Hội Toán Học Việt Nam

THÔNG TIN TOÁN HỌC

Tháng 3 Năm 2020 **Tập 24 Số 1**

Thông Tin Toán Học
(Lưu hành nội bộ)

- Địa chỉ liên hệ

*Bản tin: **Thông Tin Toán Học***
Viện Toán Học
18 Hoàng Quốc Việt, 10307 Hà Nội

Email: `ttth@vms.org.vn`

Trang web:
`http://www.vms.org.vn/ttth/ttth.htm`

Ảnh bìa 1. Áp phích tại thành phố Bergamo (nước Cộng hòa Italia), nơi bị thiệt hại nặng nề vì dịch Covid-19, với dòng chữ *Cảm ơn các y bác sĩ!* (A Tutti Voi... Grazie!). Nguồn: voxnews.online.

- Bản tin **Thông Tin Toán Học** nhằm mục đích phản ánh các sinh hoạt chuyên môn trong cộng đồng toán học Việt Nam và quốc tế. Bản tin ra thường kỳ 4 số trong một năm.

- Thể lệ gửi bài: Bài viết bằng tiếng Việt. Tất cả các bài, thông tin về sinh hoạt toán học ở các khoa (bộ môn) toán, về hướng nghiên cứu hoặc trao đổi về phương pháp nghiên cứu và giảng dạy đều được hoan nghênh. Bản tin cũng nhận đăng các bài giới thiệu tiềm năng khoa học của các cơ sở cũng như các bài giới thiệu các nhà toán học. Bài viết xin gửi về tòa soạn theo email hoặc địa chỉ ở trên. Nếu bài được đánh máy tính, xin gửi kèm theo file với phông chữ unicode.

Trang web của Hội Toán học:
`http://www.vms.org.vn`

Giáo sư Việt Nam ngành Toán qua 40 năm công nhận

Lê Tuấn Hoa(1)

Không kể những lần phong đặc cách, năm 1980 là năm đầu tiên Chính phủ chính thức ban hành quyết định công nhận chức danh giáo sư, phó giáo sư cho các cán bộ làm công tác giảng dạy đại học và nghiên cứu khoa học, xem [2]. Từ đó đến nay vừa tròn 40 năm công tác công nhận/bổ nhiệm chức danh (chức vụ) giáo sư, phó giáo sư. Đây là dịp tốt để tiến hành sơ kết, đánh giá về công tác này, đặc biệt là xem xét ảnh hưởng của nó đối với công cuộc xây dựng và phát triển đào tạo, nghiên cứu khoa học trong nước. Bài viết này chỉ tập trung bàn về các giáo sư toán học, ngành chuyên môn của tác giả. Trong bài này, chúng tôi sẽ cung cấp và phân tích một số số liệu thống kê, chứ không có điều kiện và khả năng đi sâu vào nội dung nghiên cứu của các giáo sư.

1. Điểm qua lịch sử bổ nhiệm chức danh giáo sư

Trước năm 1980, có tất cả 29 nhà khoa học Việt Nam được công nhận chức vụ giáo sư, xem [1, trang 11], hoặc [5, trang 389]. Trong số đó, ngành Toán học có hai giáo sư là GS. Tạ Quang Bửu và GS. Lê Văn Thiêm. Tuy nhiên chúng tôi không tìm được văn bản chính thức nào để biết được năm bổ nhiệm. Ngay cả trong quyển sách thống kê [1] cũng không có tài liệu (thông tin trong Wikipedia tiếng Việt [8] có nhiều điểm không chính xác). Trong một số văn bản không chính thức, có khẳng định GS. Lê Văn Thiêm được phong học hàm Giáo sư vào năm 1956, chẳng hạn xem [4, trang 193]. Điều đó có vẻ hợp lí, khi năm 1956 một số trường đại học được Chính phủ thành lập. Ta có thể tạm xem hai giáo sư Tạ Quang Bửu và Lê Văn Thiêm được phong hàm vào năm 1956.

Năm 1976, Hội đồng Chính phủ mới ban hành Quyết định số 271-CP ngày 1/10/1977 về việc công nhận chức vụ Giáo sư và Phó Giáo sư trong lĩnh vực giảng dạy đại học và nghiên cứu khoa học. Thực hiện quyết định này, năm 1980 và 1984, Chính phủ đã hai lần ban hành quyết định công nhận chức vụ khoa học giáo sư và phó giáo sư (sau đó có bổ sung 4 lần vào các năm 1984-89, nhưng không có Toán).

Từ năm 1989, theo Nghị định số 153-HĐBT, ngày 25/9/1989 của Hội đồng Bộ trưởng về việc thành lập Hội đồng xét duyệt Học vị và Chức danh khoa học Nhà nước, thì việc xét và ban hành quyết định công nhận chức danh Giáo sư và Phó Giáo sư do Hội đồng Xét duyệt học vị và chức danh khoa học Nhà nước đảm nhiệm. Sau đó, Hội đồng này lần lượt được đổi tên thành: Hội đồng Học hàm Nhà nước (năm 1995), Hội đồng Chức danh giáo sư Nhà nước (năm 2001) và Hội đồng Giáo sư Nhà nước (năm 2018). Chức vụ khoa học GS, PGS lần lượt được đổi thành chức danh GS, PGS (năm 1989), học hàm GS, PGS (năm 1995) và chức danh GS, PGS (từ năm 2001 đến nay). Từ năm 2008, việc bổ nhiệm (chứ không phải công nhận) chức danh GS, PGS lại được sửa đổi, chia thành hai bước: Hội đồng chỉ xét công nhận đạt tiêu chuẩn chức danh GS, PGS. Việc bổ nhiệm chức danh GS, PGS là của cơ sở giáo dục đào tạo. Trong

(1)Viện Toán học, Viện HLKHCN Việt Nam. Email: lthoa@math.ac.vn

giai đoạn đầu trung chuyển, từ năm 2008 – 2011, Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo ra quyết định bổ nhiệm; còn từ 2012, thủ trưởng các cơ sở giáo dục đại học ra quyết định bổ nhiệm. Tất cả các thông tin này có thể xem trong [6]. Việc chia thành hai bước không phải là hình thức. Trên thực tế, đã có một vài trường hợp được công nhận đạt tiêu chuẩn, nhưng không được cơ sở đào tạo nơi mình công tác bổ nhiệm. Chính vì vậy, năm được bổ nhiệm và năm được công nhận đạt tiêu chuẩn chức danh có thể khác nhau. Trong bài này, từ năm 2008, thống kê chỉ dựa vào năm được công nhận đạt tiêu chuẩn (mặc dù vẫn viết là công nhận chức danh).

Cho đến nay đã có tổng cộng 21 đợt công nhận chức danh GS, PGS (không kể các đợt bổ sung). Các năm 1980, 1984, 1991, 1992, 1996 được xét không thường xuyên. Từ năm 2002, công tác này được tiến hành thường xuyên, chỉ trừ có hai lần gián đoạn (các năm 2008, 2018) để thay đổi qui chế. Việc tiến hành thường xuyên xét công nhận chức danh khoa học là một bước tiến lớn trong công tác xây dựng đội ngũ cán bộ giảng dạy trình độ cao, khích lệ đội ngũ giảng viên, đồng thời tạo tiền đề để có chế độ đãi ngộ thích hợp. Độc giả có thể tham khảo thêm sách của tác giả Trần Văn Nhung [5, tr. 390 – 442], để biết thêm chi tiết một số thông tin.

Về tiêu chuẩn chuyên môn: các đợt công nhận năm 1980, 1984 không có qui định chặt chẽ về số lượng công bố. Trong các năm 1991, 1992, 1996 và đợt 1 năm 2002 (xét cho năm 1997), tiêu chuẩn được xét trên đầu công trình. Từ năm 2002 (đợt 2002), khái niệm điểm công trình được đưa vào, còn cách tính và định mức thì được thay đổi theo từng giai đoạn, với tinh thần ngày càng được nâng cao (đặc biệt chú trọng chất lượng) và từng bước tiếp cận với các tiêu chuẩn của các nước tiên tiến.

