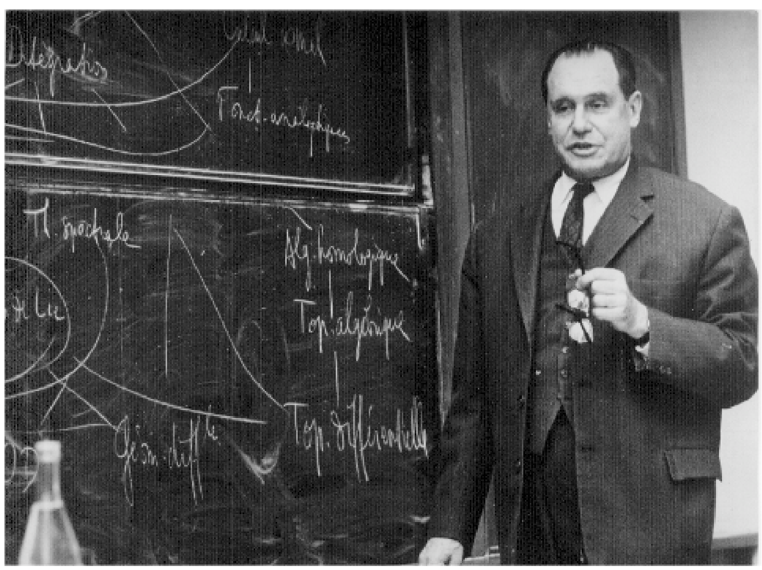
**Hội Toán Học Việt Nam**

# THÔNG TIN TOÁN HỌC

**Tháng 6 Năm 2020** **Tập 24 Số 2**



# Thông Tin Toán Học
(Lưu hành nội bộ)



- Bản tin **Thông Tin Toán Học** nhằm mục đích phản ánh các sinh hoạt chuyên môn trong cộng đồng toán học Việt Nam và quốc tế. Bản tin ra thường kỳ 4 số trong một năm.

- Thể lệ gửi bài: Bài viết bằng tiếng Việt. Tất cả các bài, thông tin về sinh hoạt toán học ở các khoa (bộ môn) toán, về hướng nghiên cứu hoặc trao đổi về phương pháp nghiên cứu và giảng dạy đều được hoan nghênh. Bản tin cũng nhận đăng các bài giới thiệu tiềm năng khoa học của các cơ sở cũng như các bài giới thiệu các nhà toán học. Bài viết xin gửi về tòa soạn theo email hoặc địa chỉ ở trên. Nếu bài được đánh máy tính, xin gửi kèm theo file với phông chữ unicode.


- Địa chỉ liên hệ

*Bản tin: **Thông Tin Toán Học***
*Viện Toán Học*
*18 Hoàng Quốc Việt, 10307 Hà Nội*

Email của Tổng biên tập:

`dtcuong@math.ac.vn`



Địa chỉ truy cập bản điện tử:

`http://www.vms.org.vn`


Ảnh bìa 1. Nhà toán học Pháp Jean A. Dieudonné (1/7/1906 – 29/11/1992). Nguồn: Trang mạng `math.unice.fr`.




Trang chủ của Hội Toán học:
`http://www.vms.org.vn`

# Một số mô hình toán cho đại dịch Covid-19

**Lê Chí Ngọc và Vũ Thị Huệ**(1)

Từ tiếng Anh *pandemic* (nghĩa là *đại dịch*), là một từ có gốc Hy Lạp. Tiền tố *pan* có nghĩa là tất cả, *demos* có nghĩa là mọi người. *Đại dịch* được hiểu là một loại bệnh, thường là bệnh lây, lan truyền trong một không gian rộng lớn, qua nhiều châu lục, thậm chí là toàn cầu, ảnh hưởng tới một số lượng lớn người. Hiện nay chúng ta đang trải qua thời kỳ của đại dịch Covid-19. Bài viết này sẽ cung cấp một vài thông tin về một số đại dịch trong lịch sử, các mô hình toán dùng trong nghiên cứu dịch bệnh nói chung cũng như đại dịch Covid-19 nói riêng. Nhiều thông tin trong bài dựa trên bài viết về đề tài đại dịch trên Wikipedia [15].

## 1. Một số đại dịch trong lịch sử

**1.1. Đại dịch Athen (430 – 426 TCN).** Trong cuộc chiến Peloponnes (một cuộc chiến tranh giữa các thành bang Hy Lạp), các cơn sốt thương hàn đã giết chết khoảng một phần tư số binh lính cũng như dân số và làm suy yếu quân đội Athen. Theo một nghiên cứu vào năm 2006 [1], khả năng cao đây là dịch bệnh thương hàn.

**1.2. Dịch hạch.** Dịch hạch có thể xem là loại dịch bệnh chết chóc nhất trong lịch sử loài người. Có lẽ dịch hạch đầu tiên được ghi nhận trong lịch sử là Đại dịch Justinian (541 – 750). Bệnh bắt đầu từ Ai Cập, và do những người lính của đế chế La Mã mang về sau những cuộc chinh chiến. Theo nhà sử học cổ đại Procopius, ở thời kỳ đỉnh dịch có tới mười nghìn người chết mỗi ngày ở thành phố Constantinople (nay thuộc Thổ Nhĩ Kỳ). Bệnh dịch này có thể đã giết chết từ một phần tư cho tới một nửa dân số thế giới tại thời điểm đó [9], và làm cho dân số châu Âu giảm gần một nửa trong giai đoạn từ năm 550 – 700.

Đại dịch Cái chết đen (1331 – 1353) làm từ 75 đến 200 triệu người tử vong trên toàn thế giới. Khởi đầu từ châu Á, dịch quét qua vùng Địa Trung Hải và Tây Âu và giết từ 20 – 30 triệu người của châu lục này (một phần ba dân số khi đó) [6]. Dịch này trở đi trở lại ở châu Âu với hơn 100 lần bùng phát cho đến tận thế kỷ 18 [11]. Trong những năm 1370, dân số nước Anh giảm khoảng một nửa [8]. Riêng ở Luân Đôn trong giai đoạn 1665 – 1666, bệnh giết khoảng 100 nghìn người, tức là 20% dân số của thành phố này. Dịch hạch còn bùng phát lần thứ ba vào năm 1855 từ Trung Quốc, lan rộng sang Ấn Độ khiến khoảng 10 triệu người tử vong.

**1.3. Dịch cúm.** Nổi tiếng nhất trong lịch sử các đại dịch là dịch cúm Tây Ban Nha 1918 với khoảng nửa tỉ người lây nhiễm trên toàn thế giới (khoảng một phần ba dân số toàn cầu khi đó) [13]. Trong vòng sáu tháng, đã có khoảng 50 triệu người tử vong, số người chết trên toàn thế giới có thể lên tới 100 triệu, đưa dịch cúm Tây Ban Nha trở thành đại dịch chết chóc nhất trong lịch sử loài người cho đến lúc đó. Số lượng tử vong trong binh lính quá lớn cũng được xem là một trong những nguyên nhân dẫn tới sự kết thúc của Thế chiến II.

---

(1)Viện Toán ứng dụng và Tin học, ĐH Bách khoa Hà Nội


Người dân Hà Nội xếp hàng xin trợ cấp thất nghiệp
vì dịch Covid-19. Ảnh: Mạng infonet.vietnamnet.vn

Cúm châu Á (1957 – 1958) gây ra cái chết của hai triệu người, dịch cúm Hồng Kông (1968 – 1972) gây ra cái chết cho một triệu người và cúm A H1N1 (2009 – 2010) gây ra cái chết cho khoảng 500 nghìn người [14].

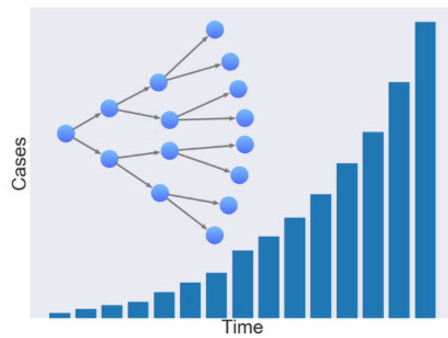
1.4. **HIV/AIDS.** Từ lúc được ghi nhận (đầu những năm 1980) đến 2019, ước tính có khoảng 32 triệu người tử vong vì HIV/AIDS. Hiện có khoảng 37,9 triệu người bị nhiễm HIV/AIDS trên toàn cầu. Dịch này đạt đỉnh vào năm 1997 với 3,3 triệu người bị nhiễm.

1.5. **Covid-19.** Một đại dịch toàn cầu hiện nay là Covid-19, do vi-rút gây bệnh viêm đường hô hấp cấp mang tên SARS-CoV-2 gây ra. Dịch đầu tiên bùng phát tại Vũ Hán, Trung Quốc vào tháng Mười hai năm 2019. Tổ chức Y tế Thế giới (World Health Organization – WHO) tuyên bố dịch Covid-19 đã trở thành đại dịch từ ngày 11 tháng Ba năm 2020. Tính đến ngày 31 tháng Bảy năm 2020, toàn thế giới có 17,4 triệu ca nhiễm tại 213 quốc gia và vùng lãnh thổ với gần 680 nghìn ca tử vong(2). Nước Mỹ trở thành vùng dịch lớn nhất với hơn 4,6 triệu ca mắc và 155 nghìn ca tử vong. Theo số liệu chính thức, Việt Nam đã có hơn 500 ca nhiễm, chưa tính hơn 120 ca nhiễm từ châu Phi trở về. Hiện chưa có ca tử vong vì Covid-19 ở Việt Nam. Dịch bệnh do vi-rút corona mới gây ra có tốc độ lây lan rất nhanh và tác động nghiêm trọng đến mọi mặt cuộc sống của cả nhân loại.

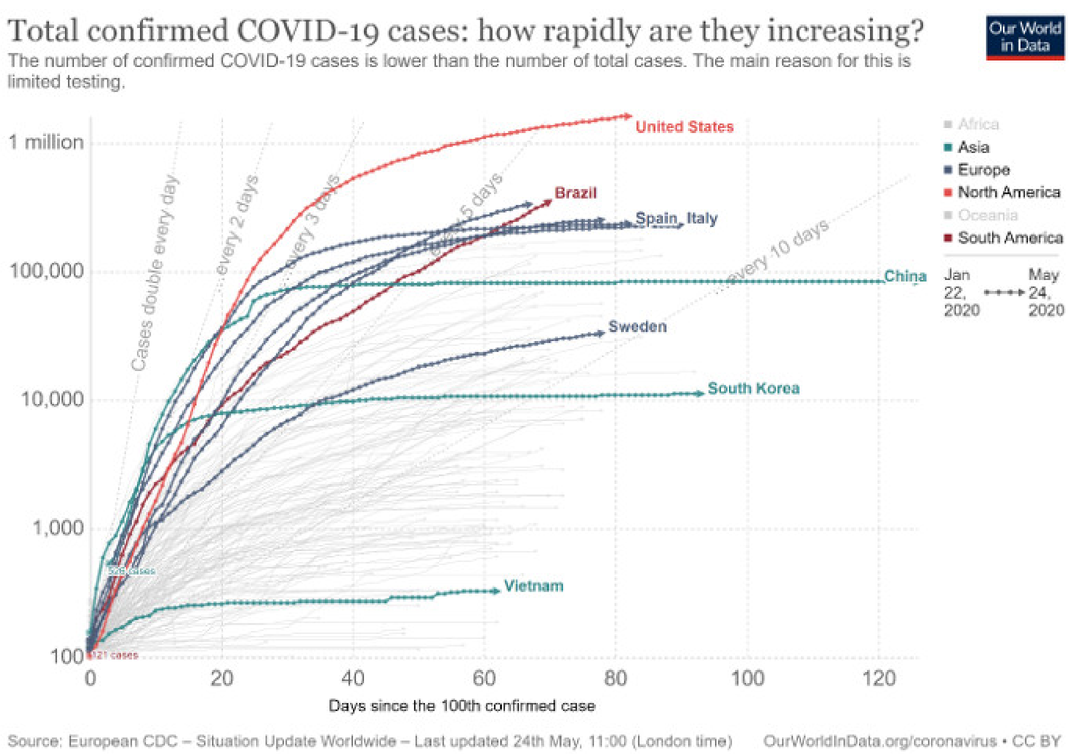
## 2. Một số mô hình toán học cho dịch bệnh

Khi nghiên cứu về các dịch bệnh, chúng ta có thể sử dụng một số mô hình toán học để mô tả về quá trình lây lan, ước đoán về số người nhiễm bệnh, đỉnh dịch, cũng như các tham số quan trọng khác như hệ số lây nhiễm, tỉ lệ diễn biến nặng, tỉ lệ tử vong, tốc độ khỏi bệnh, khả năng miễn dịch. Những thông số này sẽ được sử dụng trong các phương pháp can thiệp giúp khống chế và kiểm soát dịch bệnh. Các mô hình thường sử dụng các giả thuyết được đơn giản hóa, dựa trên các

(2)Thông tin từ https://www.worldometers.info/coronavirus số liệu thống kê, kết hợp với các tham số để xác định hiệu quả của các kế hoạch can thiệp như giãn cách, truy vấn hay vắc xin.




HÌNH 1. Mô hình phân nhánh, lây lan dịch bệnh trong thời gian đầu.




HÌNH 2. Tình hình dịch Covid-19 toàn cầu sau gần nửa năm. Nguồn: Trung tâm Phòng chống Dịch bệnh châu Âu (ECDC). Cập nhật vào ngày 24/5/2020.

2.1. **Mô hình phân nhánh.** Ở thời gian đầu, khả năng lây lan của một dịch bệnh tuân theo mô hình phân nhánh. Hiểu một cách đơn giản, mỗi người lây cho $k$ người, rồi đến $k$ người này lại lây cho $k^2$ người khác, vân vân. Sau bước phân nhánh thứ $n$, ta sẽ có tổng cộng

$$1 + k + \cdots + k^n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

người nhiễm. Hay nói cách khác, tổng số người nhiễm trong thời gian đầu sẽ tăng theo luật mũ, như Hình 1.

Theo biểu đồ ở Hình 2, chúng ta có thể thấy hầu hết các nước đều có tốc độ tăng số ca nhiễm ở giai đoạn đầu rất nhanh, tuân theo luật mũ. Có những nước, số ca nhiễm gấp đôi sau mỗi ba, thậm chí hai ngày. Tốc độ tăng này giảm dần sau đó, tuy nhiên cũng cần chú ý là kể cả trong trường hợp số ca nhiễm đã ở mức độ tuyến tính, thì cũng chưa thể nói được là quốc gia hay vùng lãnh thổ đó đã đạt đỉnh dịch. Rất có thể số ca nhiễm tăng hàng ngày không đổi (tuyến tính) đồng nghĩa với việc số lượng ca xét nghiệm hàng ngày đã đạt đến ngưỡng của quốc gia hay vùng lãnh thổ đó.

Xin bổ sung vài chú thích lịch sử về việc mô hình hóa dịch bệnh. Nhà khoa học đầu tiên nghiên cứu một cách hệ thống về dịch bệnh là John Graunt (1662) [4] và người đầu tiên sử dụng phương pháp mô hình hóa toán học là Daniel Bernoulli (1766) trong các nghiên cứu về bệnh đậu mùa [7]. Bắt đầu từ thập niên 20 của thế kỷ trước, các mô hình tiên phong của Kermack – McKendrick (1927) và của Reed – Frost (1928) đưa tới sự phát triển của mô hình dựa trên các trạng thái [2].

2.2. **Mô hình trạng thái.** Trong mô hình trạng thái, quần thể cư dân được chia thành các trạng thái **S** (Susceptible – có thể bị nhiễm bệnh), **I** (Infectious – đã bị nhiễm bệnh và có khả năng lây cho người khác), **R** (Recovered/Removed – không còn khả năng mắc bệnh). Thứ tự các nhãn này cho biết sự chuyển dịch của các cá thể từ trạng thái này sang trạng thái khác. Ví dụ, mô hình **SIR** là mô hình đơn giản nhất, trong đó các cá thể chuyển từ trạng thái **S** sang **I** rồi **R**, khi một cá thể ở trạng thái **R**, cá thể đó sẽ có miễn dịch, không thể bị nhiễm bệnh trở lại và cũng không thể lây cho người khác. Trạng thái này cũng dùng cho những cá thể chết vì bệnh dịch đó. Đối với một số bệnh dịch khác, cúm chẳng hạn, thì chúng ta có thể sử dụng mô hình **SIRS**, một cá thể sau khi khỏi sẽ ở trạng thái được miễn dịch trong một thời gian và sau đó sẽ có khả năng nhiễm bệnh trở lại. Một số bệnh, như cảm lạnh, có thời gian miễn dịch rất ngắn thì chúng ta có thể sử dụng mô hình **SIS**. Đối với những bệnh có tỉ lệ tử vong cao, chúng ta có thể sử dụng mô hình **SIRD** với **D** là ký hiệu cho trạng thái tử vong (Deceased). Nhiều bệnh, như bệnh sởi, những đứa trẻ sinh ra có thể được hưởng trạng thái miễn dịch tạm thời (một vài tháng) từ mẹ. Khi đó, chúng ta có thể sử dụng mô hình **MSIRD**. Một số bệnh như lao, thương hàn, có thêm trạng thái **C** (Carrier), trạng thái mang mầm bệnh và có thể lây cho người khác nhưng không bộc lộ triệu chứng, và người bệnh cũng không bị ảnh hưởng đáng kể từ mầm bệnh mang trong người.

Đối với bệnh Covid-19, mô hình thường được sử dụng là mô hình **SEIR**, trong đó **E** (Exposed) là trạng thái phơi nhiễm, nhưng chưa có khả năng lây cho người khác, và **I** (Infected hay Infective) là nhiễm bệnh và có khả năng lây. Trạng thái **E** xuất hiện do người bệnh mặc dù đã nhiễm nhưng vi-rút trong cơ thể chưa có thời gian phát triển đủ nhiều để có thể lây nhiễm cho người khác.

