appl. 88 (1996), 541-559 (NDY chú thích).

8. ANH ĐÃ ĐỌC BÀI BÁO ĐÓ CHƯA?

Năm 1999, Giáo sư Hoàng Tụy tham gia Hội đồng chấm luận án cấp cơ sở cho luận án Tiến sĩ của anh Nguyễn Năng Tâm (Đại học Sư phạm Hà Nội 2). Thời ấy, Hội đồng cấp cơ sở gồm những 11 cây đa cây đề! Sau khi anh Tâm trình bày nội dung luận án 118 trang với 6 bài báo khá tốt, các thành viên trong Hội đồng đã đặt nhiều câu hỏi cho anh Tâm, và anh Tâm trả lời trôi chảy. Tưởng rằng đã đến lúc Hội đồng họp kín, thì thầy Tụy - người vẫn ngồi hết sức yên lặng từ đầu buổi bảo vệ luận án - bỗng nhiên vào cuộc:

- Trong Danh mục tài liệu tham khảo của luận án, anh có liệt kê bài báo của Auslender và Coutat⁽⁴⁾. Anh có bài báo đó không?

- Dạ, có ạ.

- Anh đã đọc bài báo đó chưa?

- Dạ, cháu có đọc ạ.

- Bài báo đó nói về cái gì?

Anh Tâm thông thả trình bày những nội dung chính của bài báo nói trên. Giáo sư Hoàng Tụy tỏ vẻ hài lòng. Ông nói:

- Anh có đọc các tài liệu tham khảo cẩn thận như thế là tốt. Không nên trích dẫn những bài báo mà mình không có, hoặc có mà không đọc.

Là một trong hai người hướng dẫn luận án của anh Tâm, tôi thấy toát mồ hôi vì những câu hỏi đơn giản, nhưng đủ sức cho nóc ao bất cứ nghiên cứu sinh nào, của giáo sư!

9. Ý NGHĨA CỦA CÁC KẾT QUẢ ĐỊNH TÍNH

Trong một buổi bảo vệ luận án Tiến sĩ ở Hội đồng chấm luận án cấp cơ sở mà GS. Hoàng Tụy làm Chủ tịch hội

đồng có một câu hỏi khá hóc búa về khả năng ứng dụng các kết quả về tính liên thông và tính co rút được của tập nghiệm hữu hiệu trong một số bài toán tối ưu véctơ. Sau khi nghiên cứu sinh nhắc đến phương pháp bám đường (the path-following method) mà ở đó tính liên thông của tập nghiệm hữu hiệu đóng một vai trò quan trọng, GS. Hoàng Tụy bắt ngờ lên tiếng:

- Các kết quả định tính không cần có ứng dụng vào thuật toán hay vào đâu cả! Bản thân chúng đã có ý nghĩa quan trọng, bởi vì chúng là những thông tin cốt yếu nhất về bài toán được xét.

10. MÔ HÌNH TOÁN HỌC

Buổi xêmina liên phòng Tối ưu & Điều khiển - Giải tích - Giải tích số & Tính toán khoa học của Viện Toán học hôm đó có giáo sư Hoàng Tụy tham dự. Giáo sư ngồi ở bàn đầu. Người báo cáo là anh Nguyễn Năng Tâm (Đại học Sư phạm Hà Nội 2). Nội dung báo cáo là một số kết quả của anh Tâm và tôi về quy hoạch toàn phương (quadratic programming). Đến lúc giải lao, khi anh Tâm đi ngang qua bàn đầu, giáo sư Hoàng Tụy nói với anh Tâm:

- Báo cáo của anh nghe được đấy!

Lúc đứng giải lao ở ngoài hành lang, giáo sư bắt ngờ hỏi tôi:

- Đạo này anh còn làm nghiên cứu về cân bằng giao thông nữa không?

- Dạ, thưa bác, không ạ!

- Tại sao?

- Vì cháu thấy mô hình mạng giao thông dựa trên nguyên lý Wardrop quá giản lược, không sát thực tế ạ.

Giáo sư trầm ngâm suy nghĩ một thoáng, rồi nói:

- Mô hình toán học nào cũng phải dựa trên những sự giản lược. Nó chỉ giữ lại

những mối quan hệ cốt yếu nhất của mô hình thực tế. Có như thế, nó mới làm việc được.

- Vâng ạ.