Về thủ tục, cho đến năm 1991 - 1992, ứng viên xuất sắc có thể đăng ký xét thẳng chức danh giáo sư mà không cần có chức danh phó giáo sư; nhưng từ năm 1996, ứng viên muốn đăng ký xét công nhận chức danh giáo sư phải có chức danh phó giáo sư. Chỉ trừ trường hợp đặc biệt, ứng viên xuất sắc đang (hoặc đã) công tác ở nước ngoài, nhưng vẫn phải có chức danh giáo sư ở đó!

Dù là trong văn bản hay thực tế, thì cho đến nay giáo sư, phó giáo sư ở Việt Nam vẫn chỉ là chức danh chứ không phải vị trí việc làm. Vì vậy không có chỉ tiêu cho số giáo sư hay phó giáo sư ở một cơ sở đào tạo. Đi kèm theo đó là chế độ đãi ngộ. Cho đến năm 1996, không có bất cứ ràng buộc nào về việc xếp ngạch lương với việc công nhận chức danh. Sau đợt năm 1996, dần dần có những văn bản cho phép xếp ngạch lương tương ứng, nhưng chủ yếu chỉ cho giảng viên ở các trường đại học. Nghị định 141/2013/NĐ-CP kí ngày 24/10/2013 "Qui định chi tiết và hướng dẫn thi hành một số điều của Luật Giáo dục", cho phép xếp lương của giáo sư vào ngạch tương đương chuyên gia cao cấp, còn của phó giáo sư vào giảng viên cao cấp. Tuy nhiên trên thực tế, cho đến nay ngạch lương của giáo sư cũng giống phó giáo sư, chỉ khác là có thể được nâng thêm một bậc sau khi được bổ nhiệm.

2. Giáo sư ngành Toán

Với sự phát triển khoa học trên thế giới nói chung, và nội tại tại Việt Nam nói riêng, ngoài những điểm chung nêu trên thì ngành Toán cũng có đặc thù riêng. Trước hết, trong Đợt 1 (năm 1980), các ngành Toán học, Cơ học, Tin học cũng như Phương pháp giảng dạy Toán học được xếp trong Liên ngành Toán học, Máy tính, Điều khiển học và Cơ học lý thuyết (đối với giáo sư) và Liên ngành Toán học, Máy tính và Điều khiển (đối với phó giáo sư)! Toán kinh tế lại được xếp trong Liên ngành Khoa học Kinh tế. Trong Đợt 2, các ngành trên được xếp trong Liên ngành Toán học, Điều khiển học và Cơ học lý thuyết (đối với giáo sư) và Liên ngành Toán học, Máy tính, Điều khiển học và Cơ học lý thuyết (đối với phó giáo sư); mặc dù đã có Liên ngành Triết, Tâm lý, Giáo dục, Thể dục thể thao, xem [3]. Từ năm 1991, Phương pháp giảng dạy Toán học được xét trong Hội đồng Giáo dục học, và Cơ học cũng tách thành hội đồng riêng; chỉ còn Hội đồng Toán - Tin. Bắt đầu từ năm 1996, Tin học lại tách khỏi Toán học thành một hội đồng riêng. Như vậy, hội đồng ngành Toán được xét độc lập từ năm 1996.

Từ trước tới nay, tổng cộng đã có 91 người được công nhận giáo sư về Toán, trong đó có 4 giáo sư được công nhận đặc cách. Đó là các giáo sư Tạ Quang Bửu, Lê Văn Thiêm (trước 1980), Ngô Bảo Châu (năm 2005), và Vũ Hà Văn (năm 2009). GS. Tạ Quang Bửu và GS. Lê Văn Thiêm là những người xây dựng nên nền khoa học Việt Nam nói chung (chứ không riêng gì ngành Toán), năm phong không được biết chính xác, còn cơ quan công tác lúc đó thay đổi rất nhanh. GS. Ngô Bảo Châu và GS. Vũ Hà Văn là những nhà toán học xuất sắc, làm việc ở nước ngoài, được công nhận như một hình thức tôn vinh. Để sự phân tích chính xác hơn, trong các thống kê và nhận xét dưới đây sẽ không bao gồm 4 giáo sư được công nhận đặc cách.

Trong các đợt đầu tiên, nhiều giảng viên dạy đại học góp công lớn trong việc đào tạo hàng ngàn sinh viên về Toán đã được công nhận chức danh giáo sư. Đương nhiên, trong số đó, có những giáo sư vừa đào tạo nhiều lại vừa nghiên cứu xuất sắc, như các giáo sư Hoàng Tụy, Đặng Đình Áng, Phan Đình Diệu, Hoàng Hữu Đường. Ngay từ những đợt đó, một số nhà toán học còn tương đối trẻ, nhưng có những công bố xuất sắc cũng được công nhận như các giáo sư Nguyễn Hữu Anh (39 tuổi), Phạm Hữu Sách (44 tuổi). Càng về sau thì trọng số về công bố quốc tế càng được nhấn mạnh. Theo quan sát của tác giả qua các đợt xét công nhận, cũng như trải nghiệm của bản thân qua các lần tham gia hội đồng, thì các ứng viên ngành Toán, đặc biệt là ứng viên trẻ (ít tuổi), phải có số (điểm) công trình vượt xa định mức tối thiểu, thường gấp 2-3 lần trở lên, mới hy vọng đạt đủ số phiếu tín nhiệm. Nhìn chung, các hội đồng ngành Toán luôn xét một cách nghiêm túc, đôi khi còn tương đối khắt khe, tạo cảm giác gây thiệt thòi cho người trong ngành. Tuy còn nhiều ý kiến về điểm này, nhưng có thể nói, nhờ sự khắt khe như vậy mà đội ngũ giáo sư Toán đã thực sự đóng vai trò then chốt trong việc xây dựng ngành Toán học Việt Nam có được thành công và bản sắc như hiện nay.

Trong 87 giáo sư, ngoài 6 giáo sư được công nhận tại Đợt 1 đương nhiên không qua phó giáo sư, thì chỉ có 9 giáo sư được phong thẳng. Đó là các giáo sư: Nguyễn Hữu Anh, Nguyễn Xuân Lộc, Nguyễn Đình Ngọc (năm 1984), Đinh Dũng, Nguyễn Văn Khuê, Đào Trọng Thi, Trần Đức Vân (1991), Trần Văn Nhung, Nguyễn Văn Thu (1992). Mới chỉ có 2 nữ giáo sư được công nhận là GS. Hoàng Xuân Sính (47 tuổi, năm 1980) và GS. Lê Thị Thanh Nhàn (45 tuổi, năm 2015).

Phân bố. Tính theo cơ quan công tác tại thời điểm được công nhận, có tất cả 15 cơ quan có giáo sư được công nhận (xem Bảng 1). Trong số đó, Viện Toán học chiếm tỷ lệ cao nhất là 30 giáo sư. Những năm gần đây, số giáo sư được công nhận tại các trường đại học càng ngày càng nhiều.

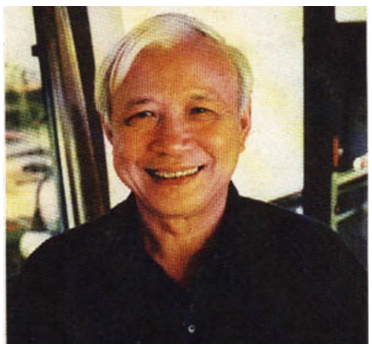
Tên cơ quan công tác	Số lượng
Viện Toán học	30
ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội	18
ĐH Sư phạm Hà Nội	12
ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Tp. HCM	6
ĐH Quốc tế, ĐHQG Tp. HCM	2
Viện Công nghệ Thông tin - Viện HLKHCNVN	5
ĐH Bách Khoa Hà Nội	3
ĐH Vinh	3
Học viện Kỹ thuật Quân sự	2
Bộ Công An, ĐH Mỏ - Địa chất, Cục Khoa học, Công nghệ và Môi trường - Bộ QP, ĐH Sư phạm Huế, ĐH Thăng Long, ĐH Tôn Đức Thắng	6 (mỗi cơ quan 1)

BẢNG 1. Phân bố theo cơ quan.