Trong mô hình **SEIR** cũng như các cải tiến của nó, có một số tham số rất quan trọng:

- Hệ số lây nhiễm $\beta$ là xác suất một người trạng thái **S** bị lây bệnh từ một người ở trạng thái **I**;
- Tham số $\lambda$ đặc trưng cho tốc độ chuyển từ trạng thái phơi nhiễm sang trạng thái có thể lây cho người khác, nói cách khác $\lambda^{-1}$ là thời gian ủ bệnh trung bình;
- Tham số $\gamma$ là tốc độ khỏi bệnh trung bình.

$$\text{S} \xrightarrow{\beta} \text{E} \xrightarrow{\lambda} \text{I} \xrightarrow{\gamma} \text{R}.$$

Gọi $S, E, I, R$ tương ứng là số lượng cá thể ở các trạng thái, $N$ là tổng số cá thể trong quần thể, nghĩa là:

$$N = S + E + I + R.$$

Trong mô hình **SEIR** cổ điển, chúng ta nghiên cứu dịch bệnh trong thời gian tương đối ngắn, dẫn tới có thể giả định không có cá thể sinh ra và chết đi (vì các nguyên nhân khác ngoài bệnh dịch đang xem xét), không có di cư đến và đi các vùng khác. Khi đó, ta nhận được hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} &= -\beta \dfrac{I}{N} S, \\[2ex] \dfrac{dE}{dt} &= \beta \dfrac{I}{N} S - \lambda E, \\[2ex] \dfrac{dI}{dt} &= \lambda E - \gamma I, \\[2ex] \dfrac{dR}{dt} &= \gamma I. \end{cases}$$

Bạn đọc có thể thấy các giả định của mô hình **SEIR** cổ điển tương đối lý tưởng, vì thế đối với trường hợp Covid-19, các nghiên cứu thường sử dụng các dạng thức mở rộng của mô hình này như thêm lượng người di chuyển giữa các vùng, tỉ lệ tử vong vì các nguyên do khác (xác định từ số lượng thống kê hàng năm), số lượng cá thể được đưa vào các khu cách ly, thậm chí có thể thêm yếu tố lây nhiễm từ động vật.

Khi xác định được đầy đủ các tham số, chúng ta có thể giải được hệ phương trình trên và vẽ được các đường cong. Hình 3 mô tả nghiệm của một mô hình **SEIR** với các giá trị $S, E, I, R$ được quy đổi theo tỉ lệ trên tổng dân số $N$.

Từ Hình 3, ta thấy rằng tỉ lệ số ca lây nhiễm đồng thời có thể lên tới gần 20% dân số.

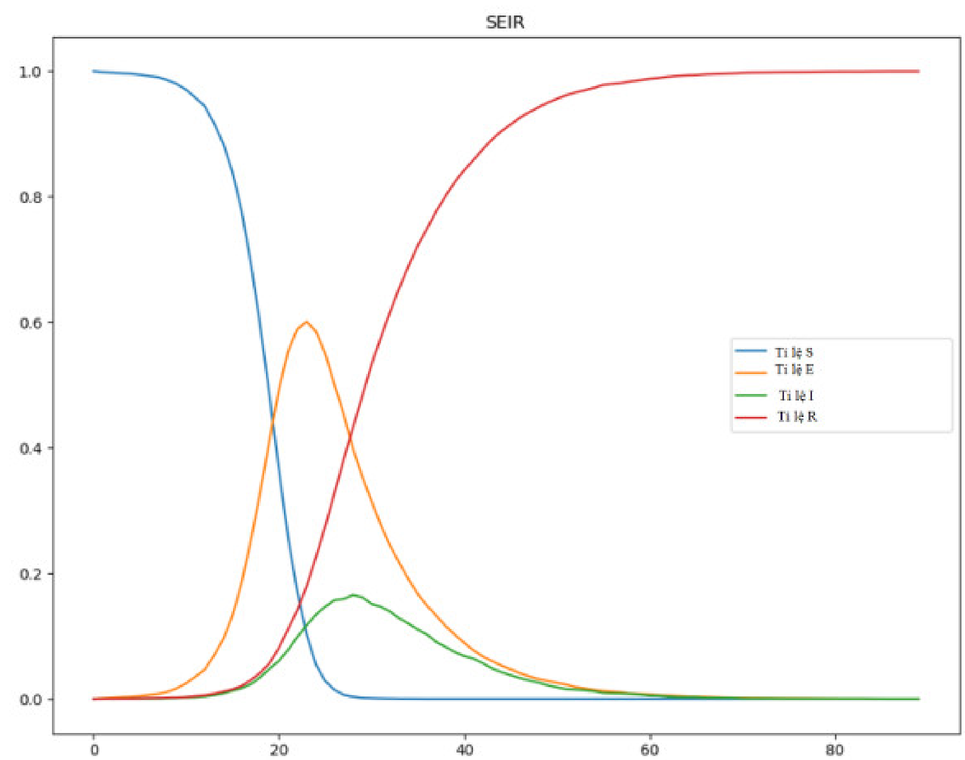
2.3. **Phương pháp tương tự.** Ở giai đoạn đầu khi nghiên cứu dịch Covid-19, một trong những vấn đề lớn nhất là không có đủ những tham số cơ bản cần thiết để tính toán. Trong hoàn cảnh đó, một cách tương đối đơn giản để dự báo về tình hình phát triển của dịch Covid-19 đó là nhìn về các dịch bệnh đã từng diễn ra trong quá khứ. Một dịch bệnh đã bùng phát trên phạm vi toàn cầu cách đây hơn mười năm là bệnh cúm lợn H1N1, trong hai năm 2009 – 2010 (xem Bảng 1).

Phương pháp tương tự đã được sử dụng trong [12]. Theo phương pháp này, vào tháng Ba năm 2020, người ta ước đoán rằng đến tháng Năm năm 2021, tổng số ca nhiễm toàn cầu của bệnh Covid-19 sẽ xấp xỉ 24 triệu với khoảng gần 550 nghìn trường hợp tử vong [12]. Ở thời điểm này, phương pháp tương tự không còn đáng tin cậy nữa, vì đã có 17,4 triệu ca nhiễm và gần 680 nghìn ca tử vong, và tốc độ lây nhiễm từ giữa tháng 7/2020 đến hiện tại là khoảng hơn 200 000 ca mới một ngày.

2.4. **Một số mô hình trên thế giới.**

| Quốc gia | Số ca nhiễm/ tử vong của cúm H1N1 | Số ca nhiễm/ tử vong của Covid-19 | Thời gian tăng gấp đôi của H1N1 | Thời gian tăng gấp đôi của Covid-19 |
|---|---|---|---|---|
| Toàn cầu | 94.512/429 | 335.403/14.611 | 15 ngày | 7 ngày |
| Hoa Kỳ | 33.902/170 | 32.356/414 | | 2 ngày |
| Anh Quốc | 7.447/3 | 5.683/281 | | 3 ngày |
| Trung Quốc | 2.040/0 | 81.054/3.261 | | 36 ngày |

BẢNG 1. So sánh giữa dịch cúm lợn H1N1 2009 và Covid-19. Số liệu của cúm H1N1 theo ngày 06/07/2009 và số liệu của Covid-19 theo ngày 22/03/2020



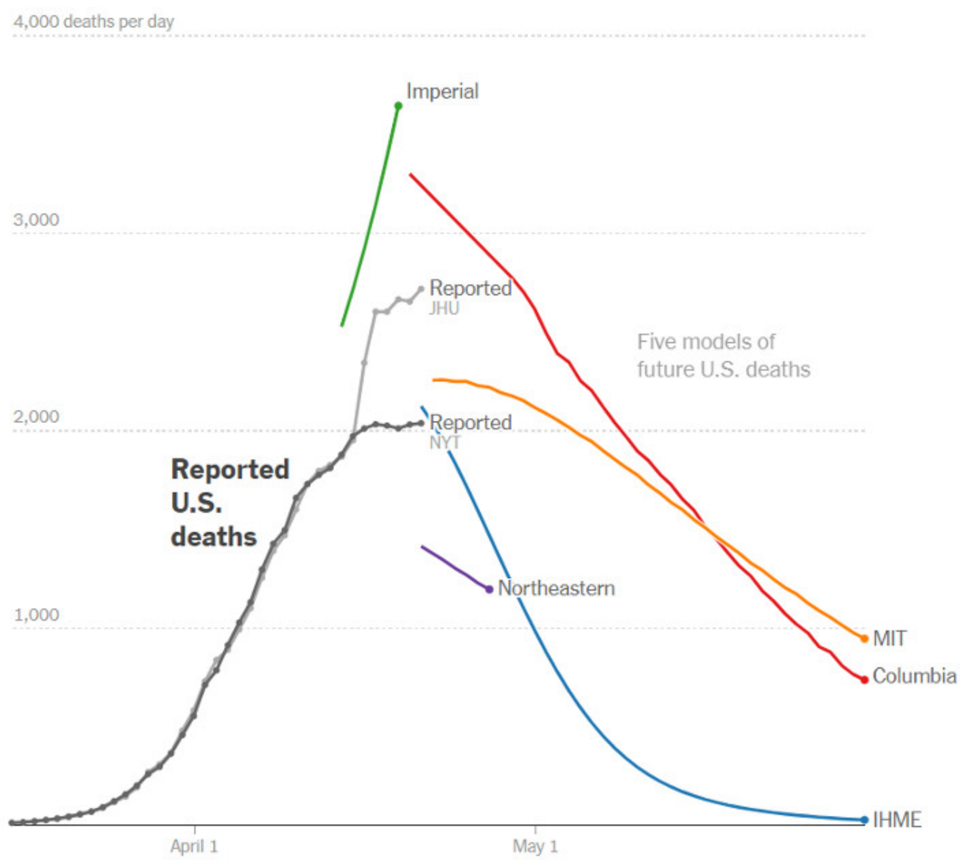

HÌNH 3. Ví dụ về nghiệm của mô hình SEIR

Một mô hình đã dẫn tới sự thay đổi về chiến lược tiếp cận đối với đại dịch Covid-19 của Anh Quốc và Hoa Kỳ là mô hình của ĐH Hoàng gia Luân Đôn (Imperial College London) do GS. Neil M. Ferguson đứng đầu [5]. Kết quả công bố vào ngày 16 tháng Ba năm 2020 của nhóm nghiên cứu của GS. Ferguson cho thấy nếu không áp dụng các chính sách can thiệp, số ca tử vong tại Anh có thể lên tới 510 nghìn và ở Mỹ là 2,2 triệu. Sau đó, một mô hình khác do nhóm nghiên cứu của ĐH Oxford [10] đưa ra vào ngày 26 tháng Ba chỉ ra rằng các ca lây nhiễm có thể đã xuất hiện ở Anh ít nhất một tháng trước khi có báo cáo tử vong đầu tiên, hay nói cách khác, vi-rút đã lây lan rộng khắp.

Mô hình của ĐH Hoàng gia dựa trên từng cá thể (individual–based model hay IBM) còn mô hình của ĐH Oxford dựa trên cộng đồng (population–based model PBM). Mô hình của ĐH Hoàng gia cho thấy với các biện pháp can thiệp hợp lý về mặt chính sách thì có thể làm giảm nhu cầu đối với hệ thống y tế tới 2/3 trong khi số ca tử vong giảm một nửa.

Các kết quả dự báo của các mô hình khác nhau đôi khi khác xa nhau, tùy thuộc vào các tham số được sử dụng.

2.4.2. *Các mô hình dự báo ở Hoa Kỳ.* Trong một bài báo đăng ngày 22 tháng Tư năm 2020, trên *Thời báo New York* [3], các tác giả đã điểm qua 5 mô hình dự báo hay được đề cập đến ở Hoa Kỳ, đó là các mô hình của ĐH Hoàng gia Luân Đôn, ĐH Northeastern, Viện Công nghệ Massachusetts, ĐH Columbia, và Viện Đo lường và Đánh giá Sức khỏe (IHME) tại ĐH Washington. Trong đó, mô hình IHME tham chiếu sự tương tự tới các quốc gia khác trong dịch bệnh Covid-19.




HÌNH 4. Dự báo số ca tử vong vì Covid-19 tại Hoa Kỳ của 5 mô hình.
Nguồn: Thời báo New York

Mặc dù cho kết quả dự báo rất khác nhau về số tử vong trong một ngày, nhưng cả năm mô hình đều dự đoán số ca tử vong tại Hoa Kỳ là từ 60 nghìn đến 100 nghìn vào ngày 23 tháng Năm năm 2020 (số thực tế là gần một trăm nghìn; xem Hình 4).

## 3. Vì sao các mô hình dự báo thiếu chính xác?

Việc đưa ra các mô hình dự báo chính xác là rất khó khăn, bởi các tham số có thể thay đổi rất nhiều phụ thuộc vào các yếu tố chính sách. Ví dụ các chính sách về truy vết, hạn chế đi lại, đóng cửa trường học, đóng cửa các nơi tập trung đông người, hay giãn cách xã hội có thể làm giảm đáng kể hệ số tái sinh $R_0$, tức là số người khỏe mạnh trung bình bị lây nhiễm từ một người mắc bệnh. Vì thế các mô hình thường đưa ra dự báo không quá hai tháng. Và để đảm bảo dự báo chính xác, các nhà tính toán mô hình thường xuyên phải cập nhật lại các tham số này. Việc này được GS. Andrew Noymer ở ĐH California tại Irvine ví như sửa một cái xe ngay khi nó đang chạy.

Bên cạnh đó, ngay cả các dữ liệu cơ bản cho việc chạy mô hình như số ca nhiễm, số ca diễn biến nặng, số ca tử vong cũng có thể sai lạc do khó khăn trong việc thu thập dữ liệu hay do xác định nhầm.

## 4. Tầm quan trọng của các mô hình

Mặc dù các mô hình dự báo thường có độ sai lệch nhất định, nhưng chúng ta vẫn luôn cần xây dựng các mô hình này. Bởi chúng cho chúng ta cái nhìn trực quan về những khả năng có thể xảy ra, ước lượng được nguy cơ, cũng như đánh giá được vai trò tác động của các chính sách, những điểm cá biệt về văn hóa, khác biệt cộng đồng đối với sự bùng phát dịch bệnh. Mô hình cũng là dạng thức cho phép chúng ta có thể tiến hành các thử nghiệm về mặt chính sách để xem xét tính hiệu quả và ước lượng chi phí trước khi áp dụng trên thực tế. Hơn thế nữa, việc thiết lập các mô hình còn cung cấp kinh nghiệm và những ước đoán ban đầu cho các dịch bệnh có thể xảy ra trong tương lai.

## Tài liệu


[1] Biello, D., *Ancient Athenian Plague Proves to be Typhoid*, Scientific American, 2006.

[2] Brauer, F., & Castillo - Chavez, C., *Mathematical Models in Population Bilogy and Epidemiology*, Springer, 2001.

[3] Bui, Q., Katz, J., Parlapiano, A., & Sanger-Katz, M., *What Five Coronavirus Models Say the Next Month Will Look Like*, New York Times, 2020.

[4] Daley, D. J., & Gani, J., *Epidemic Modeling: An Introduction*, Cambridge University Press, 2005.

[5] Ferguson, N. M., Laydon, D., Nedjati-Gilani, G., Imai, N., Ainslie, K., Baguelin, M., Bhatia, S., Boonyasiri, A., Cucunubá, Z., Cuomo-Dannenburg, G., Dighe, A., Dorigatti, I., Fu, H., Gaythorpe, K., Green, W., Hamlet, A., Hinsley, W., Okell, L. C., Elsland, S., Thompson, H., Verity, R., Volz, E., Wang, H., Wang, Y., Walker, P. G., Walters, C., Winskill, P., Whittaker, C., Donnelly, C., Riley, S., & Ghani, A., *Report 9: Impact of non-pharmaceutical interventions (NPIs) to reduce Covid-19 mortality and healthcare demand*, London: Imperial College London, 2020.

[6] Gottfried, R., *Black Death*. In: *Dictionary of the Middle Ages*, Vol. 2, pp. 257-267, 1983.

[7] Hethcote, H. W., *The Mathematics of Infectious Diseases*, SIAM, 42, 599-653, 2000.

[8] Igeji, M., *Black Death*, BBC, 2008.

[9] Little, L. K. (e.d.), *Plague and the End of Antiquity*. Truy cập từ trang http://www.cambridge.org/us/catalogue/catalogue.asp?isbn=0521846390&ss=fro.

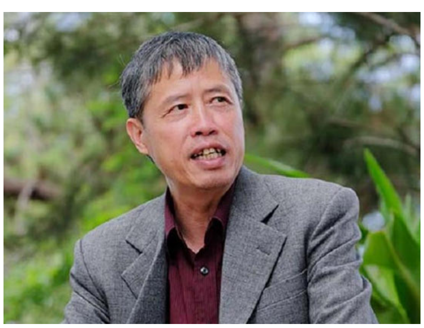
[10] Lourenco, J., Paton, R., Ghafari, M., Kraemer, M., Thompson, C., Simmonds, P., Klenerman, P., & Gupta, S., *Fundamental principles of epidemic spread highlight the immediate need for large-scale serological surveys to asses the stage of the SARS-CoV-2 epidemic*, Oxford, 2020.

[11] Revill, J., *Black Death blamed on man, not rats*, The Observer, 2004.
[12] Rossman, J., *Coronavirus: what the 2009 swine flu pandemic can tell us about the weeks to come*, The conversation, 2020.
[13] Taubenberger, J. K., & Morens, D. M., *1918 Influenza: the mother of all pandemics*, Emerging Infectious Diseases, 12(1), 15-22, 2006.
[14] Trifonov, V., Khiabanian, H., & Rabadan, R., *Geographic Dependence, Surveillance, and Origins of the 2009 Influenza A (H1N1) Virus*, New England Journal of Medicine, 361(2), 115-119, 2009.
[15] Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Pandemic.

# PGS. Phạm Tiến Sơn dưới góc nhìn của một đồng nghiệp

**Đinh Sĩ Tiệp**[1]

Sinh ra và lớn lên ở Đà Lạt, tôi quen chú Sơn từ nhỏ. Tuy nhiên, chỉ từ khi cùng tham gia nhóm làm việc tại Viện Nghiên cứu Cao cấp về Toán năm 2012, các mối liên hệ về toán học giữa tôi và chú Sơn mới bắt đầu hình thành và sự hợp tác này được kéo dài cho đến ngày nay. Ngoài mối quan tâm chung về một số vấn đề trong Lý thuyết Kỳ dị, Hình học thực và ứng dụng trong Lý thuyết Tối ưu, chúng tôi cũng chia sẻ một số quan điểm chung về cuộc sống khiến cho việc hợp tác trong công việc trở nên dễ dàng hơn.