Giáo sư giải thích thêm:

- Theo anh, còn có gì thô thiển hơn là xấp xỉ Trái Đất bằng một chất điểm? Tôi nghĩ rằng sự xấp xỉ đó chẳng những thô thiển, mà còn có thể nói là hết sức thô bỉ nữa. Ấy thế mà nó làm việc được!

- Vâng ạ, cháu cảm ơn bác.

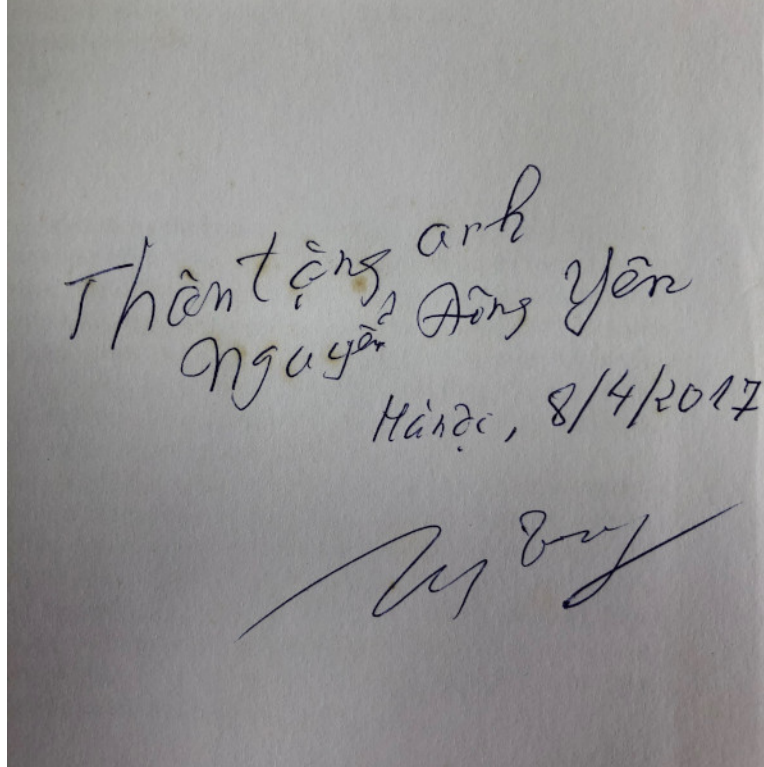
Tôi hiểu rằng giáo sư Hoàng Tụy vừa nói đến mô hình cơ học bầu trời, với ba định luật Kepler. Sự giải thích này làm tôi kinh ngạc vì cách diễn đạt thông minh và độ sâu tư tưởng của ông.

11. S-LEMMA

Buổi seminar cuối cùng của GS. Hoàng Tụy ở Viện Toán học có lẽ là báo cáo của ông tại phòng Tối ưu và Điều khiển về một định lý minimax mới, S-Lemma suy rộng, và đối ngẫu mạnh dạng Lagrange trong quy hoạch toàn phương không lồi với một ràng buộc toàn phương. Hôm đó, GS. Hoàng Tụy trình bày rất hay bằng phần bảng, ở phòng seminar trên tầng 4 nhà A14, các kết quả chính trong bài báo viết chung với anh Hoàng Dương Tuấn – người con trai thứ hai của ông, là giáo sư ở ĐH Công nghệ Sydney, Australia. Bài báo này về sau được công bố ở tạp chí *Journal of Global Optimization* [20]. S-Lemma suy rộng – là một khẳng định về mối quan hệ giữa hai hàm toàn phương – được phát biểu ở Định lý 2 trong [20]. Trong số các tài liệu tham khảo của bài báo này, có bài báo [9] của GS. B. Ricceri về minimax và bài báo [22] của PGS. TSKH. Hà Huy Vui và PGS. TS. Phạm Tiến Sơn về tối ưu đa thức. Thầy Tụy và anh Tuấn đã công bố 5 bài báo viết chung. Buổi seminar nói trên có lẽ diễn ra vào

năm 2012, khi GS. Hoàng Tụy ở tuổi 85.

Niềm vui sáng tạo đích thực đã được ông trao truyền cho những người đi sau.



Bút tích của GS. Hoàng Tụy.