Thời gian	1980-89	1990-99	2000-09	2010-19	Tổng
Ngành Toán	14	31	26	16	87+4 đặc cách
Tất cả các ngành	222	595	409	537	1763+29 đặc cách trước 1980

BẢNG 2. Số giáo sư ngành Toán (so với các ngành khác).

Tính theo từng giai đoạn 10 năm, ta có con số trong Bảng 2. Thống kê ở Bảng 2 cho thấy số người được công nhận chức danh giáo sư ngành Toán có chiều hướng giảm. Có một số lí do giải thích cho hiện tượng này. Thứ nhất, tiêu chuẩn để được công nhận chức danh, đặc biệt là đòi hỏi số (điểm) công trình nghiên cứu, ngày một nâng cao. Nhưng lí do này không hoàn toàn thuyết phục, nếu như nhìn vào số giáo sư của tất cả các ngành; trong khi ngành Toán vẫn được xem là có số công bố quốc tế cao. Ngay với lí do này, thì hội đồng ngành Toán thường khá khắt khe khi xét công nhận chức danh giáo sư. Như trên đã nói, các hội đồng ngành Toán không chỉ dựa vào định mức tối thiểu, mà thường yêu cầu cao hơn nhiều, đồng thời đi sâu vào xem xét chất lượng công trình. Vì vậy có những người số điểm công trình rất cao, nhưng khi xét vẫn không đủ phiếu. Lí do tiếp theo là đòi hỏi về thời gian đào tạo, hướng dẫn nghiên cứu sinh và đặc biệt là tiêu chuẩn viết sách – mà một số người rất giỏi nhưng dứt khoát không chịu thu xếp để đáp ứng các tiêu chuẩn, với mục đích chỉ để đăng kí xét chức danh. Nhưng lí do quan trọng nhất là sau năm 1986, với những biến động khác nhau trong xã hội và trên thế giới, đã có một thời gian dài có sự thiếu hụt khá trầm trọng đội ngũ cán bộ giảng dạy, nghiên cứu về Toán; tạo nên một khoảng trống khá nghiêm trọng. Rất may trong thời gian 10 năm trở lại đây, với sự ra đời và hỗ trợ đáng kể của Quỹ NAFOSTED, với sự tài trợ của Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển Toán học giai đoạn 2010 – 2020 – mà trọng tâm là sự ra đời và hoạt động của Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán, tình hình đã được cải thiện đáng kể. Tuy nhiên, phải có thêm thời gian để đội ngũ cán bộ trẻ phát triển tiếp, tích lũy đủ thành tích để đáp ứng đủ các tiêu chuẩn của chức danh giáo sư.



GS. Đặng Đình Áng, người có công lớn với toán học miền Nam. Ảnh: Wikipedia tiếng Việt.

Độ tuổi khi được công nhận. Về tuổi khi được công nhận, tuổi bình quân của 87 giáo sư Toán (chính qui) là 51,7. Người trẻ nhất là GS. Phạm Hoàng Hiệp (35 tuổi, năm 2017), có lẽ là giáo sư trẻ nhất ở trong nước trong 40 năm qua? Tiếp theo là GS. Nguyễn Quang Diệu (37 tuổi, năm 2011), GS. Ngô Việt Trung (38 tuổi, năm 1991) và GS. Sĩ Đức Quang (38 tuổi, năm 2019). Người cao tuổi nhất là GS. Đỗ Văn Lưu (75 tuổi, năm 2019). Bảng 3 thống kê số lượng giáo sư được xét theo các độ tuổi khi được công nhận.

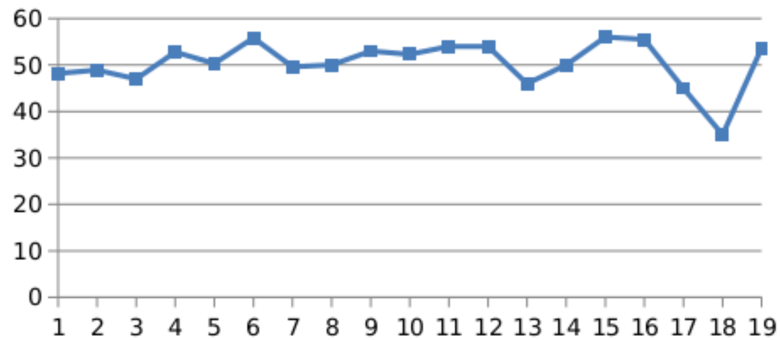
Từ trên: GS. Nguyễn Quang Diệu và GS. Phạm Hoàng Hiệp. Ảnh: vietnam.vnanet.vn và cand.com.vn

Độ tuổi	35-40	41-45	46-50	51-55	56-60	61-65	Từ 66
Số lượng	10	13	18	22	12	10	2

BẢNG 3. Phân bố theo độ tuổi.

Hình 4 cho ta thấy sự biến thiên của độ tuổi trung bình trong 20 năm xét công nhận (năm 2002 có 2 đợt; nhưng có 2 năm (2005 và 2016) không có người nào trong nước được công nhận). Qua sơ đồ này có thể thấy tuổi trung bình của các giáo sư qua các đợt xét công nhận không khác xa nhau là mấy so với tuổi bình quân tổng thể (51,7). Một vài điểm bất thường (chẳng hạn năm 2017) là do năm đó chỉ có một người được công nhận. Như vậy có thể thấy, tuổi trung bình của giáo sư ngành Toán vẫn còn khá cao; dù rằng tương đối thấp so với đội ngũ giáo sư trong cả nước.

Hiện nay. Rất tiếc trong 89 giáo sư làm việc trong nước, có 13 người đã mất (tuyệt đại đa số do tuổi cao, sức yếu).



HÌNH 4. Tuổi bình quân qua các đợt xét công nhận

Có 41 giáo sư hoặc đã trên 70 tuổi, hoặc trên 60 tuổi và đã về hưu, không còn làm nơi nào cả. Như vậy, chỉ còn 35 giáo sư chưa quá 70 tuổi và còn làm việc (kể cả ngoài công lập). Tuổi bình quân của các giáo sư này là 61 tuổi, và chỉ có 11 giáo sư dưới 60 tuổi. Đây là một con số quá ít cho một nền đại học và một ngành nghiên cứu cơ bản như Toán học trong thời đại cách mạng 4.0.

Chúng ta đều biết, hiện nay sau 60 tuổi, nếu giáo sư còn sức khỏe và có nguyện vọng thì vẫn tiếp tục được giữ biên chế (nếu làm trong cơ quan nhà nước) cho đến khi tròn 70 tuổi. Sau 70 tuổi, mỗi giáo sư tùy theo sức khỏe và sở thích, sẽ chọn cho mình một hoạt động thích hợp. Bàn về việc có nên và có tiếp tục nghiên cứu toán học của những người đã hoàn thành sứ mạng của mình theo tôi là không hợp lí. Vì vậy, một vài nhận xét dưới đây về tình hình nghiên cứu hiện nay chỉ nhằm vào đội ngũ ít ỏi là 35 giáo sư vừa nêu ở trên.

Số lượng tuy không nói lên tất cả, nhưng phần nào phản ánh khả năng làm việc của các giáo sư. Theo MathSciNet, nếu tính tổng số bài quốc tế đã đăng trong toàn bộ sự nghiệp cho đến thời điểm này, thì trong 35 giáo sư, người có nhiều công trình nhất là 142 bài, còn người ít nhất là 25 bài. Tính bình quân, mỗi giáo sư công bố 63.6 bài. Chú ý rằng tuyệt đại đa số bài được liệt kê là các công bố quốc tế, và ước tính hơn 2/3 số bài được đăng ở tạp chí ISI.