PGS. Phạm Tiến Sơn, Giải thưởng Tạ Quang Bửu 2020 của Bộ Khoa học và Công nghệ. Ảnh: Báo mạng doanhnhanplus.vn

Sống ở Đà Lạt nhiều năm, chú Sơn là một người đam mê toán và có một cuộc sống khá đơn giản và bình dị. Vì là một người không quen sống ở các thành phố lớn, với chú, được làm việc bên những hàng cây với một mức thu nhập vừa đủ quan trọng hơn làm việc trong những tòa nhà bê tông nóng nực ở Hà Nội hay Sài Gòn với một mức thù lao cao hơn. Đôi khi, tôi cũng nhìn thấy sự bình dị đó ở GS. Krzysztof Kurdyka – một trong hai người thầy hướng dẫn khi tôi làm nghiên cứu sinh – mặc dù tính cách này của GS. Kurdyka có thể đến từ một hoàn cảnh khác. Chú Sơn thỉnh thoảng vẫn nói, làm toán thì thường chỉ tiếp xúc với những người làm toán, như vậy là xác suất gặp được người tử tế sẽ cao hơn, cuộc sống đã đỡ phiền toái rồi.

Là một thành phố nhỏ, ở Đà Lạt không có nhiều người làm toán tuy vẫn có một nhóm làm việc đã được duy trì vài chục năm qua. Vậy nên, khả năng trao đổi chuyên môn ít nhiều bị hạn chế và do đó, việc duy trì động lực làm toán không phải là điều dễ dàng. Nếu không có niềm đam mê, việc gắn bó với toán gần 30 năm qua như chú có lẽ là điều bất khả thi. Để tăng cường trao đổi khoa học, khi có dịp, chú

[1]Viện Toán học, Viện HLKHCN Việt Nam. Email: dstiep@math.ac.vn

lại mời đồng nghiệp gần chuyên môn đến Đà Lạt để thảo luận, nhất là với những đồng nghiệp đến từ nước ngoài. Chú là người rất nhiệt tình với các đồng nghiệp. Ngày trước, chú không nề hà việc tổ chức hội nghị quốc tế tại trường dù việc này đem lại cho chú khá nhiều phiền toái. "Social life" của chú phần nhiều gắn với những đồng nghiệp trong ngành toán.

Sự đơn giản trong lối sống cũng phần nào ảnh hưởng đến sự đơn giản trong phong cách làm toán của chú. Ở đây, đơn giản không có nghĩa là làm những vấn đề đơn giản mà là tìm lời giải đơn giản nhất có thể để giải quyết bài toán, làm sao lời giải dễ hiểu nhất với người đọc, nhất là với những người chưa thực sự có chuyên môn về vấn đề được xét.

PGS. Phạm Tiến Sơn sinh năm 1964 tại Hải Phòng. Bảo vệ luận án tiến sĩ năm 2001 tại Viện Toán học. Là cựu sinh viên ĐH Đà Lạt, Phạm Tiến Sơn làm việc tại Khoa Toán tin của ĐH Đà Lạt từ năm 1985 đến nay. TS. Phạm Tiến Sơn đã có vị trí nghiên cứu ở những nơi như ĐH Aix-Marseille, LMI-INSA Rouen, ICTP (Trieste), Viện Nghiên cứu Cao cấp về Toán. Hướng nghiên cứu chính của ông là Lý thuyết kỳ dị và Hình học nửa đại số. Ông được trao giải thưởng Tạ Quang Bửu năm 2020 cho công trình "Generic properties for semialgebraic programs" trên *SIAM Journal on Optimization*, viết chung với Gue Myung Lee, thuộc ĐH Quốc gia Pukyong, Hàn Quốc.

Ngoài các nghiên cứu về Lý thuyết kỳ dị và Hình học nửa đại số thuần túy, trong vòng 15 năm trở lại đây, chú Sơn đặc biệt quan tâm đến việc nghiên cứu bài toán Tối ưu nửa đại số. Những hiểu biết về kỳ dị tại vô hạn của các ánh xạ đa thức trở nên đặc biệt hữu ích với bài toán này. Các kết quả đầu tiên của chú Sơn theo hướng nghiên cứu này được thực hiện cùng GS Hà Huy Vui với công cụ chính được sử dụng là các đa tạp tiếp xúc (tangency varieties) và biểu diễn tổng bình phương. Chú ý rằng nếu trong trường hợp phức, đa tạp cực (polar varieties) đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu kỳ dị của tập giải tích phức thì trong trường hợp thực, đa tạp tiếp xúc chứa nhiều thông tin hữu ích của các hàm nửa đại số. Nhiều ứng dụng trong tối ưu nửa đại số của đa tạp tiếp xúc vẫn được chú Sơn khai thác sau này.

Các công cụ của Lý thuyết kỳ dị và Hình học nửa đại số giúp chúng ta nhìn vấn đề Tối ưu nửa đại số theo một khía cạnh khác, trong đó các giả thiết thường thấy ở các vấn đề tối ưu "không nửa đại số" như tính lồi của hàm mục tiêu, của các hàm ràng buộc và tính com-pắc của tập ràng buộc có thể được loại bỏ. Các tính chất "hài hòa" (tame) của tập hay ánh xạ nửa đại số cho phép thu được nhiều kết quả đẹp trong tối ưu mà không cần giả thiết lồi và thậm chí không cần giả thiết trơn. Do tập ràng buộc của bài toán Tối ưu nửa đại số không nhất thiết com-pắc, ta cần một số điều kiện chính quy tại vô hạn đối với hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc. Các điều kiện chính quy này có thể dễ dàng được thiết lập trong trường hợp riêng là bài toán Tối ưu đa thức, trong đó hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc là các hàm đa thức, dựa trên đa diện Newton tại vô hạn của các hàm đa thức mục tiêu và ràng buộc. Cho đến nay, hầu hết các kết quả của chú Sơn theo hướng nghiên cứu này đều dừng ở việc xét vấn đề Tối ưu đa thức hoặc vấn đề Tối ưu nửa đại số với các hàm ràng buộc được xác định tường minh, bao gồm cả công trình được Giải thưởng Tạ Quang Bửu "Generic properties for semialgebraic programs". Vì vậy, bài toán Tối ưu nửa đại số vẫn còn giữ nguyên tính thời sự của nó, như nhà toán học người Pháp Henri Poincaré đã nói "*Il* *n'y a pas de problèmes résolus, il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus*." (Không có vấn đề đã được giải quyết trọn vẹn, chỉ có những vấn đề ít nhiều được giải quyết).

Khi nghiên cứu bài toán Tối ưu nửa đại số dưới dạng tổng quát hay trường hợp tổng quát hơn là bài toán Tối ưu tame trên tập ràng buộc không bị chặn khi các hàm ràng buộc không được xác định tường minh, việc khảo sát các đối tượng hình học tại vô hạn của tập ràng buộc là cực kỳ quan trọng. Các đối tượng này bao gồm thớ Nash, nón tiếp xúc và hướng ngoại lệ tại vô hạn,... Vì vậy, bài toán Tối ưu nửa đại số thực sự là một hướng nghiên cứu hấp dẫn, mang tính thời sự và khả thi với những người được trang bị đầy đủ kiến thức về Hình học đại số thực và Lý thuyết Kỳ dị.

# Tác phẩm của Nicholas Bourbaki[1]

**Jean A. Dieudonné**

Để hiểu xuất xứ của Bourbaki, chúng ta phải quay lại những năm sau Chiến tranh thế giới thứ nhất, khi tôi còn là sinh viên. Cuộc chiến này là một bi kịch lớn cho toán học Pháp. Tôi không phải quan tòa để phán xét hay rao giảng những bài học luân lý về những gì đã diễn ra trong cuộc chiến. Trong chiến tranh thế giới 1914-1918, chính phủ Đức và chính phủ Pháp có những chính sách khác nhau đối với lực lượng khoa học. Người Đức khuyến khích các nhà khoa học theo đuổi công việc của mình, và tận dụng những phát minh và sáng chế khoa học để nâng cao sức mạnh quân sự của quân đội Đức. Người Pháp, ít nhất là ở giai đoạn đầu cuộc chiến, nghĩ rằng phải động viên tất cả nhân lực cho chiến tranh; vì thế các nhà khoa học trẻ cũng phục vụ ở mặt trận như mọi người. Tinh thần bình đẳng và ái quốc đó đáng để ta khâm phục, nhưng hậu quả là rất nhiều nhà khoa học trẻ đã hy sinh. Lật lại hồ sơ thời chiến của Trường Sư phạm Paris, ta thấy những khoảng trống lớn vì có đến hai phần ba lực lượng nhập ngũ đã chết trong cuộc chiến. Tình thế này ảnh hưởng nặng nề đến toán học Pháp. Chưa đủ tuổi nhập ngũ trong thế chiến, thế hệ chúng tôi bước vào đại học mà không có sự dìu dắt của thế hệ đàn anh mà chắc chắn có không ít những người xuất chúng. Chiến tranh bạo tàn cướp đi cuộc sống của họ và triệt tiêu dấu ấn khoa học của họ.

Dĩ nhiên vẫn còn lại những nhà khoa học lớn tuổi, những học giả đem lại cho chúng tôi lòng tự hào và niềm kính trọng. Các giáo sư như Picard, Montel, Borel, Hadamard, Denjoy, Lebesgue, v.v., vẫn tiếp tục sống và làm việc năng nổ, nhưng họ đã đến tuổi ngũ tuần hoặc hơn nữa. Có một khoảng cách thế hệ lớn giữa họ và chúng tôi. Không phải chúng tôi không được học những điều quý giá từ họ: các bài giảng của họ đều tuyệt vời, nhưng một điều khó bàn cãi (dù ở thời đại nào cũng vậy) là một nhà toán học ở tuổi ngũ tuần biết rõ nhất những điều mình đã học ở tuổi hai mươi hay ba mươi, còn với toán học đương thời, người đó chỉ có hiểu biết tương đối sơ lược. Đó là một sự thực cần

[1]Bài giảng tại Viện Toán học Roumanie, Bucharest, tháng 10 năm 1968. Nguồn: The American Mathematical Monthly, tập **77**, số 2 (1970), 134–145.

chấp nhận hơn là một điều dễ dàng thay đổi.

Jean A. Dieudonné (1906-1992).
Ảnh chụp của Paul Halmos.

Chúng tôi được học các giáo sư thông thạo về toán học của những năm 1900, nhưng chúng tôi không biết gì nhiều về toán học của những năm 1920. Như đã nói ở trên, nước Đức có chính sách khoa học khác với Pháp, nên sau thế chiến trường phái toán học Đức đạt đến độ chín phi thường. Để làm rõ điểm này, chỉ cần nhắc đến những tên tuổi hàng đầu: C.L. Siegel, E. Noether, E. Artin, W. Krull, H. Hasse, v.v., những người rất ít được biết đến ở Pháp. Hơn thế, nước Pháp cũng gần như mù tịt về trường phái toán học đang phát triển nhanh của Nga, trường phái non trẻ nhưng xuất chúng của Ba Lan, và nhiều nền toán học khác. Chúng tôi không biết đến công trình của F. Riesz hay von Neumann, v.v. Chúng tôi đóng chặt cửa, sống trong thế giới của mình, với lý thuyết hàm giữ vị trí độc tôn. Ngoại lệ duy nhất là Elie Cartan; nhưng vì đi trước thời đại mình đến 20 năm, Cartan hầu như không được ai ở Pháp biết đến. (Người đầu tiên sau Poincaré thấu hiểu tài năng của Cartan là Hermann Weyl, và suốt mười năm trời chỉ có Weyl là người duy nhất hiểu Cartan, làm sao lũ sinh viên trẻ chúng tôi có đủ kiến thức để hiểu ông?) Nên ngoại trừ E. Cartan, người vẫn vô danh ở giai đoạn này (Cartan sẽ được biết đến hai mươi năm sau, để rồi từ đó danh tiếng của ông mỗi ngày một lớn), chúng tôi bị bó buộc trong lý thuyết hàm, một lĩnh vực tuy quan trọng nhưng chưa phải là tất cả toán học.

Cánh cửa duy nhất mở ra với thế giới cho chúng tôi lúc đó là seminar của Hadamard, người tuy là giáo sư của Đại học Pháp nhưng không phải là một nhà sư phạm xuất chúng. (Sự nghiệp trứ tác của ông đủ lớn để có thể nói như vậy mà không làm tổn hại gì đến danh tiếng của ông.) Ông có ý tưởng tổ chức một seminar giải tích về các công trình đương đại (có lẽ ông học được ý tưởng này từ nước ngoài, vì việc này chưa có tiền lệ ở Pháp). Đầu năm học ông gửi cho tất cả những ai muốn trình bày báo cáo trong seminar bản thảo mà ông cho là quan trọng nhất trong năm vừa qua, và mỗi người phải trình bày vấn đề trên bảng. Ở thời đó đây là một ý tưởng mới mẻ, một ý tưởng đặc biệt quý giá vì nhờ nó chúng tôi được tiếp cận công trình của những nhà toán học với nguồn gốc xuất thân khác nhau. Seminar Hadamard nhanh chóng cuốn hút cả những nhà toán học ngoại quốc; họ đến góp mặt đông đảo. Cánh sinh viên trẻ chúng tôi nhờ đó được tiếp cận với nhiều nhà toán học và trường phái toán học mà mình chưa từng biết đến trên giảng đường đại học. Tình trạng đó tiếp diễn, cho đến lúc một số người trẻ tuổi như A. Weil, C. Chevalley, với kinh nghiệm từ những chuyến đi Ý, Đức, Ba Lan, v.v., nhận ra rằng cần phải làm điều gì đó nếu không muốn nước Pháp bị bỏ lại phía sau. Pháp có thể tiếp tục duy trì thế mạnh về lý thuyết hàm, nhưng trong tất cả các ngành còn lại, sẽ không ai quan tâm đến các nhà toán học Pháp nữa. Một truyền thống hai trăm năm đang có nguy cơ sụp đổ, vì từ Fermat đến Poincaré, những nhà toán học Pháp lớn nhất luôn nổi danh như là những người có tầm phổ quát, lịch duyệt cả về số học lẫn đại số, giải tích, hay hình học. Chúng tôi lo lắng khi một thế giới ý tưởng đang được phát triển ở ngoài những bức tường chật hẹp của nước Pháp, một số trong chúng tôi được đi ra ngoài và tận mắt chứng kiến những bước tiến đó. Sau khi Hadamard nghỉ hưu năm 1934, seminar của ông được tiếp tục với chút ít điều chỉnh bởi G. Julia. Trọng tâm bây giờ hướng về nghiên cứu một cách hệ thống hơn những ý tưởng toán học lớn đang nở rộ ở khắp mọi nơi. Tình hình này dẫn đến ý tưởng không chỉ giới hạn ở tổ chức seminar nữa, mà cần xuất bản một bộ sách để thâu tóm những ý tưởng chính của toán học hiện đại. Đó là bối cảnh đưa đến các tác phẩm của Bourbaki. Cần phải nhấn mạnh rằng các thành viên của Bourbaki khi đó đều rất trẻ và nếu già dặn hơn, hiểu biết có hệ thống hơn, chắc chắn họ đã không bao giờ xuất bản được các tác phẩm mang tên Bourbaki. Trong phiên họp đầu tiên, chúng tôi dự định trong vòng ba năm sẽ hoàn thành một cuốn sách phác thảo những nguyên lý cơ bản của toán học. Lịch sử đi theo một hướng khác. Dần dần, tích lũy thêm kinh nghiệm và sự tỉnh táo, chúng tôi mới ý thức được khối lượng khổng lồ các công việc cần làm và hiểu rằng không thể hoàn thành nhanh chóng như dự định ban đầu được.

Phải thừa nhận rằng thời điểm này đã xuất hiện nhiều chuyên khảo xuất sắc và lúc đầu bộ sách hai tập "Đại số hiện đại" của Van der Waerden là tấm gương để Bourbaki noi theo. Tôi không định hạ thấp uy tín của Van der Waerden, nhưng chính ông đã nói trong lời nói đầu rằng đằng sau cuốn sách của ông là thành quả lao động chung với cả E. Noether và E. Artin, nên có thể coi "Đại số hiện đại" như một tác phẩm tiền thân của Bourbaki. Bộ sách của Van der Waerden có tác động vang dội. Tôi vẫn nhớ năm 1930 ấy, khi đang làm luận án tiến sĩ ở Berlin. Ngày sách của Van der Waerden ra đời là một dấu mốc không thể phai mờ. Kiến thức đại số khi ấy của tôi quá thấp so với đầu vào của các trường đại học ngày nay. Tôi hối hả lật giở từng trang sách của "Đại số hiện đại" và ngỡ ngàng thấy một thế giới rộng lớn mở ra trước mắt. Kiến thức đại số của tôi ngày đó dừng lại ở *mathématiques spéciales*[2], định thức, một chút về tính giải được của các phương trình đa thức và đường cong hữu tỉ[3]. Tuy mới tốt nghiệp Đại học Sư phạm Paris, nhưng tôi không biết thế nào là một iđêan, và chỉ mới học khái niệm "nhóm"! Ở những năm 1930 đây cũng là tình trạng hạn chế chung về kiến thức của những nhà toán học trẻ ở Pháp. Vì thế nhóm Bourbaki cố gắng noi theo gương của Van der Waerden, nhưng Van der Waerden chỉ đề cập đến đại số, hơn nữa chỉ một phần nhỏ của đại số. (Sau này, đại số sẽ phát triển đáng kể một phần nhờ bộ sách kinh điển của Van der Waerden. Tôi hay được hỏi nên bắt đầu học đại số từ đâu, và trong phần lớn trường hợp tôi vẫn đáp: Đọc Van der Waerden trước hết, rồi hãy bận tâm đến những bước phát triển về sau.)

Đó là dự định ban đầu của chúng tôi. Van der Waerden sử dụng một ngôn ngữ rất chính xác, một cách tổ chức và phát triển các ý tưởng rất chặt chẽ và cô đọng, trong từng phần cũng như toàn thể bộ sách. Cảm thấy đây là cách viết sách tối ưu, chúng tôi bắt đầu soạn thảo về rất

[2]Lớp toán dự bị dành cho học sinh đã tốt nghiệp phổ thông, chuẩn bị thi vào đại học. (Các chú thích trong bài từ đây về sau là của người dịch.)