12. CUỐN SÁCH VỚI HAI LẦN XUẤT BẢN

Năm 2016, ở tuổi 89, GS. Hoàng Tụy công bố bản in lần thứ hai của cuốn chuyên khảo “Giải tích lồi và Tối ưu toàn cục” [21], gồm 521 (xvi+505) trang in, với 170 trang bổ sung so với bản in lần thứ nhất (được xuất bản năm 1998, gồm xii+339=351 trang in). Ba chương được viết mới là Tối ưu đơn điều (Chương 11), Tối ưu đa thức (Chương 12), và Tối ưu với ràng buộc cân bằng (Chương 13). Mỗi chương mới này là một lý thuyết rất khó. Khả năng lao động khoa học của ông thật phi thường! Vì không có thư ký giúp việc, nên có lẽ ông đã tự mình đánh máy tất cả những phần viết thêm đó. Một luận án Tiến sĩ thường chỉ có khoảng 80-90 trang in. Vậy mà trò và thầy, các phản biện, các

thành viên của Hội đồng cấp cơ sở và Hội đồng cấp Trường/Viện phải làm việc cật lực để tránh các lỗi lập luận, hành văn, đánh máy. Trong khi đó, vị giáo sư 89 tuổi có thể viết thêm gần 200 trang in vào một cuốn sách vốn đã đủ dày!

Sau khi cuốn sách được in ra, GS. Hoàng Tụy đã tặng sách cho một số người. Tôi may mắn và vinh dự được là một trong số những người đó. Tôi xin kết thúc bài viết này với ảnh chụp những dòng đề tặng mà GS. Hoàng Tụy viết ở tuổi 90 cùng với lời cảm ơn chân thành nhất về tất cả những gì mà ông đã ưu ái dành cho nhóm nghiên cứu của chúng tôi.

TÀI LIỆU

- [1] Bách khoa toàn thư mở Wikipedia, Hoàng Tuy, https://vi.wikipedia.org/wiki/Hoàng_Tuy.
- [2] Bách khoa toàn thư mở Wikipedia, Phân dạng, https://vi.wikipedia.org/wiki/Phân_dạng.
- [3] Đại học Quốc gia Hà Nội, <https://vnu.edu.vn/ttsk/?C1654/N2-4359/GS.-Hoang-Tuy,-nguoi-khai-sinh-ly-thuyet-Toi-uu-Toan-cuc-qua-doi-o-tuoi-92.htm>
- [4] F. Forgó, Nonconvex Programming, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1988.
- [5] R. Horst, H. Tuy, Global Optimization - Deterministic Approaches, Springer, Berlin, 1990. (Third Revised and Enlarged Edition: 1996).
- [6] N. Q. Huy, N. D. Yen, Minimax variational inequalities, Acta Math. Vietnam. 36 (2011), 265-281.
- [7] A. Kolmogorov, D. Menshov, Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales (French), Math. Z. 26 (1927), no. 1, 432-441.
- [8] H. Konno, P. T. Thach, H. Tuy, Optimization on Low Rank Nonconvex Structures, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [9] B. Ricceri, A further improvement of a minimax theorem of Borhenshtein and Shul'man, J. Nonlinear Convex Anal. 2 (2001), 279-283.
- [10] B. Ricceri, Miscellaneous applications of certain minimax theorems II, Acta Math. Vietnam. 45 (2020), 515-524.
- [11] H. Tuy, The structure of measurable functions (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 126 (1959), 37-40.
- [12] H. Tuy, On the structure of measurable functions. I (Russian), Mat. Sb. (N.S.) 53 (95) (1961), 429-488.
- [13] H. Tuy, The structure of measurable functions. II (Russian), Mat. Sb. (N.S.) 54 (96) (1961), 177-208.
- [14] H. Tuy, Concave programming with linear constraints (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 159 (1964), 32-35. [Soviet Math. Dokl. 5 (1964), 1437-1440]
- [15] H. Tuy, A certain general minimax theorem, Dokl. Akad. Nauk SSSR 219 (1974), 818-821.
- [16] H. Tuy, Monotonic optimization: problems and solution approaches, SIAM J. Optim. 11 (2000), 464-494.
- [17] H. Tuy, Hàm thực và Giải tích hàm (Giải tích hiện đại), Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội, 2003.
- [18] H. Tuy, Lý thuyết Tối ưu (Bài giảng lớp cao học), Viện Toán học, Hà Nội, 2006.
- [19] H. Tuy, Minimax: existence and stability, in "Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria" (A. Chinchuluun, P. M. Pardalos, and A. Migdalas, Eds.), pp. 3-21, Springer, New York, 2008.
- [20] H. Tuy, H.D. Tuan, Generalized S-Lemma and strong duality in nonconvex quadratic programming, J. Global Optim. 56 (2013), 1045-1072.
- [21] H. Tuy, Convex Analysis and Global Optimization, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998. (Second Edition: Springer, 2016).
- [22] H.H. Vui, P.T. Son, Global optimization of polynomials using the truncated tagency variety and sums of squares, SIAM J. Optim. 19 (2008), 941-951.