Một vấn đề được dư luận quan tâm tiếp theo là việc nghiên cứu sau khi được công nhận. Ở Việt Nam, có một e ngại là sau khi được công nhận chức danh giáo sư thì nhiều người sẽ thôi làm nghiên cứu. Rất đáng mừng là tất cả 35 giáo sư này vẫn hăng say nghiên cứu. Chỉ có điều rất khó làm thống kê, vì nếu tính số lượng tuyệt đối, thì thông thường những người được công nhận đã lâu sẽ có số lượng cao hơn. Ngược lại, nếu tính tỷ số công trình trên số năm được công nhận, thì ở những người mới được công nhận, thông thường con số sẽ lớn hơn (do lúc mới được công nhận còn trẻ và còn đang sung sức). Theo MathSciNet, người có tỷ số thấp nhất là 0.85 bài/năm (GS này đã được công nhận 13 năm), còn người có tỷ số cao nhất là 9 bài/năm (GS này mới được công nhận 1 năm), người có tỷ số cao thứ nhì là 5.61 bài/năm. Điều đó có nghĩa là sau khi được công nhận, mỗi giáo sư bình quân mỗi năm công bố ít nhất gần 1 công trình. Nếu tính trung bình toàn thể 35 giáo sư, thì con số là 2.2 bài/1 năm/1 giáo sư (bằng tổng số bài chia cho tổng số năm

– cả 2 thông số đều tính từ khi công nhận giáo sư - của tất cả 35 người). Đây là một con số khá cao, chứng tỏ đam mê nghiên cứu và năng lực sáng tạo của các giáo sư sau khi được công nhận vẫn được phát huy, thậm chí trong nhiều trường hợp còn hiệu quả hơn so với trước lúc được công nhận.

Các chuyên ngành có nhiều giáo sư được công nhận gồm có: Lý thuyết Tối ưu, Giải tích phức, Phương trình Đạo hàm riêng, Phương trình vi phân và Hệ động lực, Lý thuyết Xác suất và Thống kê Toán học, và Đại số giao hoán.

3. Thay cho lời kết

Với một đội ngũ giáo sư hiện nay còn ít ỏi như trên đã nêu, có thể nghĩ tới một bức tranh ảm đạm trong việc duy trì, chứ chưa nói đến phát triển ngành Toán học trong tương lai. Vì vậy, việc phát triển đội ngũ, đặc biệt là đội ngũ giáo sư Toán luôn là bài toán thời sự. Theo ước tính của chúng tôi, có khoảng 300 - 350 người là phó giáo sư, nhưng chưa là giáo sư. Trong số đó, không đến 100 người có tuổi ít hơn 60. Rất may, một số không nhỏ trong số đó còn tương đối trẻ và có thành tích nghiên cứu tốt. Hy vọng trong thời gian sắp tới họ sẽ tiếp tục phát huy được khả năng của mình để nhanh chóng được công nhận chức danh giáo sư và gánh vác trách nhiệm phát triển nền Toán học Việt Nam của các thầy, cô, các lớp đàn anh để lại.

Khi nói về phát triển của một ngành khoa học, hay một đội ngũ cán bộ khoa học mà chỉ thuần túy nói về số lượng thì rất lệch lạc. Chỉ riêng nói về nghiên cứu, thì không phải cứ số lượng công bố cao hơn là giỏi hơn. Nhưng cũng không thể nói người có công bố ít lại rất xuất sắc. Đã nói về chất lượng nghiên cứu và ảnh hưởng của ai đó, thì cần đi sâu phân tích, đánh giá các công bố của người đó. Ngay nói về chuyên môn, đóng góp của một cá nhân cũng không chỉ gói gọn trong những công bố khoa học, mà một việc rất có ý nghĩa là xây dựng hướng nghiên cứu và nhóm nghiên cứu. Đôi khi, đây lại là phần đóng góp để đời nhất của một giáo sư đối với hậu duệ của một ngành.

Hơn nữa, việc đóng góp của đội ngũ giáo sư không chỉ bó hẹp trong mỗi phạm vi nghiên cứu. Không có những người tiên phong xây dựng và tạo tiền đề như GS. Tạ Quang Bửu và GS. Lê Văn Thiêm, thì không thể có nền Toán học hiện nay. Không có những giáo sư đứng đầu dẫn dắt lớp lớp các thầy, cô giáo đào tạo học trò các cấp khác nhau hơn một nửa thế kỉ qua, thì cũng không thể có nền Toán học hiện nay. Không có những người hi sinh sở thích nghiên cứu để làm công tác tổ chức, thì cũng khó có nền Toán học hiện nay. Việc ghi nhận đó cần có sự đánh giá, đóng góp ý kiến của nhiều người, nhất là những bậc cao niên, mới hy vọng vẽ nên một bức tranh tương đối tổng thể. Một cá nhân như tôi, trong điều kiện tìm kiếm tư liệu vô cùng khó khăn, bài viết này chỉ là một đóng góp nhỏ.

Tái bút. Để viết những bài như thế này, cần có tư liệu xác thực. Vấn đề lưu trữ và tìm kiếm tài liệu luôn là vấn đề nan giải ở nước ta. Bài viết này không thể thực hiện được, nếu không có các tài liệu [1, 2, 3, 7]. Có thể tìm được nội dung chính xác của các quyết định [2, 3] trên mạng internet, vì đó là những quyết định của Nhà nước.