[3]Cũng được gọi là đường cong đơn (unicursal curve).

nhiều đề tài trước đó chưa được ai xem xét một cách tường tận. Lý thuyết tôpô sơ cấp chỉ có trong một vài chuyên khảo và trong sách của Fréchet – một tập hợp vô tổ chức của một số khổng lồ các kết quả. Tôi cũng có thể nói như thế về sách của Banach, tuy sâu sắc về chất lượng khoa học nhưng rất lộn xộn; về những đề tài khác như tích phân (theo cách hiểu của Bourbaki) và một số lớp phương trình đại số, gần như không tồn tại một tài liệu nào. Trước chương sách Bourbaki viết về đại số đa tuyến tính, tôi không biết bất cứ tài liệu giáo khoa nào trên thế giới giải thích thế nào là đại số ngoài. Chỉ có cách đọc những tác phẩm không quá rõ ràng của Grassmann. Và như thế nhóm Bourbaki nhận ra mình đang xử lý một khối lượng công việc khổng lồ, vượt xa tưởng tượng ban đầu, và như chúng ta đều biết, công việc ấy vẫn còn lâu mới kết thúc. Trong vali của tôi là bản thảo của cuốn sách thứ ba mươi tư của Bourbaki, trong đó có ba chương về lý thuyết nhóm Lie. Rất nhiều bản thảo khác đang trong quá trình chuẩn bị; những cuốn sách trước đã ra được bản chỉnh lý thứ ba hay thứ tư, nhưng chưa biết lúc nào chúng tôi mới kết thúc việc xuất bản.

Một số thành viên của Bourbaki năm 1935. Những người đứng từ trái sang: Henri Cartan, René de Possel, Jean Dieudonné, André Weil, Luc Olivier (một nhà sinh học). Hàng dưới từ trái sang: một "đối tượng thí nghiệm" mang tên Mirles, Claude Chevalley, và Szolem Mandelbrojt.
Nguồn: Archives Charmet/Bridgeman Images.

Chúng tôi đã cân nhắc xem phải bắt đầu từ đâu, phải làm những gì. Phải chăng chúng tôi nên soạn một cuốn *Bách khoa toàn thư về Toán học*? Như chúng ta đều biết, người Đức đã khởi thảo một cuốn Bách khoa toàn thư như thế từ 1900. Nhưng cả với sự kỷ luật và chăm chỉ trứ danh của người Đức, đến 1930, sau rất nhiều bổ sung và sửa đổi, bộ sách đó vẫn tỏ ra quá bất cập so với toán học đương thời. Ngày nay, đứng trước khối lượng khổng lồ các ấn phẩm toán học ra đời mỗi năm, chẳng ai còn nghĩ đến một kế hoạch phi thực tế như vậy. Có lẽ ít nhất ta cũng phải đợi đến khi máy tính cũng có trí tuệ và hiểu được tất cả các ấn phẩm toán học đó trong vòng vài phút. Tình hình hiện tại cũng như tình hình của 1930 chưa cho phép điều đó được thực hiện. Lặp lại một kế hoạch đáng kính nể nhưng đã thất bại là việc vô ích. Bộ *Bách khoa toàn thư* của năm 1930 chỉ thực sự hữu dụng như một danh mục tài liệu tham khảo, cho ta biết đại loại cần tìm một kết quả toán học ở đâu. Tất nhiên bộ Toàn thư không có một chứng minh nào, vì muốn thêm vào chứng minh, ta sẽ phải gia tăng số lượng 25 đến 30 cuốn sách của bộ lên khoảng mười lần. Không, cái chúng tôi muốn không phải một danh mục tài liệu thao khảo, mà là một tác phẩm giới thiệu chi tiết về toán học từ những nguyên lý đơn giản nhất. Điều này bắt buộc chúng tôi phải đưa ra những chọn lựa gắt gao. Những chọn lựa nào? Vâng, đó chính là phần căn bản trong quá trình hoạt động của Bourbaki. Ý tưởng mau chóng chiếm được sự đồng thuận là tác phẩm của Bourbaki phải mang tính *công cụ*. Đó là phải thứ gì hữu ích không chỉ trong một phần nhỏ mà trong càng nhiều càng tốt các địa hạt toán học. Nói đơn giản, chúng tôi muốn tập trung vào những ý tưởng toán học căn bản và những nghiên cứu thiết yếu nhất. Chúng tôi phải loại bỏ bất cứ thứ gì thứ yếu, không có ứng dụng rộng rãi hay không trực tiếp dẫn đến những khái niệm quan trọng đã được thời gian thử thách. Đã có rất nhiều cân nhắc – nguyên nhân của vô số các thảo luận trong nội bộ Bourbaki và không ít thái độ thù hằn dành cho nhóm. Khi các tác phẩm của Bourbaki bắt đầu có tiếng vang, nhiều người không mặn mà với việc đánh giá tích cực về Bourbaki vì đề tài họ yêu thích không được đề cập đến. Tôi cho rằng nguyên nhân của không ít sự bất mãn với Bourbaki nằm ở quá trình sàng lọc đề tài gắt gao của chúng tôi.

Đâu là cách lựa chọn những kết quả căn bản của chúng tôi? Một ý tưởng cần nhắc đến ở đây là ý tưởng về các *cấu trúc toán học*. Tôi không nói rằng ý tưởng này do chính Bourbaki nghĩ ra – không có gì phải bàn cãi về việc Bourbaki hiếm khi viết ra các kết quả hoàn toàn mới. Bourbaki không tìm cách cách tân toán học, và nếu một định lý được Bourbaki nhắc đến, thì nó đã được chứng minh từ trước đó hai, hai mươi, hay hai trăm năm. Điều Bourbaki làm là định vị và khái quát một ý tưởng đã được sử dụng rộng rãi từ lâu. Bắt đầu từ Hilbert và Dedekind, chúng ta đều biết rằng có thể xây dựng một cách chặt chẽ và hữu ích một phần lớn của toán học dựa trên một số ít các tiên đề được lựa chọn kỹ càng. Bắt đầu từ những tiên đề căn bản của một lý thuyết, ta có thể phát triển cả lý thuyết một cách hệ thống, toàn diện hơn bất kỳ phương pháp nào khác. Ý niệm về cấu trúc toán học xuất phát từ nhận xét đó. Cần phải nói ngay rằng, về sau này, ý niệm về cấu trúc toán học đã bị vượt qua bởi ý niệm về phạm trù và hàm tử, trong đó cấu trúc toán học xuất hiện dưới dạng tổng quát và tiện dụng hơn. Với tinh thần dũng cảm trước mọi thách thức mới (tôi sẽ nói rõ hơn về điểm này), ở những năm 1930, Bourbaki nhận thức rõ nhiệm vụ sử dụng các cấu trúc toán học trong tác phẩm của mình.

Với nhận thức đó, chúng tôi phải cân nhắc xem đâu là những cấu trúc toán học quan trọng nhất. Lẽ dĩ nhiên, cần rất nhiều thảo luận trước khi chúng tôi đi đến sự đồng thuận. Có thể nói Bourbaki không bao giờ cho mình là kẻ độc quyền chân lý; Bourbaki đã từng nhầm lẫn về tương lai phát triển của các cấu trúc toán học, nhưng chúng tôi đã từ bỏ những nhận định sai và biết nhận lỗi kịp thời. Những ấn bản chỉnh lý là chứng nhân rõ ràng của nhiều thay đổi. Bourbaki không có tham vọng gò toán học vào một khuôn khổ nhất định; điều đó đi ngược lại với mục đích ban đầu của chúng tôi. Nếu thiếu sự trân trọng với những ý tưởng mới, kể cả những ý tưởng vượt ra khỏi khuôn khổ của Bourbaki, thì chính chúng tôi đang phản bội lại truyền thống. Thái độ nhất quán không giấu giếm của Bourbaki cũng lại là một nguồn gây ra sự bất mãn, lần này là từ những thế hệ toán học đi trước, khi họ chỉ trích Bourbaki hành xử tùy tiện với di sản toán học trong quá khứ. Cụ thể hơn, việc lựa chọn định nghĩa và thứ tự trình bày các lý thuyết của Bourbaki luôn có tính logic và tuần tự. Nếu một cách trình bày trong quá khứ không tương thích với mô hình lý thuyết hiện tại, thì, rất tiếc, chúng tôi nghĩ rằng phải loại bỏ cách trình bày đó, dù nó có một truyền thống lâu đời đến thế nào. Ví dụ: Bourbaki từ chối gọi một hàm tăng là "không giảm". Chúng ta biết rằng từ "không giảm" chỉ diễn đạt đúng điều chúng ta muốn khi quan hệ thứ tự được dùng đến là quan hệ thứ tự toàn phần. (Nếu làm việc với một quan hệ thứ tự không toàn phần, từ "không giảm" tất nhiên không diễn tả quan hệ "tăng nhưng không tăng ngặt".) Vì thế Bourbaki loại bỏ hoàn toàn việc dùng từ này, cũng như nhiều từ khác. Bourbaki cũng sáng tạo ra nhiều thuật ngữ, đôi khi sử dụng cả tiếng Hy Lạp, nhưng nhiều trường hợp dùng ngôn ngữ thông thường, khiến những người câu nệ truyền thống trong toán học nhíu mày. Không chấp nhận nổi việc *khối siêu cầu* (hypersphéroide) ngày nào nay bị gọi là *quả cầu* (boule) hay *đa diện song song* (parallélotope) bây giờ bị giáng cấp xuống thành *hình hộp* (pavé), họ lắc đầu: "Sách vở gì cái thứ cợt nhả này." Có một cuốn sách ra đời gần đây rất thú vị với chúng tôi. Đó là cuốn *Thuật ngữ bí hiểm của các ngành khoa học* của Etiemble, một chuyên gia bảo vệ ngôn ngữ tiếng Pháp. Etiemble cương quyết bảo tồn sự trong sáng của tiếng Pháp chống lại ngôn từ bí hiểm của phần lớn các khoa học gia. Rất hân hạnh là ông coi các nhà toán học Pháp như ngoại lệ khi bảo họ đã khôn ngoan lựa chọn những từ ngữ đơn giản, nguyên gốc Pháp từ trong ngôn ngữ hàng ngày, đôi khi thay đổi chút ít ý nghĩa. Ông đưa ra những ví dụ hấp dẫn, những bài báo mới xuất hiện như *Platitude et privilège* và *Sur les variétés riemanniennes non suffisamment pincées*(4). Đó là phong cách ngôn ngữ của Bourbaki – một ngôn ngữ dễ tiếp cận, không bùng nhùng trong mớ thuật ngữ pha trộn đậm đặc các cụm từ viết tắt, như với nhiều văn bản Anh ngữ đề cập với độc giả về C.F.T.C., vốn liên hệ chặt chẽ với A.L.V. trừ trường hợp nó là một B.S.F. hay một Z.D., v.v. Sau khi đọc được mười trang khảo cứu như thế chẳng ai còn hiểu nổi câu chuyện đang được bàn thảo là gì. Bourbaki cho rằng giá thành mực in đủ rẻ để viết sách bằng ngôn ngữ

(4)Tạm dịch: Platitude et privilège: Phẳng lì và đặc quyền. Sur les variétés riemanniennes non suffisamment pincées: Về các đa tạp Riemann không đủ bị chèn ép.

rõ ràng, sử dụng những từ ngữ được cân nhắc kỹ càng.

Tôi nói rằng Bourbaki đã phải sàng lọc gắt gao khi chọn đề tài để viết. Để giải thích rõ hơn sự sàng lọc này, tôi sẽ dùng một hình ảnh so sánh. Dù cần đến ý tưởng về cấu trúc để làm sáng tỏ và phân biệt mọi thứ, chúng tôi sớm nhận thấy không thể cắt rời toán học thành các mảng riêng biệt. Hơn nữa, không khó để thấy sự phân chia toán học thành Đại số, Số học, Hình học và Giải tích đã lỗi thời. Chúng tôi cự tuyệt sự phân chia đó ngay từ đầu trước sự giận dữ của nhiều người. Ví dụ, ta biết rằng hình học Euclid là một trường hợp riêng của lý thuyết toán tử Hermit trong không gian Hilbert. Tương tự như thế, lý thyết về đường cong đại số và lý thuyết số gần như xuất phát từ cùng một loại cấu trúc. Cách phân chia toán học truyền thống như trên cũng giống như cách phân loại của các nhà sinh vật học cổ đại khi họ xếp cá heo, cá mập và cá ngừ vào cùng một lớp là cá, vì tất cả các động vật đó đều sống dưới biển và có hình dạng giống nhau. Phải mất một thời gian trước khi những nhà sinh vật học đó nhận ra cấu trúc cơ thể của các động vật này không hề giống nhau, và phải phân loại chúng theo một cách hoàn toàn khác. Đại số, Số học, Hình học, và những cách phân chia tương tự không khác gì câu chuyện kể trên. Nếu chỉ nhìn qua loa cấu trúc của từng phân ngành sẽ thấy cách phân chia toán học như thế là đúng. Nhưng không cần mất nhiều thời gian để thấy rằng dù có cố gắng tách biệt các cấu trúc đến đâu, chúng vẫn luôn có cách trộn lẫn rất nhanh chóng và vô cùng thú vị. Thậm chí có thể nói rằng các ý tưởng lớn của toán học đã nảy sinh khi có sự gặp gỡ của một số cấu trúc vô cùng khác biệt. Và đây là tưởng tượng của tôi về toán học ở thời điểm hiện tại. Toán học, đó là một cuộn len, một cuộn dây rối trong đó các phần của toán học tương tác với nhau theo những cách không thể tiên đoán được. Không thể tiên đoán, vì hầu như không có năm nào trôi qua mà không có một tương tác mới nảy sinh. Và tuy vậy, trong cuộn len này, vẫn có một số sợi len trồi ra từ khắp các hướng, không kết nối với bất cứ thứ gì khác. Thế thì, phương pháp của Bourbaki rất giản dị, chúng ta sẽ cắt các sợi len thừa ấy đi. Điều đó nghĩa là gì? Chúng ta hãy lập danh sách những gì được giữ lại và những gì bị loại ra. Những thứ cần thiết phải giữ lại: Những cấu trúc căn bản nhất (tất nhiên tôi không muốn chỉ còn lại tập hợp[5]), đại số tuyến tính và đa tuyến tính, một chút tôpô đại cương (càng ít càng tốt), một chút không gian vectơ tôpô (càng ít càng tốt), đại số đồng điều, đại số giao hoán, đại số không giao hoán, nhóm Lie, tích phân, đa tạp khả vi, hình học Riemann, tôpô vi phân, giải tích điều hòa và mở rộng của nó, phương trình vi phân thường và đạo hàm riêng, biểu diễn nhóm nói chung, và trong nghĩa rộng nhất, hình học giải tích. (Tất nhiên tôi hiểu hình học giải tích theo nghĩa của Serre, cách hiểu duy nhất có lý. Hoàn toàn không thể chấp nhận được cách hiểu hình học giải tích như đại số tuyến tính sử dụng tọa độ, như cách làm ở những sách sơ cấp. Hình học giải tích theo cách này chưa bao giờ tồn tại với tư cách bộ phận của toán học. Chỉ những người kém cỏi về đại số tuyến tính, quẫn bách đến mức phải dùng tọa độ mới gọi phương pháp của họ là hình học giải tích. Khỏi cần bận tâm đến họ! Ai cũng biết rằng hình học

(5)Có lẽ ý Dieudonné là ít ra cần giữ lại, ví dụ, tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$, tập các số thực $\mathbb{R}$.

(6)Ví dụ như một tập con của $\mathbb{C}^n$ gồm các nghiệm của một tập hữu hạn các hàm chỉnh hình, một tập như thế còn được gọi là một đa tạp giải tích phức.

giải tích là lý thuyết về các không gian giải tích[(6)], một trong những lĩnh vực sâu sắc và phức tạp nhất của toán học.) Cũng cần kể đến hình học đại số, người em song sinh của hình học giải tích, và cuối cùng lý thuyết số đại số.

Đây là một danh sách gần như bắt buộc. Hãy xem những gì bị loại ra. Lý thuyết về số thứ tự và lực lượng (ordinals and cardinals), đại số phổ dụng, lưới (lattices), đại số không kết hợp, phần lớn tôpô đại cương, phần lớn không gian vectơ tôpô, phần lớn lý thuyết nhóm (về nhóm hữu hạn), phần lớn lý thuyết số (trong số đó có lý thuyết số giải tích). Quá trình lấy tổng và tất cả những gì có thể gọi là giải tích căn bản – chuỗi lượng giác, nội suy, chuỗi đa thức, v.v.; có rất nhiều thứ tương tự ở đây; và cuối cùng, tất cả toán ứng dụng.

Tôi muốn giải thích rõ hơn đôi chút. Tôi hoàn toàn không có ý nói rằng khi sàng lọc như trên Bourbaki có bất cứ đánh giá nào về sự tinh tế và sức mạnh của các lý thuyết, dù được lựa chọn hay loại ra. Ví dụ, tôi tin rằng lý thuyết nhóm hữu hạn như ta biết ngày nay là một trong những lý thuyết sâu sắc và dồi dào nhất các kết quả phi thường, trong khi những lý thuyết như đại số không giao hoán chỉ khó vừa phải. Và nếu phải đánh giá, có lẽ tôi cần nói rằng hầu hết các kết quả toán học tinh tế – được ngưỡng mộ bởi sự khéo léo và đột phá của tác giả – đều bị loại trừ khỏi tác phẩm của Bourbaki.

Như đã thấy, chúng tôi không xem mình là đấng tối cao đứng ra phân loại, phía bên này được chọn là toán học hay, phía bên kia không được chọn là toán học dở. Do chỗ muốn trình bày toán học hiện đại sao cho trung tâm phát xuất của toàn bộ thế giới toán học hiện ra rõ ràng, chúng tôi buộc phải loại ra nhiều chủ điểm. Về lý thuyết nhóm, dù đã có rất nhiều định lý đột phá và xuất sắc được khám phá, khó có thể nói rằng chúng cùng xuất phát từ một phương pháp tổng quát. Lý thuyết nhóm cần đến nhiều phương pháp khác nhau, và giống như một người thợ thủ công, nhà nghiên cứu làm việc trong lý thuyết nhóm cần dùng một loạt ngón nghề đặc biệt. Bourbaki không thể trình bày một lý thuyết như vậy. Bourbaki chỉ có thể và chỉ muốn trình bày những lý thuyết có thứ tự lớp lang, trong đó các phương pháp tuần tự theo sau các tiền đề, và không có nhiều chỗ cho những ngón nghề đặc biệt.