Chương trình tài trợ của Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup

Trần Thị Trang⁽¹⁾

Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup (VINIF) được tập đoàn Vingroup thành lập với chức năng hỗ trợ các tổ chức,

cá nhân thực hiện nghiên cứu khoa học, công nghệ và đổi mới sáng tạo, nhằm mục đích tạo ra những thay đổi tích cực

⁽¹⁾Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup

và bền vững cho Việt Nam. Quỹ VINIF tài trợ cho các dự án, hoạt động nghiên cứu khoa học và đào tạo liên quan đến BigData với định hướng đưa ra các sản phẩm, các giải pháp công nghệ mang lại lợi ích thiết thực cho cộng đồng. Các chương trình tài trợ đang được Quỹ VINIF triển khai bao gồm:

1. Chương trình nghiên cứu thường niên: nhằm hỗ trợ các nhà khoa học Việt Nam thực hiện các dự án xuất sắc, có tầm ảnh hưởng lớn, với định hướng ứng dụng cùng phương pháp tiếp cận và công nghệ hiện đại. Năm 2019, Quỹ VINIF đã tài trợ cho 20 dự án với tổng kinh phí tài trợ là 117 tỷ đồng. Năm 2020, Quỹ VINIF đã tài trợ cho 3 dự án nghiên cứu chống virus corona với tổng giá trị tài trợ là 20 tỷ đồng và 28 dự án nghiên cứu khoa học - công nghệ định hướng ứng dụng và nghiên cứu ứng dụng với tổng giá trị tài trợ là 136 tỷ đồng.

2. Chương trình học bổng đào tạo thạc sĩ, tiến sĩ trong nước: dành cho học viên cao học, NCS và các nhà khoa học thuộc các chuyên ngành khoa học, công nghệ, kỹ thuật hoặc y dược. Theo quy định của Chương trình học bổng đào tạo thạc sĩ, tiến sĩ trong nước, mỗi học viên cao học được nhận học bổng hỗ trợ học tập tối đa hai năm và mỗi NCS được nhận học bổng hỗ trợ tối đa ba năm. Năm 2020, Quỹ dự kiến cấp 220 suất học bổng thạc sĩ, tiến sĩ với tổng giá trị tài trợ trên 30 tỷ đồng. Lễ công bố tài trợ học bổng thạc sĩ, TS trong nước năm nay dự kiến được tổ chức vào giữa tháng 11/2020.

3. Chương trình hợp tác đào tạo thạc sĩ khoa học và công nghệ các ngành liên quan đến lĩnh vực Khoa học dữ liệu và Học máy giữa Quỹ VINIF và các Viện nghiên cứu, trường đại học của Việt

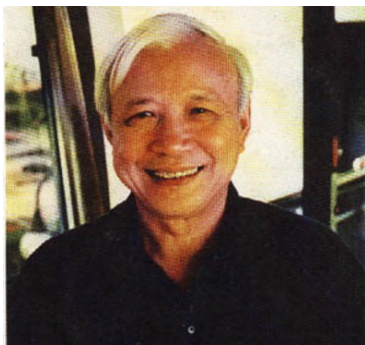
Nam nhằm hỗ trợ nguồn lực tài chính và công nghệ, mạng lưới tri thức và chuyên gia cho cơ sở đào tạo và học viên cao học có điều kiện học tập, nghiên cứu đạt tầm quốc tế. Trong năm 2020, Quỹ VINIF đã tài trợ với tổng giá trị tài trợ 10 tỷ đồng cho 5 đề án của Viện Toán học-Viện HLKHCN Việt Nam, Đại học Khoa học Tự nhiên-ĐHQG Hà Nội, Đại học Bách Khoa Hà Nội, Đại học Quy Nhơn và Viện John von Neumann-ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh. Kinh phí tài trợ nhằm giúp các cơ sở đào tạo tăng cường chất lượng giảng viên; mời giáo sư thỉnh giảng; xây dựng, bổ sung giáo trình và bài giảng; nâng cấp cơ sở vật chất, trang thiết bị bảo đảm đáp ứng yêu cầu đào tạo trình độ thạc sĩ; nâng cao năng lực, kinh nghiệm trong nghiên cứu khoa học ở lĩnh vực của ngành mà cơ sở đào tạo xây dựng đề án mở ngành đào tạo trình độ thạc sĩ. Thời gian hỗ trợ cho chương trình tối đa là 3 năm.