Năm phong	Tổng số	Danh sách	Ghi chú
1956 (?) (trước 1980)	2	Tạ Quang Bửu$^+$, Lê Văn Thiêm$^+$	Đặc cách. $^+$: đã mất
1980	6	Đặng Đình Áng (ĐHTH Tp HCM); Phan Đình Diệu$^+$ (Viện Tính Toán và Điều Khiển), Hoàng Xuân Sính (ĐHSP HN), Nguyễn Cảnh Toàn$^+$ (ĐHSP HN), Hoàng Tụy$^+$ (Viện Toán học), Nguyễn Ngọc Trân (ĐHTH Tp HCM)	Đợt 1; do Chủ tịch Hội đồng bộ trưởng (Thủ tướng) kí QĐ. Cơ quan là nơi công tác khi được công nhận.
1984	8	Nguyễn Hữu Anh (ĐHTH Tp HCM), Hoàng Hữu Đường$^+$ (ĐHTH HN), Ngô Thúc Lanh$^+$ (ĐHSP HN), Nguyễn Xuân Lộc (Viện Tính Toán và Điều Khiển), Nguyễn Đình Ngọc$^+$ (Bộ Công An), Đoàn Quỳnh (ĐHSP HN), Phạm Hữu Sách (Viện Toán học), Nguyễn Đình Trí (ĐHBK HN)	Đợt 2; do Chủ tịch Hội đồng bộ trưởng (Thủ tướng) kí QĐ.
1991	12	Đinh Dũng (Viện CNTT), Tạ Văn Đĩnh (ĐHBK HN), Nguyễn Thừa Hợp (ĐHTH HN), Đinh Văn Huỳnh (Viện Toán học), Hà Huy Khoái (Viện Toán học), Nguyễn Văn Khuê (ĐHSP HN), Lê Ngọc Lăng (ĐH Mỏ - Địa chất), Ngô Văn Lược (Viện Toán học), Đào Trọng Thi (ĐHTH HN), Nguyễn Duy Tiến (ĐHTH HN), Ngô Việt Trung (Viện Toán học), Trần Đức Vân$^+$ (Viện Toán học)	Bắt đầu từ năm này, Chủ tịch HĐ (với các tên khác nhau: Xét duyệt học vị và chức danh khoa học; Học hàm; CDGSNN; GSNN) kí QĐ.
1992	10	Nguyễn Cang (ĐHTH Tp HCM), Nguyễn Minh Chương (Viện Toán học), Phan Quốc Khánh (Học viện KTQS), Nguyễn Lãm (Cục KH-CN và MT, Bộ QP), Trần Văn Nhung (ĐHTH HN), Hoàng Hữu Như$^+$ (ĐHTH HN), Phạm Ngọc Thao (ĐHTH HN), Trần Vũ Thiệu (Viện Toán học), Nguyễn Văn Thu (Viện Toán học), Trần Mạnh Tuấn (Viện Toán học)	
1996	9	Đỗ Ngọc Diệp (Viện Toán học), Phan Văn Hạp (ĐHKHTN ĐHQG HN), Nguyễn Quý Hỷ (ĐHKHTN ĐHQG HN), Phạm Thế Long (Học viện KTQS), Nguyễn Văn Mậu (ĐHKHTN ĐHQG HN), Hoàng Xuân Phú (Viện Toán học), Nguyễn Khoa Sơn (Viện Toán học), Vũ Tuấn (ĐHSP HN), Đỗ Long Vân (Viện Toán học)	Bắt đầu từ năm này HĐ Ngành Toán xét độc lập.
2002	9	Đợt 2001: Nguyễn Văn Hữu (ĐHKHTN ĐHQG HN), Vũ Ngọc Phát (Viện Toán học), Nguyễn Quốc Thi$^+$ (ĐHSP Vinh) Đợt 2002: Phạm Kỳ Anh (ĐHKHTN ĐHQG HN), Nguyễn Hữu Công$^+$ (ĐHKHTN ĐHQG HN), Nguyễn Thế Hoàn$^+$ (ĐHKHTN ĐHQG HN), Nguyễn Hữu Việt Hưng (ĐHKHTN ĐHQG HN), Đinh Thế Lục (Viện Toán học), Lê Hùng Sơn (ĐHBK HN)	Xét làm 2 đợt. Đợt 2001 là những hồ sơ đã xét năm 1997, nhưng hoãn lại, xét tiếp ở HĐCDGSNN vào cuối năm 2001, và QĐ được ban hành vào đầu 2002. Đợt 2002 là xét mới.
2003	5	Hà Huy Bảng (Viện Toán học), Nguyễn Tự Cường (Viện Toán học), Đỗ Công Khanh (Trường ĐH Tôn Đức Thắng), Lê Dũng Mưu (Viện Toán học), Đỗ Đức Thái (ĐHSP HN)	

BẢNG 5. Danh sách tất cả các giáo sư Toán được công nhận đến năm 2019 (Phần đầu)

2004	2	Lê Mậu Hải (ĐHSP HN), Lê Tuấn Hoa (Viện Toán học)	
2005	1	Ngô Bảo Châu (ĐH Paris 11)	GS Ngô Bảo Châu được công nhận theo diện đặc cách, sau khi đạt Giải thưởng Clay
2006	2	Nguyễn Hữu Dư (ĐHKHTN ĐHQG HN), Ngô Đắc Tân (Viện Toán học)	
2007	6	Nguyễn Đình Công (Viện Toán học), Dương Minh Đức (ĐHKHTN ĐHQG Tp HCM), Nguyễn Xuân Tấn (Viện Toán học), Đặng Hùng Thắng (ĐHKHTN ĐHQG HN), Lê Văn Thuyết (ĐHSP – ĐH Huế), Nguyễn Đông Yên (Viện Toán học)	
2009	3	Nguyễn Bường (Viện CNTT), Đinh Nho Hào (Viện Toán học), Vũ Hà Văn (ĐH California - San Diego)	Từ năm này, HĐ chỉ công nhận đạt tiêu chuẩn chức danh GS/PGS, còn bổ nhiệm thực hiện sau. Thời gian đầu do Bộ, từ năm 2012 do các cơ sở đào tạo bổ nhiệm. GS Vũ Hà Văn được xét theo diện đặc cách
2010	1	Nguyễn Quốc Thắng (Viện Toán học)	
2011	3	Nguyễn Quang Diệu (ĐHSP HN), Nguyễn Mạnh Hùng (ĐHSP HN), Đặng Đức Trọng (ĐHKHTN ĐHQG Tp HCM)	
2012	2	Đặng Quang Á (Viện CNTT), Phùng Hồ Hải (Viện Toán học)	
2013	1	Nguyễn Văn Quảng (ĐH Vinh)	
2014	2	Bùi Xuân Hải (ĐHKHTN ĐHQG Tp HCM), Nguyễn Minh Trí (Viện Toán học)	
2015	1	Lê Thị Thanh Nhàn (ĐH KH – ĐH Thái Nguyên)	
2017	1	Phạm Hoàng Hiệp (Viện Toán học)	
2019	5	Cung Thế Anh (ĐHSP HN), Nguyễn Định (ĐHQT ĐHQG Tp HCM), Đỗ Văn Lưu (ĐH Thăng Long), Phạm Hữu Anh Ngọc (ĐHQT ĐHQG Tp HCM), Sĩ Đức Quang (ĐHSP HN)	
Tổng	**91**		

BẢNG 5. Danh sách tất cả các giáo sư Toán được công nhận đến năm 2019 (Phần còn lại)

Một số thông tin liên quan về số lượng giáo sư, phó giáo từ năm 2004 trở lại đây của tất cả các ngành (tại Bảng 2) được truy tìm trên Internet, nhưng không tìm được quyết định gốc – vì cơ quan ban hành là các hội đồng, không phải đơn vị hành chính. Trong bối cảnh đó Thông tin Toán học [7] là một nguồn tư liệu quý giá. Hy vọng rằng các ban biên tập của bản tin nội bộ này tích cực thu nhập các dữ liệu – càng nhiều càng tốt – để ghi nhớ, tạo điều kiện cho công việc tra cứu sau này.

TÀI LIỆU

[1] *Giáo sư Việt Nam*, NXB Khoa học xã hội, Hà Nội 2004.

[2] *Quyết định 131-CP công nhận chức vụ khoa học (đợt I) kí ngày 29/4/1980*, Thư viện pháp luật, https://thuvienphapluat.vn/

[3] *Quyết định 81-HĐBT công nhận chức vụ khoa học (đợt II) kí ngày 28/5/1984*, Thư viện pháp luật, https://thuvienphapluat.vn/

[4] Nguyễn Văn Đạo (chủ biên), *Giáo sư Lê Văn Thiêm*, NXB ĐH Quốc gia Hà Nội, năm 2003.

[5] Trần Văn Nhung, *"Sộp" thành nhà giáo*, NXB Giáo dục 2016.

[6] Đỗ Đức Tín, *Nhìn lại nội dung hệ thống các văn bản quy định về việc xét công nhận chức*

danh Giáo sư, Phó giáo sư ở Việt Nam từ năm 1976 đến nay, http://hdgsnn.gov.vn/tin-tuc/qua-trinh-phat-trien_416.

[7] Thông tin Toán học, Tập 4 Số 4 (2002), T7S3 (2003), T8S4 (2004), T9S4 (2005), T10S4 (2006), T11S4 (2007), T13S4 (2009), T14S4 (2010), T15S4 (2011), T16S4 (2012), T17S4 (2013), T18S4 (2014), T19S4 (2015), T23S4 (2019).

[8] Wikipedia tiếng Việt, https://vi.wikipedia.org/wiki/Giáo_sư(Việt_Nam) (truy cập 26/02/2020).