Nói cách khác, Bourbaki chủ yếu trình bày những lý thuyết đã trở thành cổ điển, ít nhất là ở nền tảng. Chúng tôi không tập trung vào chi tiết mà vào các nguyên lý nền tảng. Một lý thuyết chỉ được đề cập khi có một phác thảo tuần tự, lôgic về nó. Không gì khác, lý thuyết nhóm chính là một chuỗi các bài trí phức tạp, càng ngày càng khó nắm bắt hơn và do đó trái ngược với tinh thần Bourbaki (lý thuyết số giải tích thì càng như thế). Tôi nhấn mạnh là Bourbaki tuyệt đối không đánh giá thấp giá trị của các lý thuyết đó. Ngược lại, giá trị của một nhà toán học chính là nằm ở những phát minh của anh/chị ta, kể cả những ngón nghề đặc biệt. Ai cũng biết câu tục ngữ *Trước lạ sau quen*. Vâng, vinh quang thuộc về người đầu tiên phát minh ra một kỹ thuật đặc biệt, chứ không phải người hệ thống hóa kỹ thuật đó thành một phương pháp sau khi sử dụng nó nhiều lần. Nhưng chính bước kém vinh quang đó là mục đích của Bourbaki: chúng tôi chọn lọc từ lượng lớn các quy trình toán học những yếu tố nào hữu ích có thể sắp đặt thành một lý thuyết nhất quán, có thứ tự lớp lang, dễ trình bày và tiện dụng.

Phương pháp làm việc của Bourbaki rất căng thẳng và tốn kém thời gian, nhưng hầu như không thể tránh khỏi. Hai, ba lần trong năm, các thành viên của Bourbaki nhóm họp. Khi đã đồng thuận về việc viết về đề tài gì, cần cả một cuốn sách hay chỉ một vài chương về đề tài đó (với một cuốn sách, chúng tôi dự thảo trước một số chương), việc soạn bản thảo đầu tiên được giao cho một thành viên trên tinh thần tự nguyện. Xuất phát từ một kế hoạch khá sơ lược, thành viên đó sẽ soạn một bản thảo. Anh ta được thoải mái chọn viết và không viết về cái gì, không biết trước những may rủi gì đang chờ đợi mình, như bạn sẽ thấy. Sau một hay hai năm, bản thảo hoàn thành được mang ra xem xét ở một phiên họp của Bourbaki, được đọc không bỏ sót một trang cho mọi người cùng nghe. Không có chứng minh nào không bị soi xét đến từng điểm nhỏ và chỉ trích không thương tiếc. Phải góp mặt ở một phiên họp của Bourbaki ta mới biết những chỉ trích đó dữ dội đến mức nào, vượt xa tất cả những công kích đến từ ngoài nhóm. Không tiện nhắc lại ở đây ngôn từ cụ thể đã được sử dụng. Tuổi tác không thành vấn đề. Tuổi tác của các thành viên Bourbaki có thể khác xa nhau – chúng ta sẽ đề cập sau về giới hạn tuổi tác cho phép – nhưng khi có bất đồng chính kiến giữa hai người chênh nhau hai mươi tuổi, và người lớn tuổi hơn có vẻ như không hiểu đầu đuôi câu chuyện, người còn lại cũng được phép thoải mái chỉ trích bậc đàn anh. Như ở những nơi khác, mọi thành viên Bourbaki phải biết vui vẻ chấp nhận điểm yếu của mình. Trong mọi trường hợp, không cần nhiều thời gian để nhận được hồi âm, không ai có thể giả bộ như mình độc quyền chân lý trước các thành viên Bourbaki, và dù dành thời lượng không nhỏ cho những cãi vã kịch liệt, cuối cùng mọi việc đều đi đến hồi kết.

Nhiều người không phải thành viên, khi được mời làm khán giả trong một phiên họp của Bourbaki, đã bước ra với kết luận: đó là cuộc họp của những kẻ khùng. Họ không thể tưởng tượng được làm cách nào người ta có thể tạo ra tri thức sau khi hò hét vào mặt nhau, nhiều lúc với dàn đồng thanh của ba bốn người. Điều kỳ diệu là rồi mọi thứ cũng lắng xuống. Sau khi bản thảo đầu tiên bị vùi dập không thương tiếc, chúng tôi chọn ra thành viên thứ hai để soạn thảo và bắt đầu lại quá trình. Con người tội nghiệp đó biết những gì sẽ xảy ra với mình vì dù anh ta bấu víu vào những chỉ dẫn mới, ý kiến của cả nhóm lại thay đổi trong lần gặp gỡ tiếp theo và năm sau, đến lượt bản thảo của chính anh ta bị vùi dập. Một thành viên thứ ba sẽ đứng ra soạn thảo, và câu chuyện tiếp tục như vậy. Có thể tưởng tượng rằng quá trình này sẽ kéo dài vô tận, nhưng vì đời người hữu hạn, chúng tôi phải dừng lại. Nếu một chương sách được đem ra bàn luận đến lần thứ sáu, bảy, tám, hay lần thứ mười, ai nấy đều ngấy đến tận cổ và tất cả như một chấp thuận mang nó đến nhà in. Điều đó không có nghĩa bản thảo đã hoàn thiện, không ít lần sau bao nhiêu thận trọng ban đầu chúng tôi thấy mình nhầm lẫn không chỗ này thì chỗ khác. Vì thế ấn bản sau đó lại có thêm những điều chỉnh. Có điều chắc chắn là khó khăn lớn nhất nằm ở ấn bản đầu tiên.

Từ lúc chúng tôi dự định viết một chương sách cho đến lúc nó được bày bán ở hiệu sách, thông thường cần từ 8 đến 12 năm. Những sách sắp ra là những cuốn đã được khởi thảo từ khoảng 1955.[7]

Tôi đã nói rằng có giới hạn tuổi tác đối với thành viên Bourbaki. Quy định này được đặt ra từ sớm vì lý do kể trên – một nhà toán học ở tuổi ngũ tuần có thể vẫn

[7]Bài giảng này được Dieudonné đọc năm 1968.

rất sắc bén và dồi dào sức sáng tạo nhưng hiếm khi có thể thích nghi với những ý tưởng mới của những nhà toán học trẻ hơn 25, 30 tuổi. Bourbaki muốn duy trì trường tồn hoạt động của mình. Không có chuyện chúng tôi đóng khung toán học vào một giai đoạn nhất định nào đó. Nếu tác phẩm nào Bourbaki viết ra không cập nhật với xu thế toán học đương thời, tác phẩm đó không có giá trị và phải được viết lại từ đầu. Điều này đã có tiền lệ trong quá khứ. Nếu Bourbaki có thành viên cao tuổi, với niềm tin rằng không cần phải thay đổi những thứ tự có sẵn từ thời trai trẻ của mình, những người đó sẽ hạn chế xu hướng cập nhật và cản trở sự cách tân. Điều này sẽ là một thảm họa. Để tránh những xung đột đe dọa sự tồn vong của Bourbaki, ngay khi vấn đề trên được đặt ra, Bourbaki đã thống nhất yêu cầu mọi thành viên nghỉ hưu ở tuổi 50.

Quy định đó vẫn được giữ nguyên; tất cả các thành viên hiện tại của Bourbaki đều dưới tuổi ngũ tuần. Những thành viên sáng lập đã nghỉ hưu từ khoảng mười năm trước, và không ít người từng được coi là thành viên trẻ cũng đã hoặc sắp đến tuổi nghỉ hưu. Bourbaki tuyển cộng tác viên mới như thế nào? Không có một quy định nào về việc tuyển cộng tác viên, vì Bourbaki chỉ có một quy định chính thức duy nhất đã kể ở trên: mọi thành viên nghỉ hưu ở tuổi 50. Ngoài quy định đó, có thể nói rằng quy định duy nhất của Bourbaki là không có một quy định nào cả. Không có quy định, vì không bao giờ Bourbaki lấy biểu quyết số đông, chúng tôi phải nhất trí tuyệt đối trong mọi trường hợp. Mọi thành viên có quyền phủ quyết bất cứ chương sách nào anh ta xem là yếu kém. Sự phủ quyết của một cá nhân cũng đủ để chương sách không được in, và cả nhóm phải quay lại xem xét từ đầu chương đó. Đó là lý do quá trình làm việc của Bourbaki luôn cần nhiều thời gian: không dễ dàng gì có đồng thuận chung để đi đến bản thảo cuối cùng.

Chúng tôi quan tâm đến việc thay thế những thành viên đến tuổi về hưu. Chúng tôi không lập hội đồng tuyển dụng thành viên mới (vì đó sẽ là một quy định, trong khi không có quy định nào cả). Không có ghế trống, như trong các viện hàn lâm. Vì phần lớn các thành viên của Bourbaki là các giáo sư – nhiều người làm ở Paris – họ có cơ hội gặp gỡ trực tiếp những nhà toán học trẻ, những thanh niên mới bắt đầu sự nghiệp nghiên cứu. Chúng tôi sớm chú ý đến những thanh niên có tài với tương lai đầy hứa hẹn. Khi biết một người như thế, chúng tôi mời anh ấy đến dự một phiên họp của Bourbaki trong tư cách đối tượng thí nghiệm. Đó là phương pháp truyền thống của chúng tôi. Ai cũng biết thế nào là đối tượng thí nghiệm: người ta thử nghiệm các loại virút trên chúng. Việc diễn ra ở Bourbaki cũng không khác; người trẻ tuổi xấu số kia sẽ là đối tượng nhắm đến trong cuộc khẩu chiến mang tên phiên thảo luận của Bourbaki. Không những phải hiểu rõ vấn đề được thảo luận, anh ta còn phải tham gia tích cực. Nếu giữ im lặng, anh ta sẽ không được mời nữa.

Anh ta cũng phải chứng tỏ một loại phẩm chất đặc biệt. Không ít những tài năng toán học lớn đã không được tham gia Bourbaki vì thiếu phẩm chất đó. Trong một phiên họp, những chương sách được thảo luận có thể xuất hiện theo thứ tự không định trước, và không ai biết trước liệu nhóm có thảo luận về tôpô vi phân trong phiên họp này, hay đại số giao hoán trong phiên kế tiếp. Chúng tôi xáo trộn mọi thứ – để dùng lại một ví dụ minh họa, cuộn len có thể là hình ảnh tượng trưng cho Bourbaki. Vì thế một thành viên Bourbaki cần phải quan tâm đến tất cả những thứ gì anh ta nghe được. Nếu anh ta sùng bái đại số đến mức nói rằng "Tôi chỉ quan tâm đến đại số, chấm hết", không sao cả, nhưng anh ta sẽ không bao giờ trở thành thành viên của Bourbaki. Thành viên của Bourbaki phải quan tâm đến mọi thứ cùng một lúc. Không thể sáng tạo trong tất cả các ngành của toán học, điều đó không thành vấn đề. Tất nhiên không thể yêu cầu mọi người đều là một nhà toán học phổ quát; đó là đặc quyền dành riêng cho một thiểu số những thiên tài. Nhưng ít nhất, thành viên của Bourbaki cần phải quan tâm đến tất cả mọi thứ và khi cần, có thể viết một chương sách về một đề tài không thuộc chuyên môn của mình. Đó là điều gần như tất cả mọi thành viên đã làm, và tôi nghĩ hầu hết mọi người đều vô cùng hài lòng với trách nhiệm được giao.

Từ kinh nghiệm cá nhân, nếu không được yêu cầu viết và thực sự viết một cách đến nơi đến chốn về những bài toán tôi hoàn toàn không có chút hiểu biết nào, chắc chắn tôi đã không thể đạt được một phần tư, thậm chí một phần mười những gì đã làm. Là một người làm toán, khi phải viết về những vấn đề mình không hiểu, ta sẽ đặt nhiều câu hỏi cho bản thân. Đó là tính cách đặc trưng của một nhà toán học. Ta sẽ cố gắng trả lời những câu hỏi đó, từ đó viết ra những công trình riêng ít nhiều có giá trị, độc lập với Bourbaki, nhưng được cưu mang bởi hoạt động trong Bourbaki. Vì vậy Bourbaki không hẳn là một hệ thống vô ích. Nhưng cũng có những người xuất chúng không thể thích nghi với những nghĩa vụ theo kiểu của Bourbaki, họ là những người hàng đầu trong một ngành nhưng không quan tâm đến những ngành khác. Có những nhà đại số gạo cội không bao giờ muốn sờ đến giải tích, có những nhà giải tích nhìn trường quaternion như một quái vật. Họ có thể là những nhà toán học hàng đầu, xuất chúng hơn phần lớn các thành viên Bourbaki – có nhiều tên tuổi lớn trong số đó, và Bourbaki vui vẻ chấp nhận điều này – nhưng những người như vậy không bao giờ có thể trở thành thành viên của Bourbaki.

Trở lại câu chuyện đối tượng thí nghiệm. Khi một nhà toán học được mời đến phiên họp của Bourbaki, chúng tôi tìm kiếm khả năng thích nghi với các ngành khác nhau ở anh ấy[8]. Thông thường chúng tôi không tìm thấy khả năng đó, chúng tôi chia tay và chúc anh ấy may mắn trên con đường về sau. Nhưng đôi lúc chúng tôi tìm thấy từ vị khách mời trẻ tuổi của mình phẩm chất đó: lòng ham chuộng những hiểu biết phổ quát về toàn bộ toán học, khả năng thích nghi với những lý thuyết khác xa nhau. Sau một thời gian ngắn, nếu có những đóng góp tích cực cho Bourbaki, nhà toán học đó sẽ trở thành thành viên mà không cần đến biểu quyết, bình duyệt, hay tiệc tùng. Xin được nhắc lại, Bourbaki có một quy định duy nhất, là không có bất cứ quy định nào cả, ngoại trừ việc nghỉ hưu ở tuổi 50.

Để kết thúc, tôi xin trả lời ý kiến phê bình Bourbaki của một số người. Bourbaki bị buộc tội làm cạn kiệt nghiên cứu khoa học. Phải thừa nhận là tôi hoàn toàn không hiểu sự phê phán này, vì Bourbaki chưa bao giờ coi tác phẩm của mình là để thúc đẩy nghiên cứu khoa học. Tôi nhắc lại rằng Bourbaki chỉ cho phép bản thân viết về những lý thuyết đã thành cổ điển, những lý thuyết chết, những đề tài được giải quyết triệt để và chỉ cần sắp xếp lại

[8]Theo một số nguồn tin, Bourbaki dường như vẫn chưa có một thành viên nữ nào cho đến tận ngày nay.

(tất nhiên vẫn phải tính đến những ngoại lệ). Đúng ra không thể gọi bất cứ thứ gì trong toán là "đã chết", vì một ngày sau khi ta tuyên bố như thế, một người nào đó có thể nghiền ngẫm lý thuyết này và tìm ra một ý tưởng mới làm nó hồi sinh. Để chặt chẽ hơn, Bourbaki đề cập đến những lý thuyết đã thành cổ điển ở thời điểm soạn thảo cuốn sách – những lý thuyết tuy có thể quan trọng và then chốt trong quá khứ, và có ứng dụng cho nhiều nghiên cứu khác nhau, nhưng suốt 10, 20, hay 50 qua không chứng kiến thêm một phát minh đáng kể nào. Những lý thuyết này không nhất thiết phải thúc đẩy nghiên cứu khoa học ở thời điểm hiện tại. Bourbaki quan tâm đến việc cung cấp tài liệu tham khảo và hỗ trợ những ai muốn hiểu những nguyên lý căn bản của một lý thuyết. Ví dụ Bourbaki muốn chỉ ra rằng khi làm việc với không gian vectơ tôpô, có ba, bốn định lý cần biết: Hahn-Banach, Banach-Steinhaus, đồ thị đóng; Bourbaki hỗ trợ việc tìm ra các kết quả đó. Nhưng không ai nghĩ đến việc phải cải thiện các định lý đó; người ta chấp nhận chúng như chúng vốn là, chúng vô cùng hữu ích (đây là điểm căn bản) vì thế chúng xuất hiện trong Bourbaki. Đây là điểm quan trọng với Bourbaki. Về điểm thúc đẩy nghiên cứu khoa học, nếu có những vấn đề mở trong một lý thuyết cũ, tất nhiên Bourbaki nhắc đến chúng nhưng đó không phải mục đích chính của chúng tôi.

Tôi nhắc lại, mục đích chính là cung cấp công cụ làm việc, không phải là phát biểu hùng hồn về những vấn đề mở của toán học đương đại, vì những vấn đề mở này nói chung vượt ra khỏi phạm vi hoạt động của Bourbaki. Chúng thuộc về toán học đang vận động nhưng Bourbaki không viết về toán học đang vận động. Chúng tôi không thể viết về một thứ thay đổi từng năm. Dùng phương pháp của Bourbaki, làm việc tám đến mười năm cho một cuốn sách, nếu chúng tôi viết về toán học đang vận động, thì không khó để tưởng tượng tác động của cuốn sách đó sau năm thứ mười hai. Cuốn sách sẽ hoàn toàn vô dụng. Chúng tôi sẽ phải liên tục viết lại cuốn sách, và công trình của chúng tôi sẽ không bao giờ hoàn thành được, giống như cuốn *Bách khoa toàn thư toán học* cũ.

(Lê Hồng Đăng lược dịch, bỏ qua một số đoạn ít liên quan.)

# Hàm zeta và tích phân trên các adèle (Phần hai và hết)[(1)]

**Ngô Bảo Châu**[(2)]

## 6. Các idèle

6.1. **Các idèle của $\mathbb{Q}$.** Một idèle là một dãy $(t_p; t_\infty)$ bao gồm một số $p$-adic khác không $t_p \in \mathbb{Q}_p^\times$ với mỗi số nguyên tố $p$, và một số thực $t_\infty \in \mathbb{R}^\times$, sao cho với hầu tất cả $p$, ta có $t_p \in \mathbb{Z}_p^\times$, nghĩa là cả $t_p$ và $t_p^{-1}$ đều nằm trong $\mathbb{Z}_p$. Nhóm $\mathbb{A}^\times$ các idèle với tôpô tích trực tiếp hạn chế (restricted direct product topology) là một nhóm tôpô com-pắc địa phương. Nhóm này tác động lên nhóm các adèle $\mathbb{A}$, và biến một độ

(1) Nguyên bản bằng tiếng Anh.