4. Chương trình tài trợ hội nghị - hội thảo: dành cho các viện nghiên cứu, trường đại học và các đối tác có uy tín, có đóng góp tích cực và thiết thực cho cộng đồng khoa học và công nghệ Việt Nam. Hội thảo có các báo cáo mời của các nhà khoa học hoặc nhà công nghệ có uy tín và có các công trình xuất sắc được công bố. Hội thảo có quy mô quốc tế, có tầm ảnh hưởng, không bó hẹp trong nhóm nghiên cứu chuyên ngành, có các báo cáo của các nhà khoa học từ nước ngoài và từ các cơ sở nghiên cứu trong nước. Quỹ VINIF tham gia tổ chức, đồng tổ chức hoặc tài trợ một phần kinh phí cho hội thảo, sự kiện.

Các chương trình tài trợ của Quỹ VINIF đã thổi làn gió mới vào cộng đồng khoa học, là một nhân tố mới hỗ trợ các nghiên cứu khoa học tại các trường đại học cũng như các viện nghiên cứu trong cả nước.

Tin tức hội viên và hoạt động toán học

* **GS. Đặng Đình Áng**, một người có nhiều đóng góp nổi bật cho toán học miền Nam và Việt Nam nói chung, mất ngày 29 tháng 8 năm 2020, hưởng thọ 94 tuổi. Giáo sư Đặng Đình Áng sinh năm 1926 tại Hà Tây. Năm 1953 đến 1955, ông học ngành kỹ thuật hàng không vũ trụ tại Đại học Kansas (Hoa Kỳ) và nhận bằng cử nhân tại đó. Sau đó, ông vào Viện Công nghệ California (CalTech) và nhận bằng tiến sĩ với một luận án về giải tích và cơ học năm 1958. Ông làm việc tại Cal-Tech hai năm rồi về nước năm 1960.



GS. Đặng Đình Áng. Ảnh: Wikipedia tiếng Việt.

Về nước, ông đảm nhận trưởng ban toán của Trường ĐH Khoa học Sài Gòn. Với vị trí trưởng ban, ông đã hiện đại hóa chương trình giảng dạy và đưa vào một số môn chưa từng được dạy như tô pô, đại số đại cương và giải tích hàm. Ba năm sau, ông thành lập chương trình chứng chỉ sau đại học "Toán học thâm cứu" (Mathematiques Approfondies). Năm 1980, trong đợt phong học hàm đầu tiên sau ngày thống nhất đất nước, Đặng Đình Áng được phong hàm giáo sư. Năm 1982, giáo sư Đặng Đình Áng đã hướng dẫn bảo vệ thành công luận án tiến sĩ toán học đầu tiên ở miền Nam. Trong sự nghiệp nghiên cứu và giảng dạy, ông đã có hơn 130 bài báo được công bố trên các tạp chí chuyên

ngành trong nước và quốc tế. Ông là chủ tịch đầu tiên của Hội Toán học TP HCM năm 1988. Ngoài đời, ông còn được biết đến như một nghệ sĩ thổi sáo (flute) tài hoa với nhiều CD nhạc hòa tấu thính phòng hay.