Diễn đàn Heidelberg: Ươm mầm các tài năng toán học trẻ

Phạm Trà Ân[1]

Trong mọi lĩnh vực của khoa học, công nghệ, và trong hầu khắp các mặt của đời sống hàng ngày, chúng ta đều cần đến các phương pháp toán học và các công cụ tính toán để giải quyết vấn đề đặt ra. Vì vậy toán học và khoa học máy tính được xem như là nền tảng không thể thiếu được của thế giới tương lai. Đã từ lâu, huy chương Fields và giải Abel được ghi nhận là những đỉnh khoa học cao nhất đối với ngành toán, cũng như giải Turing được mệnh danh là "giải Nobel" của ngành khoa học máy tính. Nhưng có một thực tế đáng buồn là hiện nay số người theo đuổi các ngành này ở các nước trên thế giới ngày càng thưa dần đi.

Trước tình hình như vậy, Viện Nghiên cứu Lý thuyết Heidelberg (HITS), trực thuộc Quỹ Klaus Tschira ở Đức[2], đã có sáng kiến thành lập một diễn đàn toán học dưới dạng một hội nghị thường niên, mà thành phần gồm các nhà khoa học đã đạt được các giải thưởng cao quý nhất của ngành toán và khoa học máy tính, và các nhà toán học trẻ có hoài bão, muốn vươn tới các đỉnh cao khoa học. Diễn đàn sẽ là một cơ hội để các thế hệ khoa học gặp gỡ, thảo luận, tìm kiếm những ý tưởng chung, tìm hiểu những tư tưởng mới, trào lưu mới xuất hiện trong toán học và khoa học máy tính đương đại. Qua đó, các nhà khoa học thuộc các thế hệ đi trước có thể truyền nhiệt tình khoa học, cảm hứng sáng tạo, và tiếp thêm động lực cho các nhà khoa học trẻ, mới bước vào nghề, để họ có thể vượt qua được các khó khăn, trở ngại, tiếp bước trên con đường khoa học đầy vinh quang nhưng cũng không dễ dàng.

Đề nghị trên đã được sự hưởng ứng và ủng hộ nhiệt tình của các cơ quan chủ quản, gồm Viện Hàn lâm Khoa học Na Uy và Nhân văn (chủ quản của giải Abel), Liên đoàn Toán học Thế giới (IMU, chủ quản huy chương Fields), và Hiệp hội Máy tính (Association for Computing Machinary, viết tắt là ACM, chủ quản giải Turing). Kết quả là một thỏa thuận hợp tác về một diễn đàn toán học như thế, đã được ký kết vào ngày 22 tháng Năm năm 2012 tại Oslo, nhân dịp đại diện của các tổ chức trên tới Oslo dự Lễ kỷ niệm "10 năm giải Abel". Đó là ngày khai sinh "Diễn đàn Heidelberg". Gần đây, những người đoạt giải Nevanlinna (do IMU trao) và giải Tính toán của Hiệp hội

[1] Viện Toán học, Viện HLKHCN Việt Nam. Email: ptan@math.ac.vn

[2] Một quỹ tư nhân, phi lợi nhuận, với mục đích phát triển các ngành khoa học tự nhiên, toán và khoa học máy tính.

Máy tính (ACM Prize in Computing) cũng được mời tham dự Diễn đàn.

Cấu trúc của Diễn đàn Heidelberg

Diễn đàn là một loạt các sự kiện khoa học tổng hợp về toán học và khoa học máy tính ở trình độ cao, diễn ra trong vòng một tuần lễ tại Heidelberg. Diễn đàn có ba dạng nội dung chính. Thứ nhất là báo cáo mời của các nhà khoa học đã được các giải thưởng danh giá. Thứ hai là thảo luận bàn tròn tại các nhóm (dưới dạng workshop) giữa các nhà khoa học được giải với các nhà khoa học trẻ, xen kẽ với các hoạt động văn hóa: thăm quan, du lịch, giao lưu với các trường học, các cơ sở toán học địa phương. Thứ ba, một chủ đề thời sự (hot topic) của toán học và khoa học máy tính, cũng sẽ được trình bày trong một báo cáo phổ biến khoa học cho quần chúng rộng rãi.

Mỗi kỳ sinh hoạt, ban tổ chức Diễn đàn mời 50 nhà khoa học đã được giải và 200 nhà khoa học trẻ tuổi, có nhiều triển vọng cùng tham dự. Một ban cố vấn khoa học, gồm một số nhà khoa học có uy tín, được chỉ định với nhiệm vụ đề xuất chủ đề cho cuộc gặp gỡ hàng năm, và xét duyệt danh sách đại biểu tham dự.

Hàng năm vào tháng 11, căn cứ vào tình hình hoạt động khoa học của các seminar, hội thảo, và hội nghị toán học khác nhau trên toàn thế giới, ban tổ chức lên danh sách những người dự kiến mời. Tháng 3 năm tiếp theo, các hồ sơ tham dự gửi về ban tổ chức Diễn đàn được Viện Nghiên cứu Lý thuyết Heidelberg xử lý sơ bộ. Qua đó sẽ chọn ra 50 nhà khoa học được giải và 200 hồ sơ các nhà khoa học trẻ phù hợp nhất với tiêu chí của diễn đàn. Danh sách được ban cố vấn khoa học duyệt lại lần cuối trước khi công bố và gửi giấy mời chính thức. Chỉ có giấy mời chính thức do ban tổ chức phát ra mới là hợp lệ, mọi bản sao đều không được chấp nhận.

Lễ ký kết thành lập Diễn đàn Heidelberg. Ở hàng đầu bên phải là TS. Klaus Tschira (người sáng lập Quỹ Klaus Tschira). Người phụ nữ ở hàng sau là GS. Ingrid Daubechies, Chủ tịch IMU nhiệm kỳ 2011-2014. Ảnh: Eirik Furu Baardsen.

Hồ sơ đăng ký tham dự với các nhà khoa học trẻ được phân thành ba loại, dựa theo các chặng đầu tiên trong sự nghiệp làm toán:

- Đối với những người mới tốt nghiệp đại học, hồ sơ gồm: lý lịch khoa học; bằng đại học; giấy chứng nhận các giải thưởng (nếu có); một đến ba thư giới thiệu; bản tường trình nguyện vọng tham dự Diễn đàn.
- Với những người đã có bằng tiến sĩ, hồ sơ cần bổ sung bản tóm tắt luận án, và các ấn phẩm, các bài báo (nếu có).
- Với ứng viên hậu tiến sĩ, hồ sơ cần thêm phần tóm tắt luận án hoặc đề tài đang làm; các công trình, bài báo đã công bố. Ngoài ra, cần chuẩn bị đề cương một báo cáo 60 phút về một vấn đề bạn đang quan tâm và sẽ trình bày tại một hội thảo sẽ có trong chương trình.

Nguồn gốc

Diễn đàn Heidelberg được xây dựng phỏng theo mô hình các "Cuộc hội ngộ thường niên Lindau" (Lindau Nobel Laureate Meeting) do Ban giải thưởng Nobel tổ chức, trong đó đại biểu tham gia là những người được giải Nobel và những nhà vật lý, hóa học, dược học, và kinh tế gia trẻ tuổi, xuất sắc. Các "Cuộc hội ngộ thường niên Lindau" đã được tiến hành từ gần 70 năm qua (từ 1951), để tìm kiếm ứng cử viên, tạo nguồn cho những giải Nobel trong tương lai.

Vì một nguyên nhân còn chưa rõ ràng, không có giải Nobel trao cho toán học, do đó các nhà toán học cũng không góp mặt trong các "Cuộc hội ngộ thường niên Lindau". Tuy vậy, thay vào đó giờ đây chúng ta đã có "Diễn đàn Heidelberg" cho toán học và khoa học máy tính.

VÀI NÉT VỀ CÁC DIỄN ĐÀN HEIDELERG ĐÃ QUA

Diễn đàn Heidelberg (Heidelberg Laureate Forum, viết tắt trong giao dịch quốc tế là HLF) được tổ chức ở thành phố Heidelberg (CHLB Đức), nơi đặt trụ sở của Quỹ Klaus Tschira. Diễn đàn đã tiến hành được bảy năm từ 2013 đến 2019, và đang chuẩn bị cho đợt sinh hoạt lần thứ tám năm 2020. Sau đây là điểm một vài nét cơ bản về các diễn đàn này.