(2) Đại học Chicago & Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán. Email: ngo@uchicago.edu.

đo bất biến trên $\mathbb{A}$ thành một độ đo bất biến khác. Vì các độ đo bất biến trên $\mathbb{A}$ chỉ sai khác nhau một hằng số nhân, với mỗi $t \in \mathbb{A}^\times$, tồn tại duy nhất một số thực dương $|t| \in \mathbb{R}_+$ sao cho

$$d(tx) = |t|dx. \tag{17}$$

Đẳng thức này định nghĩa đồng cấu chuẩn $\mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}_+$. Cách xây dựng trừu tượng này cũng áp dụng được cho $\mathbb{R}$ và $\mathbb{Q}_p$. Với tập số thực, chuẩn duy nhất $|t|_\infty$ thỏa mãn (17) là trị tuyệt đối thông thường. Với trường số $p$-adic, chuẩn $p$-adic được cho bởi $|t|_p = p^{-\mathrm{val}_p(t)}$, ở đây $\mathrm{val}_p(t)$ là số nguyên duy nhất sao cho $p^{-\mathrm{val}_p(t)} t \in \mathbb{Z}_p^\times$. Với mọi idèle $t = (t_p; t_\infty)$, ta có

$$|t| = |t_\infty|_\infty \prod_p |t_p|_p.$$

Nhóm các số hữu tỉ khả nghịch $\mathbb{Q}^\times$ nhúng đường chéo vào $\mathbb{A}^\times$ như một nhóm con rời rạc. Một chú ý quan trọng là với mọi $t \in \mathbb{Q}^\times$ – xem như một idèle – ta có

$$|t| = |t|_\infty \prod_p |t|_p = 1. \tag{18}$$

Công thức tích này có thể được kiểm tra dựa vào miêu tả tường minh của các chuẩn thực và $p$-adic định nghĩa như trên. Trong [4], Tate đưa ra một chứng minh khái quát hơn bằng cách sử dụng tính com-pắc của thương $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$.

Ta xem $\hat{\mathbb{Z}}^\times = \prod_p \mathbb{Z}_p^\times$ như một nhóm con com-pắc của $\mathbb{A}^\times$ bao gồm các phần tử dạng $(x_p; x_\infty)$ với $x_p \in \mathbb{Z}_p^\times$ và $x_\infty = 1$. Cũng giống như $\mathbb{Q}^\times$, nhóm $\hat{\mathbb{Z}}^\times$ nằm trong hạch $\mathbb{A}^1$ của ánh xạ chuẩn $\mathbb{A}^\times \to \mathbb{R}_+$. Phép nhân định nghĩa một đẳng cấu

$$\mathbb{Q}^\times \times \hat{\mathbb{Z}}^\times \to \mathbb{A}^1.$$

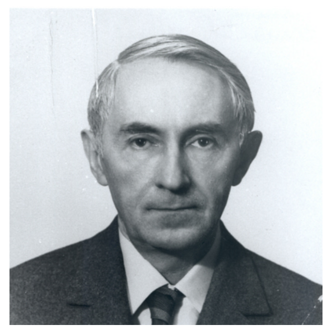
Ta xem $\mathbb{R}_+$ như nhóm con của $\mathbb{A}^\times$ gồm các phần tử có dạng $(x_p; x_\infty)$ với $x_p = 1$ và $x_\infty \in \mathbb{R}_+$. Phép nhân định nghĩa một đẳng cấu

$$\mathbb{A}^1 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{A}^\times.$$

Tóm lại, mỗi idèle $x \in \mathbb{A}^\times$ có một biểu diễn duy nhất thành tích

$$x = \alpha u t,$$

với $\alpha \in \mathbb{Q}^\times, u \in \hat{\mathbb{Z}}^\times, t \in \mathbb{R}_+$. Cấu trúc của nhóm các idèle $\mathbb{A}^\times$ khá đơn giản: Đó là tích trực tiếp của nhóm rời rạc $\mathbb{Q}^\times$, nhóm cận hữu hạn $\hat{\mathbb{Z}}^\times$, và $\mathbb{R}_+$.



Claude Chevalley (1909-1984), tác giả của các khái niệm adèle và idèle. Nguồn: Académie des Sciences - Institut de France .

6.2. **Các idèle của trường số.** Một idèle của một trường số $K$ là một dãy $(x_\nu)$ ($\nu$ chạy trên tập các trị hữu hạn hay vô cực của $K$), bao gồm các phần tử $x_\nu \in K_\nu^\times$ mà $x_\nu \in \mathcal{O}_\nu^\times$ với hầu tất cả các trị hữu hạn. Nhóm các idèle của $K$ được ký hiệu là $\mathbb{A}_K^\times$. Với mỗi trị $\nu$, hữu hạn hay vô cực, phương trình (17) định nghĩa một chuẩn $|\cdot|_\nu : K_\nu^\times \to \mathbb{R}_+$. Nếu $\nu$ là trị thực, chuẩn này là giá trị tuyệt đối thông thường. Nếu $\nu$ là trị phức, chuẩn này là bình phương của chuẩn phức thông thường. Nếu $\nu$ là trị hữu hạn, $|x|_\nu = q^{-\mathrm{val}_\nu(x)}$, ở đây $q$ là lực lượng của trường thặng dư. Phương trình (17) cũng định nghĩa một chuẩn cho nhóm các idèle $|\cdot| : \mathbb{A}_K^\times \to \mathbb{R}_+$, không gì khác hơn là tích của các chuẩn địa phương. Giống như trường hợp trường số hữu tỉ, $K^\times$ nhúng vào $\mathbb{A}_K^\times$ như một nhóm con rời rạc. Và với mọi $t \in K^\times$, ta có công thức tích

$$|t| = \prod_\nu |t|_\nu = 1, \tag{19}$$

trong đó $\nu$ chạy qua tập các trị hữu hạn hay vô cực của $K$.

Kí hiệu $\mathbb{A}_K^1$ là hạch của chuẩn $|\cdot|: \mathbb{A}_K^\times \to \mathbb{R}_+$, như vậy có một dãy khớp

$$1 \to \mathbb{A}_K^1 \to \mathbb{A}_K^\times \to \mathbb{R}_+ \to 1.$$

Dãy khớp này chẻ ra nếu $K$ có một trị thực $\nu$. Trong trường hợp này, ta có thể xem $\mathbb{R}_+$ như nhóm con của $\mathbb{A}_K^\times$ bao gồm các phần tử $(x_\omega)$ với $x_\nu \in \mathbb{R}_+$ và $x_\omega = 1$ với $\omega \neq \nu$. Nếu $K$ là thuần ảo, nghĩa là các trị vô cực của $K$ là các trị phức, dãy khớp trên vẫn có thể chẻ ra(3).

Nhóm các idèle chuẩn đơn vị $\mathbb{A}_K^1$ chứa $K^\times$ như nhóm con rời rạc đối com-pắc, mặc dầu khác với trường hợp các số hữu tỉ, $\mathbb{A}_K^1/K^\times$ có thể không cận hữu hạn. Thật vậy, tính com-pắc của $\mathbb{A}_K^1/K^\times$ là một định lý khá sâu sắc; nó bao hàm hai mệnh đề quan trọng trong lý thuyết số đại số là tính hữu hạn của số lớp và định lý đơn vị Dirichlet. Bạn đọc nào sẵn sàng chấp nhận tính com-pắc của $\mathbb{A}_K^1/K^\times$ có thể bỏ qua thảo luận tương đối kỹ thuật sau đây.

Xem $\hat{\mathbb{Z}}_K^\times = \prod_\nu \mathcal{O}_\nu^\times$ ($\nu$ chạy qua tập các trị hữu hạn của $K$), như một nhóm con com-pắc của $\mathbb{A}_K^\times$ bao gồm các phần tử $(t_\nu)$ với $t_\nu \in \mathcal{O}_\nu^\times$ nếu $\nu$ là một trị hữu hạn và $t_\nu = 1$ nếu $\nu$ là một trị vô cực. Có một dãy khớp

$$0 \to \hat{\mathbb{Z}}_K^\times \times K_\mathbb{R}^\times \to \mathbb{A}_K^\times \to \bigoplus_{\nu \text{ hữu hạn}} \frac{K_\nu^\times}{\mathcal{O}_\nu^\times} \to 0$$

ở đây $\bigoplus_{\nu \text{ hữu hạn}} K_\nu^\times/\mathcal{O}_\nu^\times$ là tập hợp các dãy $(n_\nu)$ ($\nu$ chạy trên các trị hữu hạn của $K$), mà $n_\nu \in K_\nu^\times/\mathcal{O}_\nu^\times$ bằng không với hầu tất cả $\nu$. Nhận xét rằng ánh xạ định giá đồng nhất $K_\nu^\times/\mathcal{O}_\nu^\times$ với $\mathbb{Z}$, vì thế $n_\nu$ thật ra là số nguyên.

Hạn chế vào các idèle với chuẩn một, ta vẫn có một dãy khớp

$$0 \to \hat{\mathbb{Z}}_K^\times \times K_\mathbb{R}^1 \to \mathbb{A}_K^1 \to \bigoplus_{\nu \text{ hữu hạn}} \frac{K_\nu^\times}{\mathcal{O}_\nu^\times} \to 0,$$

ở đây $K_\mathbb{R}^1 = K_\mathbb{R} \cup \mathbb{A}_K^1$ là nhóm con của $K_\mathbb{R}^\times$ chứa các phần tử $(x_\nu)$, với $\nu$ chạy trên các trị vô cực, sao cho $\prod_{\nu \text{ vô cực}} |x_\nu|_\nu = 1$. Có một đồng cấu của hai dãy khớp

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & K^\times \arrow[r] \arrow[d] & K^\times \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{\mathbb{Z}}_K^\times \times K_\mathbb{R}^1 \arrow[r] & \mathbb{A}_K^1 \arrow[r] & \bigoplus_{\nu \text{ hữu hạn}} K_\nu^\times/\mathcal{O}_\nu^\times \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ở đây mũi tên dọc ở giữa là đơn ánh, mũi tên dọc bên phải có hạch $K^\times \cap \hat{\mathbb{Z}}_K^\times = \mathbb{Z}_K^\times$ là nhóm các đơn vị của $\mathbb{Z}_K$. Bổ đề con rắn dẫn đến một dãy khớp

$$0 \to \frac{\hat{\mathbb{Z}}_K^\times \times K_\mathbb{R}^1}{\mathbb{Z}_K^\times} \to \frac{\mathbb{A}_K^1}{K^\times} \to \frac{\bigoplus_{\nu \text{ hữu hạn}} K_\nu^\times/\mathcal{O}_\nu^\times}{K^\times} \to 0. \tag{20}$$

(3)Trong trường hợp đó, ta chọn căn bậc hai làm ánh xạ chẻ.

Theo định lý về tính hữu hạn của số lớp của $K$, nhóm

$$\left(\bigoplus_{\nu \text{ hữu hạn}} K_\nu^\times / \mathcal{O}_\nu^\times\right) / K^\times \tag{21}$$

là hữu hạn. Định lý đơn vị Dirichlet phát biểu rằng nhóm đơn vị $\mathbb{Z}_K^\times$ là một nhóm abel hữu hạn sinh với hạng đúng bằng số các trị vô cực của $K$ trừ một. Phần chính trong chứng minh của Dirichlet nằm ở việc chứng minh $K_\mathbb{R}^1/\mathbb{Z}_K^\times$ là một nhóm compact. Bởi vì phần còn lại $\hat{\mathbb{Z}}_K^\times$ là một nhóm cận hữu hạn và do đó com-pắc, ta kết luận rằng $\mathbb{A}_K^1/K^\times$ là một nhóm com-pắc. Đây là điều ta muốn chứng minh.

Theo truyền thống, (21) được gọi là nhóm lớp ideal của $K$ và $\mathbb{A}_K^\times/K^\times$ được gọi là nhóm lớp idèle. Không nên lẫn lộn hai nhóm này với nhau: nhóm lớp ideal của $K$ là hữu hạn, trong khi nhóm lớp idèle của $K$ là mở rộng của $\mathbb{R}_+$ bởi một nhóm com-pắc khổng lồ tiếp nhận nhóm lớp ideal của $K$ như một thương.

## 7. Biến đổi Mellin $p$-adic

Lấy $F$ là một trường địa phương phi Archimedes đặc số không với vành số nguyên $\mathcal{O}_F$. Nói cách khác, $F$ là đầy đủ hóa của một trường số $K$ đối với tôpô gắn với một ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$ của $\mathbb{Z}_K$[4]. Ánh xạ định giá đối với $\mathfrak{p}$ định nghĩa một đồng cấu $\mathrm{val} : F^\times \to \mathbb{Z}$ với hạch $\mathcal{O}_F^\times$ là nhóm con com-pắc cực đại của $F^\times$. Với độ đo bất biến $dx$ của $F$, chuẩn $|\cdot| : F^\times \to \mathbb{R}_+$ thỏa mãn điều kiện $d(tx) = |t|dx$ được cho bởi công thức $|t| = q^{-\mathrm{val}(t)}$ với $q$ là lực lượng của trường thặng dư.

Kí hiệu $\mathsf{X}_F$ là nhóm các đặc trưng của $F^\times$. Hai đặc trưng $\chi, \chi'$ được gọi là tương đương chính xác đến một lũy thừa của chuẩn nếu tồn tại $s \in \mathbb{C}$ sao cho $\chi'(t) = \chi(t)|t|^s$. Hai đặc trưng là tương đương theo nghĩa này khi và chỉ khi đặc trưng hạn chế lên nhóm com-pắc $\mathcal{O}_F^\times$ của chúng là giống nhau. Vì thế, nhóm các lớp tương đương của $\mathsf{X}_F$ tương ứng 1-1 với nhóm các đặc trưng của $\mathcal{O}_F^\times$ và mỗi lớp tương đương là một bản sao của $\mathbb{C}^\times$. Do đó $\mathsf{X}_F$ được trang bị một cấu trúc phức tự nhiên. Thành phần trung hòa của $\mathsf{X}_F$ chứa các đặc trưng với hạn chế tầm thường vào $\mathcal{O}_F^\times$. Các đặc trưng như thế được gọi là *không rẽ nhánh*. Với một phần tử sinh $\pi$ của ideal cực đại của $\mathcal{O}_F$, một đặc trưng không rẽ nhánh $\chi$ được xác định hoàn toàn bởi $\chi(\pi)$, đại lượng này không phụ thuộc vào cách lựa chọn $\pi$. Do đó thành phần trung hòa của $\mathsf{X}_F$ đẳng cấu chính tắc với $\mathbb{C}^\times$.

Giá trị tuyệt đối của một đặc trưng $\chi : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ là $|\chi| : x \mapsto |\chi(x)|$, một đặc trưng với giá trị trong $\mathbb{R}_+$. Hạn chế vào nhóm con com-pắc $\mathcal{O}_F^\times$, $\chi$ phải là tầm thường vì $\mathbb{R}_+$ không có nhóm con com-pắc nào ngoài nhóm tầm thường. Từ đó suy ra $|\chi|$ phân tích qua đặc trưng chuẩn $x \mapsto |x|$, nghĩa là tồn tại một số thực duy nhất $\sigma \in \mathbb{R}$ sao cho $|\chi(x)| = |x|^\sigma$. Ta gọi $\sigma = \Re(\chi)$ là *phần thực* của $\chi$. Phần thực $\Re(\chi) = 0$ khi và chỉ khi $\chi$ là một đặc trưng unita.

Lấy $f$ là một hàm hằng địa phương với giá com-pắc trong $F^\times$. *Biến đổi Mellin của* $f$ được định nghĩa là hàm số

$$\widetilde{f}(\chi) = \int_{F^\times} f(t)\chi(t)dt, \tag{22}$$

ở đây ta chuẩn hóa độ đo Haar $dt$ trên $F^\times$ sao cho $\mathcal{O}_F^\times$ có thể tích $1$. Theo thuật ngữ lý thuyết biểu diễn, $\widetilde{f}(\chi)$ là vết của toán tử tích chập gắn với $f$ lên biểu diễn một chiều $\chi : F^\times \to \mathbb{C}^\times$. Biến đổi Mellin

[4]Ví dụ cơ bản là $K = \mathbb{Q}$, khi đó $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}$, và $\mathfrak{p} = (p)$ là iđêan của $\mathbb{Z}$ sinh bởi một số nguyên tố $p$. Khi đó $F = \mathbb{Q}_p$ là trường số $p$-adic và $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}_p$ là vành các số nguyên $p$-adic. (Ban biên tập)

là hàm giải tích đối với cấu trúc phức của $\mathsf{X}_F$.

Nếu $\pi$ là một phần tử sinh của ideal cực đại của $\mathcal{O}_F$ và

$$f = 1_{\pi^n \mathcal{O}_F^\times}$$

với một số nguyên $n$ nào đó, thì $\widetilde{f}$ triệt tiêu bên ngoài thành phần trung hòa. Trên thành phần trung hòa, $\widetilde{f}$ được cho bởi công thức

$$\widetilde{f}(\chi) = \chi(\pi^n).$$

Trường hợp tổng quát, nếu $f$ là một hàm hằng địa phương với giá com-pắc trong $F^\times$, nó phải bất biến bởi một nhóm con mở com-pắc $H$ của $\mathcal{O}_F^\times$(5). Biến đổi Mellin $\widetilde{f}$ triệt tiêu bên ngoài một số hữu hạn các thành phần của $\mathsf{X}_F$ tương ứng với các đặc trưng của $\mathcal{O}_F^\times$ phân tích được qua thương $\mathcal{O}_F^\times/H$.