* **Ngày 16/10/2020**, Viện Toán học đã tổ chức lễ gắn biển "Hội trường Hoàng Tụy" cho hội trường tại tầng 2, nhà A6 - trụ sở của Viện. Căn phòng này là một hội trường hiện đại, có sức chứa 150 chỗ, được đưa vào sử dụng từ năm 2017. Hiện nay hội trường là nơi diễn ra các hoạt động khoa học lớn của Viện Toán học cũng như của nhiều cơ quan trong Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

* **Tại kỳ thi Olympic Toán Quốc tế (IMO) lần thứ 61**, đoàn Việt Nam đã đoạt 2 huy chương Vàng, 1 huy chương Bạc, 2 huy chương Đồng, và 1 bằng khen. Kỳ thi năm nay, dự kiến diễn ra tại Saint Petersburg, Nga, cuối cùng được tổ chức trực tuyến vì khủng hoảng dịch Covid-19. Đội tuyển Việt Nam làm bài thi tại trường ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội trong hai ngày 21 và 22 tháng 9 năm 2020. Đoạt huy chương vàng là các bạn Ngô Quý Đăng (lớp 10) và Trương Tuấn Nghĩa (lớp 11) trường THPT Chuyên Khoa học Tự nhiên.

* **GS. Vũ Hà Văn** (ĐH Yale, Hoa Kỳ và Giám đốc Khoa học Viện Nghiên cứu Dữ liệu lớn VinBDI) được bầu làm hội viên danh dự (fellow) của Hiệp hội Toán Thống kê (IMS) năm 2020. Tờ thông tin của IMS cho biết GS. Vũ Hà Văn nằm trong số 35 người được vinh danh năm nay vì những cống hiến đột phá cho lý thuyết ma trận ngẫu nhiên, sự tập trung (concentration) của đa thức ngẫu nhiên,



Đội tuyển Olympic Toán Quốc tế 2020 của Việt Nam.
 Ảnh: Bộ Giáo dục và Đào tạo.

và ghép cặp (matching) trong siêu đồ thị ngẫu nhiên. Vũ Hà Văn bảo vệ tiến sĩ tại ĐH Yale vào năm 1998 dưới sự hướng dẫn của László Lovász. Anh được trao học bổng nghiên cứu Alfred Sloan năm 2002, và trở thành giáo sư của ĐH Yale từ 2011. Anh đã đọc báo cáo mời tại Đại hội Toán học Quốc tế 2014 tại Seoul. Cho đến nay, Vũ Hà Văn đã công bố 1 cuốn sách chuyên khảo và hơn 150 bài báo trên những tạp chí hàng đầu như *Ann. of Math.*, *J. Amer. Math. Soc.*, *Duke Math. J.* Từ cuối năm

2018 đến nay, GS. Văn là giám đốc khoa học Viện Nghiên cứu Dữ liệu lớn (VinBDI) của Tập đoàn Vingroup.



Giáo sư Vũ Hà Văn. Ảnh: ĐH Yale.

* Nhiệm vụ mới

Khoa Toán-Cơ-Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội: TS. Trần Mạnh Cường thôi giữ chức trưởng khoa và được bổ nhiệm giữ chức trưởng phòng Tổ chức Cán bộ, Trường ĐHKHTN, từ cuối tháng 5 năm 2020. PGS.TS. Phó Đức Tài được bổ nhiệm giữ chức trưởng

khoa từ tháng 11 năm 2020. Các phó trưởng khoa là TS. Lê Huy Chuẩn (bổ nhiệm lại), TS. Đỗ Thanh Hà (bổ nhiệm mới), và TS. Phạm Trọng Tiên (bổ nhiệm mới).

Viện Toán học: PGS. TSKH. Đoàn Thái Sơn được bổ nhiệm vào chức phó viện trưởng Viện Toán học từ ngày 1/9/2020.

THÔNG TIN TOÁN HỌC, Tập 24 Số 3 (2020)

Tưởng nhớ giáo sư Hoàng Tụy	1
Ban biên tập	
Toán học và phát triển	2
Hoàng Tụy	
Vũ Khắc Kỷ dịch	
Ba tôi, người đã có một cuộc đời tuyệt diệu	6
Hoàng Dương Tuấn	
Giáo sư Hoàng Tụy – người anh của nhiều thế hệ toán học nước ta	15
Phan Đình Diệu	
Nhớ thầy Hoàng Tụy	19
Phan Quốc Khánh	
Hoàng Tụy – cha đẻ của tôi ưu toàn cục	24
Lê Dũng Mưu và Lê Xuân Thanh	
Nhớ về giáo sư Hoàng Tụy – một người thầy ân cần	28
Nguyễn Đông Yên	
Chương trình tài trợ của Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup	36
Trần Thị Trang	
Tin tức hội viên và hoạt động toán học	38