- HLF 2013: Từ 22 - 27/9/2013, diễn giả gồm 38 người được giải, trong đó có các huy chương Fields/giải Abel sau: Michael F. Atiyah (Fields 1966, Abel 2004), Gerd Faltings (Fields 1986), Curtis McMullen (Fields 1998), Stephen Smale (Fields 1966), Endre Szemerédi (Abel 2012), Srinivasa Varadhan (Abel 2007), Cédric Villani (Fields 2010), Vladimir Voevodsky (Fields 2002), Efim Zelmanov (Fields 1994).
- HLF 2014: Từ 21 - 26/9/2014, 24 người được giải là diễn giả, trong đó có: Micheal F. Atiyah, Manjul Bhargava (Fields 2014), Gerd Faltings, Martin Hairer (Fields 2014), Shigefumi Mori (Fields 1990), Ngô Bảo Châu (Fields 2010), John Tate (Abel 2010), Srinivasa Varadhan, Vladimir Voevodsky, Wendelin Werner (Fields 2006), Jean-Christophe Yoccoz (Fields 1994), Efim Zelmanov.

  Hot Topic: *Vai trò của toán học và khoa học máy tính tại các nước đang phát triển và các nền kinh tế đang lên.*
- HLF 2015: Từ 23 - 28/9/2015, 26 người được giải là diễn giả, trong đó có: Micheal F. Atiyah, Shigefumi Mori, Louis Nirenberg (Abel 2015), Andrei Okounkov (Fields 2006), Endre Szemerédi, John Tate, Srinivasa Varadhan, Vladimir Voevodsky, Efim Zelmanov.

  Hot Topic: *Thế giới dữ liệu mới* (Brave new data world).
- HLF 2016: Từ 18 - 23/9/2016, 21 người được giải, trong đó có: Micheal F. Atiyah, Gerd Faltings, Heisuke Hironaka (Fields 1970), Shigefumi Mori, Ngô Bảo Châu, Endre Szemerédi, Vladimir Voevodsky, Andrew Wiles (Abel 2016).

  Hot Topic: *Trí tuệ nhân tạo*.
- HLF 2017: Từ 24 - 29 /9/2017, 24 người được giải, trong đó có: Micheal F. Atiyah, Martin Hairer, Shigefumi Mori, Stephen Smale, Efim Zelmanov.

  Hot Topic: *Tính toán lượng tử*.
- HLF 2018: Từ 23 - 28/9/2018, 32 người được giải, trong đó có: Micheal F. Atiyah, Caucher Birkar (Fields 2018), Gerd Faltings, Alessio Figalli (Fields 2018), Gregory Margulis (Fields 1978), Shigefumi Mori, Ngô Bảo Châu, Srinivasa Varadhan, Wendelin Werner, Efim Zelmanov.

  Hot Topic: *Blockchain và sổ cái phân tán: Thực có theo kịp ảo?* (Blockchain and distributed ledgers: Will the reality live up to the hype?)
- HLF 2019: Từ 22-27/9/2019, 23 người được giải, trong đó có: Caucher Birkar, Martin Hairer, Gregory Margulis, Stephen Smale, Efim Zelmanov.

Hot Topic: *Cuộc khủng hoảng về khí hậu: Sự thực và hành động*.

- HLF 2020: Dự kiến tổ chức từ 20 - 25/9/2020.

Để biết thêm thông tin chi tiết hơn về các HLF, bạn đọc có thể truy cập vào các trang mạng [1, 2, 4]. Thông tin về hồ sơ đăng ký tham dự dành cho các bạn đọc trẻ có tại trang [5]. Thông tin trong bài báo này dựa một phần trên [3].

TÀI LIỆU

[1] https://www.heidelberg-laureates-forum.org/

[2] https://www.mathunion.org/outreach/heidelberg-laureate-forum

[3] https://www.abelprize.no/nyheter/vis.html?tid=54557

[4] https://viasm.edu.vn/hoat-dong-khoa-hoc/tin-tuc/chi-tiet/dien-dan-heidelberg-cua-nhung-nguoi-duoc-giai-thuong

[5] https://application.heidelberg-laureate-forum.org/site/index.php

Hàm zeta và tích phân trên các adèle (Phần một)(1)

Ngô Bảo Châu(2)

Kể từ bài báo "Về số lượng các số nguyên tố nhỏ hơn một lượng cho trước" [3] năm 1859 của Riemann, hàm zeta $\zeta(s)$ đã trở thành niềm đam mê của nhiều nhà toán học. Tuy còn khá nhiều khía cạnh bí hiểm về hàm zeta Riemann, chúng ta hiểu khá rõ thác triển phân hình và phương trình hàm của nó. Trong luận án tiến sĩ [4], Tate đã xây dựng hàm zeta từ tích phân trên các adèle và chứng minh phương trình hàm cho hàm zeta Riemann, hàm zeta Dedekind và các L-hàm Dirichlet bằng một phương pháp tổng quát. Bài viết này sẽ cố gắng trình bày các đề tài cổ điển vừa nêu.

1. HÀM ZETA VÀ CÁC L-HÀM CỔ ĐIỂN

Chuỗi

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

hội tụ tuyệt đối với $\Re(s) > 1$ và hội tụ đều trên miền $\Re(s) > 1 + \epsilon$ với mọi $\epsilon > 0$ ($\Re(s)$ ký hiệu phần thực của số phức s). Chuỗi này định nghĩa một hàm chỉnh hình của s trên miền $\Re(s) > 1$. Trong [3], Riemann đã chứng minh rằng ζ có thể mở rộng thành một hàm phân hình của s trên toàn bộ mặt phẳng phức và thỏa mãn phương trình hàm

$$\xi(1-s) = \xi(s)$$

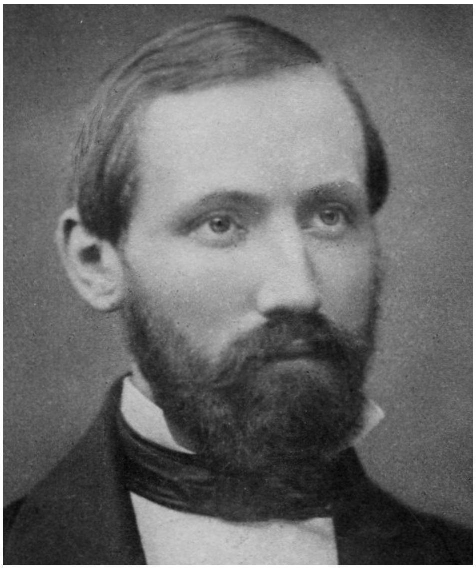
với $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. Nhắc lại rằng hàm gamma được định nghĩa bởi tích phân

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \tag{1}$$

hội tụ trên miền $\Re(s) > 0$ và bởi mở rộng giải tích trên mặt phẳng phức.

(1)Nguyên bản bằng tiếng Anh.

(2)ĐH Chicago & Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán. Email: ngo@viasm.edu.vn.



Bernhard Riemann (1826-1866). Nguồn: Lưu trữ gia đình Thomas Schilling.

Bởi vì các số nguyên có thể phân tích duy nhất thành tích của các số nguyên tố, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ có thể được biểu diễn như tích vô hạn

$$\sum_{n\geq 1} n^{-s} = \prod_p (1 + p^{-s} + p^{-2s} + \cdots) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

trên miền hội tụ tuyệt đối $\Re(s) > 1$. Trước đó Euler đã phát hiện ra công thức tích này, nhưng với ζ là hàm biến thực. Euler cũng nhận thấy rằng tính phân kì của chuỗi $\sum_{n\geq 1} n^{-s}$ tại $s = 1$ dẫn đến tính vô hạn của tập các số nguyên tố.