Giống như trường hợp trường Archimedes, ta muốn mở rộng biến đổi Mellin tới một lớp các hàm có thể có giá không com-pắc trong $F^\times$. Lấy $f \in \mathcal{S}(F) = C_c^\infty(F)$ là một hàm hằng địa phương với giá com-pắc trong $F$. Ví dụ chính yếu là hàm $1_{\mathcal{O}_F}$. Thật vậy, với mọi $f \in \mathcal{S}(F)$ và $c$ phù hợp, hiệu $f - c1_{\mathcal{O}_F}$ triệt tiêu tại 0 và định nghĩa một hàm với giá com-pắc trong $F^\times$. Chỉ cần định nghĩa biến đổi Mellin của $g = 1_{\mathcal{O}_F}$ là đủ để mở rộng biến đổi Mellin tới $\mathcal{S}(F)$. Tích phân Mellin có thể thác triển thành một chuỗi vô hạn

$$\int_{F^\times} g(t)\chi(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\pi^n \mathcal{O}_F^\times} \chi(t)dt.$$

Nếu $\chi$ là rẽ nhánh, mỗi số hạng của chuỗi này bằng không, vì thế chuỗi này cũng bằng không. Nếu $\chi$ là không rẽ nhánh, chuỗi trên là một cấp số nhân

$$\int_{F^\times} g(t)\chi(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \chi(\pi)^n$$

hội tụ tuyệt đối tới $(1 - \chi(\pi))^{-1}$ với $\Re(\chi) > 0$. Hàm này có thể mở rộng giải tích tới toàn bộ thành phần trung hòa, mà có thể xem như $\mathbb{C}^\times$. Nó có cực đơn tại $\chi(\pi) = 1$, do đó $\widetilde{g}$ được định nghĩa tốt như một hàm phân hình trên $\mathsf{X}_F$ triệt tiêu bên ngoài thành phần trung hòa và trên thành phần này nó có cực đơn tại $\chi(\pi) = 1$. Từ đó dẫn đến $\widetilde{f}$ được định nghĩa tốt như một hàm phân hình trên $\mathsf{X}_F$ với mọi $f \in \mathcal{S}(F)$, nó là một hàm chỉnh hình trên mọi thành phần không trung hòa, nhưng trên thành phần trung hòa nó có thể có một cực đơn tại đặc trưng tầm thường $\chi_0 \in \mathsf{X}_F$.

Giống như trường hợp trường số thực, ta sẽ định nghĩa thừa số $\gamma$ với sự trợ giúp của lý thuyết hàm suy rộng (xem phần cuối mục Công thức tổng Poisson). Kí hiệu $\mathcal{S}'(F)$ là không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{S}(F)$. Với mọi $\chi \in \mathsf{X}_F$, đặt $\mathcal{S}'(F)_\chi$ là không gian các phiếm hàm $l \in \mathcal{S}'(F)$ sao cho

$$l(f_\alpha) = \chi(\alpha)^{-1} l(f)$$

với mọi $f \in \mathcal{S}(F)$ và $\alpha \in F^\times$, ở đây $f_\alpha(t) = f(\alpha t)$ là phép vị tự hệ số $\alpha$. Như trường hợp trường số thực, quan sát cơ bản ở đây là với mọi $\chi \in \mathsf{X}_F$,

$$\dim \mathcal{S}'(F)_\chi = 1,$$

xem [5, 2]. Tích phân Mellin (22) định nghĩa một vectơ khác không $m_\chi(f) = \widetilde{f}(\chi)$ của $\mathcal{S}'(F)_\chi$ nếu $\Re(\chi) > 0$.

(5)Lấy $F = \mathbb{Q}_p$ cho dễ hình dung. Nếu $f$ là một hàm hằng địa phương với giá com-pắc, nó là tổng của hữu hạn các hàm đặc trưng dạng $1_{p^i\mathbb{Z}_p^\times}$, $i \in I$, với $I \subseteq \mathbb{N}$ là một tập hữu hạn. Lấy giao của các $p^i\mathbb{Z}_p^\times$, ta có nhóm con mở com-pắc $H$ của $\mathbb{Z}_p^\times$. Hàm $f$ bất biến dưới phép nhân của $H$, nghĩa là $f(xh) = f(x)$ với mọi $h \in H$. (Người dịch)

Nếu ta có một đặc trưng unita cộng tính không tầm thường $\psi : F \to \mathbb{C}^1$, đối ngẫu Pontryagin của $F$ có thể được đồng nhất với chính $F$ bằng cách gán $y \in F$ với đặc trưng unita $x \mapsto \psi(xy)$. Cách chọn $\psi$ cũng xác định một độ đo Haar $dx$ trên $F$ sao cho biến đổi Fourier

$$f^\vee(y) = \int_F f(x)\psi(-xy)dx$$

thỏa mãn $(f^\vee)^\vee(x) = f(-x)$. Biến đổi Fourier định nghĩa một tự đẳng cấu của $\mathcal{S}(F)$. Với mọi $\alpha \in F^\times$, biến đổi Fourier của $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$ là

$$\begin{aligned}(f_\alpha)^\vee(y) &= |\alpha|^{-1} f^\vee(\alpha^{-1}y)\\ &= |\alpha|^{-1}(f^\vee)_{\alpha^{-1}}(y).\end{aligned}$$

Cũng như trường hợp số thực, ta định nghĩa $m_\chi^\vee(f) = m_\chi(f^\vee)$ là một vectơ trong $\mathcal{S}'(F)_{|\cdot|\chi^{-1}}$. Với $\Re(\chi) < 1$, $m^\vee_{|\cdot|\chi^{-1}}$ là một vectơ khác không của $\mathcal{S}'(F)_\chi$ vì nó được định nghĩa tường minh như một tích phân hội tụ. Bây giờ ta định nghĩa, giống như trường hợp số thực, thừa số $\gamma$ như một hàm phân hình của $\chi \in \mathsf{X}_F$ sao cho

$$m^\vee_{|\cdot|\chi^{-1}} = \gamma(\chi) m_\chi.$$

Để tính $\gamma(\chi)$, ta phải chọn một hàm $f$ thích hợp mà ta có thể tính biến đổi Mellin của $f$ và của $f^\vee$. Ví dụ, xét hàm thử $g = 1_{\mathcal{O}_F}$. Giả sử phần dẫn (conductor) của $\psi$ là $\mathcal{O}_F$, nghĩa là hạn chế của $\psi$ vào $\mathcal{O}_F$ là tầm thường, trong khi hạn chế của $\psi$ vào $\pi^{-1}\mathcal{O}_F$ là không tầm thường. Khi đó $g^\vee = 1_{\mathcal{O}_F}$. Ta đã thấy $\widetilde{g}$ triệt tiêu bên ngoài thành phần trung hòa, do đó hàm thử này chỉ tác động đến việc tính toán $\gamma$ trên thành phần trung hòa. Trên thành phần trung hòa tham số hóa bởi biến $\chi(\pi) \in \mathbb{C}^\times$, ta có $\widetilde{g}(\chi) = (1-\chi(\pi))^{-1}$ và $\widetilde{g}(|\cdot|\chi^{-1}) = (1 - q^{-1}\chi^{-1}(\pi))^{-1}$ do đó

$$\gamma(\chi) = \frac{1-\chi(\pi)}{1-q^{-1}\chi^{-1}(\pi)}. \tag{23}$$

Trên các thành phần rẽ nhánh, ta cần sử dụng các hàm thử phức tạp hơn và kết quả tính toán $\gamma$ sẽ bao gồm các tổng Gauss.

## 8. Biến đổi Mellin trên các adèle

**8.1. Trường số hữu tỉ.** Kí hiệu $\mathsf{X}_\mathbb{Q}$ là nhóm các đặc trưng của $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$. Theo miêu tả tường minh của nhóm lớp idèle $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times = \hat{\mathbb{Z}}^\times \times \mathbb{R}_+$, $\mathsf{X}_\mathbb{Q}$ là tích trực tiếp của đối ngẫu Pontryagin của $\hat{\mathbb{Z}}^\times$ và $\mathsf{X}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{C}$, nói cách khác, một đặc trưng $\chi \in \mathsf{X}_\mathbb{Q}$ được cho bởi một bộ hai thành phần gồm một đặc trưng Dirichlet $\bar{\chi} : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}$ và một số phức $s$. Các thành phần của $\mathsf{X}_\mathbb{Q}$ được tham số hóa bởi các đặc trưng Dirichlet $\bar{\chi}$. Hàm phần thực định nghĩa tổng quát trong Mục 4, Đối ngẫu Pontryagin, được cho bởi công thức đơn giản $\Re(\chi) = \Re(s)$.

Lấy $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ là một hàm Schwartz trên nhóm các adèle. Không kể các tổ hợp tuyến tính, ta có thể giả sử nó có dạng $f = \otimes_p f_p \otimes f_\infty$ ở đây $f_\infty \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ và $f_p$ là hàm hằng địa phương với giá com-pắc trong $\mathbb{Q}_p$, và $f_p$ bằng $1_{\mathbb{Z}_p}$ với mọi $p$ ngoại trừ một tập hợp hữu hạn $S$ các số nguyên tố.

Với mọi đặc trưng $\chi \in \mathsf{X}_\mathbb{Q}$ ta xét tích trực tiếp

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(\chi) = &\prod_p \int_{\mathbb{Q}_p^\times} f_p(t_p)\chi(t_p)dt_p\\ &\times \int_{\mathbb{R}^\times} f_\infty(t_\infty)\chi(t_\infty)dt_\infty.\end{aligned} \tag{24}$$

Tất cả các thừa số địa phương hội tụ tuyệt đối nếu $\Re(\chi) > 0$. Với mỗi số nguyên tố $p \notin S$, thừa số địa phương tại $p \notin S$ là khác không chỉ khi $\chi$ cảm sinh một đặc trưng không rẽ nhánh $\chi_p : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{C}^\times$. Trong trường hợp này, ta tính $\chi_p(p)$. Quan sát thấy $\chi_p : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{C}^\times$ là đặc trưng cảm sinh từ $\chi$ bởi đồng cấu

$\mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$. Ảnh của $p \in \mathbb{Q}_p^\times$ là idèle $(1, \ldots, p, \ldots, 1)$ với tất cả các thành phần là $1$ trừ thành phần tương ứng với $p$ là $p$. Ảnh này là tương đương modulo $\mathbb{Q}^\times$ với idèle $(p^{-1}, \ldots, 1, \ldots, p^{-1})$ với tất cả các thành phần là $p^{-1}$ trừ thành phần tương ứng với $p$ là $1$. Phần hữu hạn của idèle này nằm trong $\hat{\mathbb{Z}}^\times$, do đó

(25) $$\chi_p(p) = \bar{\chi}(p)^{-1} p^{-s}.$$

Từ đó suy ra thừa số địa phương tại $p$ của biến đổi Mellin là

(26) $$\widetilde{f}_p(\chi_p) = (1 - \bar{\chi}(p)^{-1} p^{-s})^{-1}.$$

Vì tích vô hạn

(27) $$\prod_{p \notin S} (1 - \bar{\chi}(p)^{-1} p^{-s})^{-1}.$$

hội tụ tuyệt đối với $\Re(\chi) > 1$, tích vô hạn (24) hội tụ tuyệt đối trên miền của $\mathsf{X}_{\mathbb{Q}}$ định nghĩa bởi $\Re(\chi) > 1$. Đây là $L$-hàm Dirichlet gắn với đặc trưng $\bar{\chi}^{-1}$.

Tại thời điểm này, nói rằng $L$-hàm Dirichlet có mở rộng giải tích tới $s \in \mathbb{C}$ cũng giống như nói rằng biến đổi Mellin $\widetilde{f}(\chi)$ trên adèle có thể mở rộng giải tích tới thành phần của $\mathsf{X}_{\mathbb{Q}}$ chứa $\bar{\chi}$. Bây giờ ta giải thích tính mở rộng giải tích của $\widetilde{f}$ và phương trình hàm của nó.

Erich Hecke (1887-1947), người tìm ra phương trình hàm của hàm zeta Dedekind và $L$-hàm Dirichlet. Nguồn: L. Reidemeister, Viện nghiên cứu toán Oberwolfach.

Với mỗi $x \in \mathbb{A}^\times$, ký hiệu $\bar{x}$ là ảnh tương ứng qua ánh xạ thương $\mathbb{A}^\times \to \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$. Ta xét hàm

$$f_+(\bar{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}^\times} f(\alpha x),$$

nhận được bằng cách cộng hàm $f$ dọc theo các lớp kề đối với $\mathbb{Q}^\times$.

Ta chứng minh tổng này hội tụ tuyệt đối. Nhắc lại rằng với mọi $p$, $f_p$ là một hàm hằng địa phương với giá com-pắc trong $\mathbb{Q}_p$, và với hầu tất cả $p$, $f_p = 1_{\mathbb{Z}_p}$. Từ đó dẫn đến tồn tại $m_x \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $\alpha$ thỏa mãn $f(\alpha x) \neq 0$, ta có $m_x \alpha \in \mathbb{Z}$. Hơn thế nữa có thể điều chỉnh để $m_x$ là hàm hằng địa phương đối với $x$. Điều ta cần chứng minh là tương đương với

$$\sum_{m_x \alpha \in \mathbb{Z} - \{0\}} f_\infty(\alpha x_\infty)$$

hội tụ tuyệt đối. Điều này đúng vì $f_\infty$ là một hàm Schwartz.

Lập luận này cũng chỉ ra với mọi số nguyên $N \in \mathbb{Z}$,

$$f_+(\bar{x}) = O(|\bar{x}|^{-N})$$

khi $|\bar{x}| \to \infty$. Với mọi đặc trưng $\chi \in \mathsf{X}_{\mathbb{Q}}$, ta có thể tách tích phân $\int_{\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times} f_+(\bar{x})\chi(\bar{x})d\bar{x}$ thành hai phần:

(28) $$\int_{\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times} f_+(\bar{x})\chi(\bar{x})d\bar{x} = \int_{|\bar{x}| \geq 1} f_+(\bar{x})\chi(\bar{x})d\bar{x} + \int_{|\bar{x}| < 1} f_+(\bar{x})\chi(\bar{x})d\bar{x}.$$

Vì $f_+$ giảm nhanh khi $|x| \to \infty$, tích phân trên miền $|\bar{x}| \geq 1$ hội tụ tuyệt đối với mọi $\chi \in \mathsf{X}_{\mathbb{Q}}$. Tích phân trên miền $|\bar{x}| < 1$ hội tụ tuyệt đối nếu $\Re(\chi) > 0$. Trên miền này, tích phân (28) là dạng "gấp" của $\widetilde{f}(\chi)$.

Kí hiệu $f^\vee$ là biến đổi Fourier của $f$. Với mỗi $x \in \mathbb{A} - \{0\}$, ta có công thức tổng Poisson

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} f(\alpha x) = |x|^{-1} \sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} f^\vee(\alpha x^{-1}).$$

Từ đó suy ra

$$f_+(x) + f(0) = |x|^{-1}(f_+^\vee(x^{-1}) + f^\vee(0)).$$

Thế đẳng thức này vào tích phân $\int_{|\bar{x}|<1} f_+(\bar{x})\chi(\bar{x})d\bar{x}$, ta có

$$-f(0)\int\limits_{|\bar{x}|<1} \chi(\bar{x})d\bar{x} + f^\vee(0)\int\limits_{|\bar{x}|<1} |x|^{-1}\chi(\bar{x})d\bar{x} + \int\limits_{|\bar{x}|>1} f_+^\vee(\bar{x})\chi^{-1}(\bar{x})d\bar{x}.$$

Số hạng thứ ba trong tổng này hội tụ tuyệt đối với mọi $\chi \in \mathsf{X}_{\mathbb{Q}}$ vì $f^\vee(x)$ cũng giảm nhanh khi $|x| \to \infty$. Hai số hạng đầu có thể tính trực tiếp được. Nếu ta viết $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ thành $\hat{\mathbb{Z}}^\times \times \mathbb{R}_+$ và $\chi = (\bar{\chi}, s)$, tích phân $\int_{|\bar{x}|<1} \chi(\bar{x})d\bar{x}$ tách ra thành tích

$$\int_{\hat{\mathbb{Z}}^\times} \bar{\chi}(z)dz \int_0^1 t^{s-1}dt.$$

Tích này hội tụ tuyệt đối với $\Re(s) > 0$, và trong trường hợp $\Re(s) > 0$ nó bằng

$$\frac{1}{s}\int_{\hat{\mathbb{Z}}^\times} \bar{\chi}(z)dz.$$

Biểu thức này rõ ràng có thể mở rộng phân hình tới $\mathsf{X}_{\mathbb{Q}}$. Nó bằng không trên mọi thành phần với $\bar{\chi} \neq 1$, và trên thành phần trung hòa với $\bar{\chi} = 1$, nó có một cực đơn tại $s = 0$. Tích phân $\int_{|\bar{x}|<1} |x|^{-1}\chi(\bar{x})d\bar{x}$ là

$$\int_{\hat{\mathbb{Z}}^\times} \bar{\chi}(z)dz \int_0^1 t^{s-2}dt,$$

hội tụ với $\Re(s) > 1$, trong trường hợp đó nó bằng

$$\frac{1}{s-1}\int_{\hat{\mathbb{Z}}^\times} \bar{\chi}(z)dz.$$

Biểu thức này rõ ràng có thể mở rộng phân hình tới $X$. Nó bằng không trên mọi thành phần với $\bar{\chi} \neq 1$, và trên thành phần trung hòa $\bar{\chi} = 1$, nó có một cực đơn tại $s = 1$.

Gom bốn số hạng lại, ta thấy rằng (28) có thể mở rộng phân hình với một cực đơn tại $s = 0$ có thặng dư $f(0)$, và một cực đơn tại $s = 1$ có thặng dư $f^\vee(0)$. Nó cũng có thể được viết thành dạng đối xứng

$$\int_{|\bar{x}|>1} (f(0) + f_+(\bar{x}))\chi(\bar{x}) + (|\bar{x}|f^\vee(0) + |\bar{x}|f_+^\vee(\bar{x}))\chi^{-1}(\bar{x})d\bar{x}.$$

Trong công thức trên, tích phân $\int_{|\bar{x}|>1} \chi(\bar{x})d\bar{x}$ có nghĩa là $-\int_{|\bar{x}|<1} \chi(\bar{x})d\bar{x}$ tính như trên. Vì vậy ta rút ra phương trình hàm liên hệ các biến đổi Mellin của $f$ và $f^\vee$

$$\widetilde{f}(\chi) = \widetilde{f^\vee}(|\cdot|\chi^{-1}), \tag{29}$$

trong đó $|\cdot|$ là đặc trưng chuẩn của $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$.

Nhắc lại rằng $f = \otimes f_p \otimes f_\infty$, với $f_\infty \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ và với mọi số nguyên tố $p$, $f_p \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ sao cho $f_p = 1_{\mathbb{Z}_p}$ với hầu tất cả $p$. Từ (29) suy ra

$$\prod_p \frac{\widetilde{f_p^\vee}(|\cdot|\chi^{-1})}{\widetilde{f_p}(\chi)} \frac{\widetilde{f_\infty^\vee}(|\cdot|\chi^{-1})}{\widetilde{f_\infty}(\chi)} = 1 \tag{30}$$

với mọi $\chi \in \mathsf{X}_{\mathbb{Q}}$. Ta cần thận trọng khi diễn giải công thức này. Nó chỉ có nghĩa với $\chi$ nằm trong một thành phần của $\mathsf{X}_{\mathbb{Q}}$ mà trên đó mọi thừa số xuất hiện trong công thức này là các hàm phân hình khác không, và công thức (30) phải được hiểu như là một công thức tích của các hàm phân hình trên một thành phần như thế của $\mathsf{X}_{\mathbb{Q}}$. Tập hợp các thành phần mà trên đó (30) có nghĩa phụ thuộc vào cách chọn các hàm địa phương $f_p$. Trong trường hợp các số hữu tỉ hiện tại, tập hợp này là hữu hạn.

Vì các hàm $f_p$ và $f_\infty$ phải được chọn độc lập và tùy ý, chỉ với điều kiện $f_p = 1_{\mathbb{Z}_p}$ với hầu tất cả $p$, quan hệ trên dẫn đến mỗi thương địa phương là độc lập với cách chọn hàm thử $f_p$ hoặc $f_\infty$. Đây là điều mà ta đã chứng minh thuần túy bằng phương pháp địa phương: với kí hiệu

$$\gamma_p(\chi) = \frac{\widetilde{f_p^\vee}(|\cdot|\chi^{-1})}{\widetilde{f}_p(\chi)}$$

và

$$\gamma_\infty(\chi) = \frac{\widetilde{f_\infty^\vee}(|\cdot|\chi^{-1})}{\widetilde{f}_\infty(\chi)}$$

ta có

$$\prod_p \gamma_p(\chi)\gamma_\infty(\chi) = 1. \quad (31)$$

Công thức này có nghĩa vì các hàm phân hình liên quan xác định trên toàn bộ $\mathsf{X}_{\mathbb{Q}}$.

**Quan hệ này bao hàm phương trình hàm của hàm zeta Riemann cũng như tất cả các $L$-hàm Dirichlet**. Với $\bar{\chi} = 1$, đây là phương trình hàm cho hàm zeta Riemann. Lấy $\bar{\chi} : \hat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^1$ là một đặc trưng Dirichlet không tầm thường, và xét hạn chế của các thừa số $\gamma_p$ và $\gamma_\infty$ lên thành phần của $\mathsf{X}_{\mathbb{Q}}$ với tham số hóa $(\bar{\chi}, s)$, $s \in \mathbb{C}$. Lấy $S$ là tập hợp hữu hạn các trị nguyên tố chia hết phần dẫn (conductor) của $\bar{\chi}$. Với mọi $p \notin S$, theo (23) và (25) ta có

$$\gamma_p(\bar{\chi}, s) = \frac{1 - \bar{\chi}^{-1}(p)p^{-s}}{1 - \bar{\chi}(p)p^{-1+s}}.$$

Công thức tích (30) cho thấy tích vô hạn

$$\prod_{p \notin S} \gamma_p(\bar{\chi}, s)$$

có thể được tính từ hữu hạn các trị còn lại, bao gồm trị vô cực. Đây cơ bản là phương trình hàm cho $L$-hàm Dirichlet của $\bar{\chi}$. Để làm điều này tường minh, cần thực hiện tính toán địa phương thừa số $\gamma$ tại các trị rẽ nhánh và trị thực.

8.2. **Trường số bất kỳ.** Lý thuyết biến đổi Mellin trên nhóm các lớp idèle đã được trình bày sao cho việc tổng quát hóa từ $\mathbb{Q}$ tới một trường số bất kì hầu như không khó khăn gì. Tuy nhiên, có lẽ vẫn cần chỉ ra một vài khác biệt giữa trường hợp của $\mathbb{Q}$ và trường hợp tổng quát.

Nhắc lại rằng với mỗi trường số $K$, $\mathbb{A}_K^\times/K^\times$ là nhóm các lớp idèle của $K$. Nhóm các lớp idèle là một nhóm compắc địa phương được trang bị một ánh xạ chuẩn $|\cdot| : \mathbb{A}_K^\times/K^\times \to \mathbb{R}_+$ với hạch compắc $\mathbb{A}_K^1/K^\times$. Khác biệt chính giữa trường hợp tổng quát với trường hợp $K = \mathbb{Q}$ là nhóm $\mathbb{A}_K^1/K^\times$ có thể không phải là cận hữu hạn. Nó có thể chứa một tích của hữu hạn các bản sao của $\mathbb{C}^1$, số lượng các bản sao đúng bằng hạng của nhóm đơn vị Dirichlet $\mathbb{Z}_K^\times$.

Nhắc lại rằng $\mathsf{X}_K$ kí hiệu nhóm các đặc trưng của $\mathbb{A}_K^\times/K^\times$. Theo thảo luận ở cuối Mục 4, Đối ngẫu Pontryagin, $\mathsf{X}_K$ là một hợp rời các bản sao của $\mathbb{C} = \mathsf{X}(\mathbb{R}_+)$. Nhóm các thành phần liên thông $\pi_0(\mathsf{X}_K)$ vì là đối ngẫu Pontryagin của nhóm compắc $\mathbb{A}_K^1/K^\times$ nên là một nhóm rời rạc, có thể không phải là thuần túy xoắn (torsion) như trường hợp số hữu tỉ.

Với mọi trị $\nu$ của $K$, hữu hạn hay vô cực, ký hiệu $\mathsf{X}_{K_\nu}$ là nhóm các đặc trưng của $K_\nu^\times$. Nhắc lại rằng $\mathsf{X}_{K_\nu}$ cũng là hợp rời các bản sao của $\mathbb{C}$ (hoặc $\mathbb{C}^\times$) trong trường hợp Archimedes (tương ứng, phi

Archimedes). Hạn chế $\mathbb{A}_K^\times/K^\times$ lên $K_\nu^\times$ cho ta một ánh xạ liên tục

$$\mathsf{X}_K \to \mathsf{X}_{K_\nu}$$

gửi toàn ánh tập các thành phần liên thông của $\mathsf{X}_K$ lên tập các thành phần liên thông của $\mathsf{X}_{K_\nu}$. Một thành phần của $\mathsf{X}_K$ được gọi là không rẽ nhánh nếu ảnh tương ứng của nó là thành phần trung hòa của $\mathsf{X}_{K_\nu}$ với mọi trị $\nu$, hữu hạn hay vô cực. Trong trường hợp số hữu tỉ, thành phần không rẽ nhánh duy nhất của $\mathsf{X}_\mathbb{Q}$ là thành phần trung hòa. Trường hợp tổng quát, nhóm các thành phần không rẽ nhánh $\pi_0^{\mathrm{unr}}(\mathsf{X}_K)$ có thể không tầm thường hay thậm chí vô hạn. Ta rút ra từ (20) một dãy khớp

$$0 \to \frac{K_\mathbb{R}^1}{\mathbb{Z}_K^\times} \to \frac{\mathbb{A}_K^1}{\hat{\mathbb{Z}}_K^\times K^\times} \to \frac{\bigoplus_{\nu \text{ hữu hạn}} K_\nu^\times/\mathcal{O}_\nu^\times}{K^\times} \to 0.$$

Dãy khớp này cảm sinh một đồng cấu

$$\pi_0^{\mathrm{unr}}(\mathsf{X}_K) \to (K_\mathbb{R}^1/\mathbb{Z}_K^\times)^\vee$$

từ nhóm các thành phần không rẽ nhánh tới đối ngẫu Pontryagin của $K_\mathbb{R}^1/\mathbb{Z}_K^\times$, với hạch là đối ngẫu Pontryagin của nhóm các lớp ideal.

Định nghĩa một hàm Schwartz $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_K)$ là một tổ hợp tuyến tính hữu hạn của $\otimes_\nu f_\nu$, $f_\nu$ là $1_{\mathcal{O}_\nu}$ với hầu hết các trị hữu hạn $\nu$. Trong các thảo luận sau đây, ta chỉ cần xét trường hợp $f = \otimes_\nu f_\nu$.

Tại mỗi trị $\nu$, ta định nghĩa biến đổi Mellin $\widetilde{f_\nu}$ như hàm phân hình trên $\mathsf{X}_\nu$ bằng không bên ngoài một tập hợp hữu hạn các thành phần phụ thuộc vào $f_\nu$; biến đổi này chỉ tập trung trên thành phần trung hòa nếu $f_\nu = 1_{\mathcal{O}_\nu}$. Điều này cũng đúng với biến đổi Fourier $f_\nu^\vee$. Giống như (22), tỉ lệ

$$\frac{\widetilde{f_\nu^\vee}(|\cdot|\chi^{-1})}{\widetilde{f_\nu}(\chi)}$$

trên một thành phần mà cả tử số lẫn mẫu số đều là các hàm phân hình khác không, là không phụ thuộc vào $f_\nu$. Kí hiệu tỉ lệ này bởi $\gamma_\nu(\chi)$. Khi đó $\gamma_\nu$ là một hàm phân hình trên toàn $\mathsf{X}_{K_\nu}$.

Với mọi $\chi \in \mathsf{X}_K$ sao cho $\Re(\chi) > 1$, tích Euler

$$\chi \mapsto \widetilde{f}(\chi) = \prod_\nu \widetilde{f_\nu}(\chi)$$

hội tụ tuyệt đối và định nghĩa một hàm chỉnh hình trên $\mathsf{X}_K$. Ở đây, khác với trường hợp số hữu tỉ, $\widetilde{f}$ có thể khác không trên vô hạn các thành phần của $\mathsf{X}_K$. Hạn chế nó lên thành phần tầm thường, ta nhận được hàm zeta Dedekind, và hạn chế lên các thành phần khác, ta có các $L$-hàm gắn với các đặc trưng của $\mathbb{A}_K^1/K^\times$ với cấp hữu hạn hay vô hạn. Sử dụng công thức tổng Poisson, $\widetilde{f}$ có thể mở rộng thành một hàm phân hình trên $\mathsf{X}_K$ thỏa mãn một phương trình hàm

$$\widetilde{f}(\chi) = \widetilde{f^\vee}(|\cdot|\chi^{-1}).$$

Có thể chuyển công thức thành một công thức về tích của các thừa số $\gamma$

$$\prod_\nu \gamma_\nu(\chi) = 1,$$

đúng trên toàn $\mathsf{X}_K$.

## Tài liệu


[1] A. Deitmar và S. Echterhoff, *Principles of harmonic analysis*. Universitext. Springer, New York, 2009.

[2] S.S. Kudla, *Tate's Thesis*. In: Bernstein J., Gelbart S. (eds) *An Introduction to the Langlands Program*. Birkhäuser, Boston, MA (2004).

[3] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.

[4] J. Tate, *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions*, Princeton Ph.D. thesis, Princeton University, Princeton, NJ, 1950.

[5] A. Weil, *Fonction zêta et distributions*, Séminaire Bourbaki 1965–1966, exp. 312.

[6] D. Zagier, *The Mellin transform and other useful analytic techniques*. Phụ lục cho E. Zeidler, *Quantum Field Theory I: Basics in Mathematics and Physics, A Bridge Between Mathematicians and Physicists*, tr. 307–328, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

**Người dịch**: Ngô Trung Hiếu (Đại học Bách khoa Hà Nội).

## *Tin tức hội viên và hoạt động toán học*

* **Nhân ngày Khoa học Việt Nam 18/5/2020**, Bộ Khoa học và Công nghệ đã tổ chức lễ tôn vinh các tổ chức, cá nhân tiêu biểu trong các nghiên cứu phục vụ công tác phòng, chống dịch Covid-19. Khi đợt dịch thứ hai bùng phát ở Việt Nam vào tháng Ba năm 2020, Bộ Y tế và Bộ Khoa học Công nghệ đã tập hợp khoảng ba trăm chuyên gia thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau như dịch tễ, y tế công cộng, kinh tế, xã hội học, công nghệ thông tin, toán học với mục tiêu nhanh chóng giải quyết bài toán liên quan đến công tác phòng chống dịch. Yêu cầu đặt ra với nhóm nghiên cứu là thiết lập bản đồ vùng dịch, xác định chỉ số nguy cơ đối với các tỉnh, thành phố, các quận, huyện, xã, phường. Công cụ được nhóm sử dụng ở đây là mô phỏng đa tác tử, trong đó mỗi cá thể đại diện cho một người có thể mang mầm bệnh. Mô hình được sử dụng là mô hình **SEIR**. Bản đồ lây nhiễm, chỉ số nguy cơ của các vùng, do nhóm nghiên cứu tìm ra, đã được Ban chỉ đạo Quốc gia sử dụng trong việc ra các quyết định liên quan đến khoanh vùng, dập dịch. Các kết quả khả quan cho đến cuối tháng Năm năm 2020 từ đóng góp của các nhà toán học trong nhóm nghiên cứu một lần nữa khẳng định vai trò của toán học trong các vấn đề thiết yếu của cuộc sống.

* **PGS. TSKH. Vũ Hoàng Linh**, Khoa Toán-Cơ-Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội, được bầu làm hiệu trưởng trường ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN nhiệm kỳ 2020-2025. PGS. Vũ Hoàng Linh là Phó chủ tịch, kiêm Tổng thư ký đương nhiệm của Hội Toán học Việt Nam.

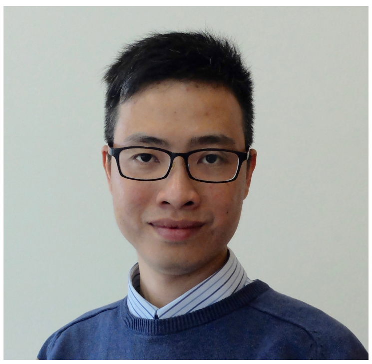
## *Tin thế giới*

* **GS. Phan Thành Nam** (ĐH Ludwig-Maximilians Munich, Đức) được trao giải thưởng của Hội Toán học châu Âu năm 2020. Lễ trao giải dự kiến được tổ chức vào tháng Sáu năm 2021, vì khủng hoảng do vi-rút corona mới gây ra.

Lĩnh vực nghiên cứu của Phan Thành Nam là giải tích và vật lý toán, trong đó trọng tâm là bài toán nhiều hạt trong cơ học lượng tử, lý thuyết phổ, giải tích biến phân, phương trình vi phân đạo hàm riêng, và giải tích số.

Phan Thành Nam sinh năm 1985 tại Phú Yên. Anh nhận bằng cử nhân ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Tp. HCM năm 2007, và bảo vệ luận án tiến sĩ năm 2011 tại ĐH Copenhagen, Đan Mạch, dưới sự hướng dẫn của GS. Jan Solovej.

Phan Thành Nam trở thành giáo sư ĐH Ludwig-Maximilians Munich từ năm 2017. Giải thưởng của Hội Toán học châu Âu được trao bốn năm một lần tại một kỳ Đại hội Toán học châu Âu. Mỗi kỳ đại hội, giải thưởng được trao cho tối đa 10 nhà toán học chưa quá 35 tuổi, có quốc tịch châu Âu hoặc đang làm việc tại châu Âu, và có những cống hiến xuất sắc cho toán học.



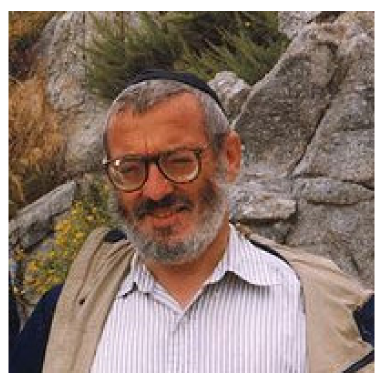
GS. Phan Thành Nam. Ảnh: ĐH Ludwig-Maximilians Munich.

* **Giải thưởng Shaw 2020** đã được trao cho Alexander Beilinson (ĐH Chicago, Hoa Kỳ) và David Kazhdan (ĐH Hebrew, Jerusalem). Giải thưởng Shaw vinh danh Beilinson và Kazhdan vì "những đóng góp sâu sắc cho lý thuyết biểu diễn", cũng như "những ảnh hưởng có tính nền tảng của họ trong những lĩnh vực như hình học số học, lý thuyết K, lý thuyết trường bảo giác, số học, hình học đại số và hình học phức, lý thuyết nhóm cũng như trong đại số nói chung".

Alexander Beilison sinh năm 1957 tại Mátxcơva, hiện là giáo sư ĐH Chicago, Hoa Kỳ. Beilinson bảo vệ luận án phó tiến sĩ năm 1988 tại Viện Vậy lý Lý thuyết Landau, dưới sự hướng dẫn của Yuri Manin. Ông từng là nghiên cứu viên tại Viện Landau từ 1987 đến 1993, giáo sư tại Viện Công nghệ Massachusetts từ 1988 đến 1998, trước khi giữ chức giáo sư tại ĐH Chicago từ 1998 đến nay.

David Kazhdan sinh năm 1946 tại Mátxcơva, hiện là giáo sư ĐH Hebrew tại Jerusalem, Israel. Kazhdan bảo vệ luận án phó tiến sĩ năm 1969 tại Đại học Tổng hợp Mátxcơva, dưới sự hướng dẫn của Alexander Kirillov. Sau một thời gian làm việc ở ĐH Tổng hợp Mátxcơva (1969-1975), ông di cư đến Hoa Kỳ và giữ chức giáo sư của ĐH Harvard từ 1975 cho đến khi nghỉ hưu (năm 2002). Ông chuyển đến Israel và là giáo sư ĐH Hebrew tại Jerusalem từ 2002 đến nay. (Thông tin từ trang Shawprize.org)

Alexander Beilinson. Ảnh: ĐH Chicago.



David Kazhdan. Ảnh: Wikipedia.

# THÔNG TIN TOÁN HỌC, Tập 24 Số 2 (2020)