Là hàm biến phức, ζ chứa nhiều thông tin hơn về các số nguyên tố. Giả thuyết lừng danh của Riemann nói rằng tất cả các nghiệm *không tầm thường*(3) của ζ phải nằm trên đường thẳng $\Re(s) = 1/2$, trục đối xứng của phương trình hàm $\xi(s) = \xi(1-s)$. Năm 1896, Hadamard và de la Vallée Poussin đã chứng minh rằng $\xi(s)$ không có nghiệm trên đường thẳng $\Re(s) = 1$ và rút ra hệ quả rằng hàm biến thực $\pi(x)$ đếm các số nguyên tố không vượt quá x có công thức tiệm cận

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$$

khi $x \to \infty$. Phát biểu này mang tên Định lý số nguyên tố, từng được trình bày trong bài báo năm 1859 của Riemann, nhưng tác giả không đưa ra chứng minh chặt chẽ.

Với mọi số tự nhiên m và mọi đặc trưng $\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$, theo Dirichlet ta lập chuỗi

$$L(s,\chi) = \sum_{\substack{n=1 \\ \gcd(n,m)=1}}^{\infty} \chi(n) n^{-s}.$$

Chuỗi này có cùng tính chất hội tụ như ζ: nó hội tụ tuyệt đối trên miền $\Re(s) > 1$, hội tụ đều trên miền $\Re(s) > 1 + \epsilon$. Hơn thế, khi $\chi \neq 1$, $L(s,\chi)$ có thể mở rộng thành một hàm chỉnh hình của $s \in \mathbb{C}$ thỏa mãn phương trình hàm liên hệ các giá trị tại s và $1 - s$. Một phần thiết yếu trong chứng minh định lý Dirichlet về sự vô hạn của các số nguyên tố trong cấp số cộng $\{an + b : n \geq 1\}$, a, b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, là chỉ ra $L(1,\chi) \neq 0$.

2. Biến đổi Mellin

Cho $f(t)$ là hàm của biến thực $t \in \mathbb{R}_+$, khả tích địa phương và giảm nhanh (decays rapidly) tại cả 0 và ∞(4). Khi đó tích phân

$$\widetilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t) t^{s-1} dt \tag{2}$$

(3)Các nghiệm tầm thường của ζ là các số nguyên âm chẵn $-2, -4, \ldots$; xem thảo luận ở Mục 2.

(4)Hàm $f(t)$ gọi là giảm nhanh tại ∞ (tại 0) nếu $f(t)t^A$ là hàm bị chặn trên $\mathbb{R}_+$ với mọi số thực $A > 0$ (tương ứng, $A < 0$). Nếu f xác định trên toàn $\mathbb{R}$, ta cũng nói $f(t)$ giảm nhanh tại $-\infty$ nếu $f(-t)$ giảm nhanh tại ∞.

hội tụ tuyệt đối với mọi $s \in \mathbb{C}$ và định nghĩa một hàm chỉnh hình của s. Biến đổi Mellin $\widetilde{f}$ có thể định nghĩa như một hàm phân hình với giả thiết nhẹ hơn tính giảm nhanh. Ta sẽ nhắc lại xây dựng này qua một vài ví dụ và dành việc tham khảo [6] cho những bạn đọc muốn biết thông tin hệ thống hơn.

Giả sử f giảm nhanh tại ∞, và tại 0 nó có khai triển tiệm cận thành chuỗi lũy thừa $\sum_{n \geq n_0} a_n t^n$, nghĩa là với mọi số nguyên $n_1 \geq n_0$,

$$f(t) = \sum_{n=n_0}^{n_1} a_n t^n + O(t^{n_1+1}) \tag{3}$$

khi $t \to 0$. Với $m \leq M$, ký hiệu $[f(t)]_m^M$ hàm của biến $t \in \mathbb{R}$ nhận giá trị $f(t)$ nếu $t \in [m, M]$, và 0 nếu ngược lại. Tích phân Mellin (2) của hiệu $f(t) - [\sum_{n=n_0}^{n_1} a_n t^n]_0^1$ hội tụ trên miền $\Re(s) > -n_1$. Tích phân Mellin của $[t^n]_0^1$ là $\frac{1}{s+n}$. Từ đó suy ra $\widetilde{f}$ có thể mở rộng phân hình tới $\Re(s) > -n_1$. Cho $n_1 \to \infty$ ta có một mở rộng phân hình của $\widetilde{f}$ trên toàn bộ mặt phẳng phức. Nó có các cực đơn tại các số nguyên $-n \leq -n_0$ với thặng dư tại $-n$ là hệ số a_n trong chuỗi Taylor (3).

Theo Zagier [6], định nghĩa trên có thể mở rộng cho các hàm khả tích địa phương f trên $\mathbb{R}_+$ có khai triển Taylor tại cả 0 và ∞. Bằng cách lấy f trừ đi một tổ hợp tuyến tính hữu hạn của $[t^n]_0^1$ và $[t^n]_1^\infty$, f sẽ giảm đủ tốt để xây dựng biến đổi Mellin $\widetilde{f}$ trong một dải thẳng đứng của mặt phẳng phức. Hàm f giảm càng nhanh tại 0 và ∞, dải thẳng đứng càng lớn. Cứ tiếp tục quá trình này, ta có thể định nghĩa $\widetilde{f}$ như một hàm phân hình với các cực đơn có thể xuất hiện tại các số nguyên. Điều đáng ngạc nhiên là với định nghĩa này, nếu $f(t) = t^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{C}$ nào đó thì $\widetilde{f} = 0$.

Quan sát rằng phép vị tự biến t theo hệ số α, $f_\alpha(t) = f(\alpha t)$, làm thay đổi biến đổi Mellin theo hệ số α^{-s}, nghĩa là

$$\widetilde{f_\alpha}(s) = \alpha^{-s}\widetilde{f}(s). \tag{4}$$

Tạm thời bỏ qua tính hội tụ, với

$$f_+(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(nt)$$

ta có

$$\widetilde{f_+}(s) = \zeta(s)\widetilde{f}(s).$$

Nói cách khác, tỉ lệ $\widetilde{f_+}/\widetilde{f}$ không phụ thuộc vào f với điều kiện nó định nghĩa được. Nếu f được chọn sao cho cả $\widetilde{f}$ và $\widetilde{f_+}$ không chỉ định nghĩa được mà còn có mở rộng phân hình, thì ta cũng có thể mở rộng ζ tới mặt phẳng phức. Theo thảo luận về biến đổi Mellin, ta quy vấn đề mở rộng ζ về việc chứng minh f và f_+ có khai triển Taylor hay khai triển Laurent tại cả 0 và ∞.

Ví dụ xét hàm $f(t) = e^{-t}$ giảm nhanh tại ∞ và có khai triển tiệm cận

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n$$

khi $t \to 0$. Lập luận trên chỉ ra rằng hàm gamma

$$\widetilde{f}(s) = \Gamma(s)$$

định nghĩa khi $\Re(s) > 0$ bởi tích phân (1) có thể mở rộng phân hình lên toàn bộ mặt phẳng phức với các cực đơn tại các số nguyên không dương. Ta cũng biết rằng thặng dư của $\Gamma(s)$ tại $s = -n$ (n nguyên không âm), là $(-1)^n/n!$. Hàm

$$f_+(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} = \frac{1}{e^t - 1}$$

giảm nhanh tại ∞ và có khai triển tiệm cận

$$f_+(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^{n-1}$$

khi $t \to 0$ với $(B_n)_n$ là dãy số (hữu tỉ) Bernoulli xác định bởi

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, \ldots.$$

Ta biết rằng $\widetilde{f_+}$ là chỉnh hình với $\Re(s) > 1$ và có thể mở rộng phân hình. Bởi luật vị tự (4),

$$\widetilde{f_+}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\Gamma(s) = \zeta(s)\Gamma(s).$$

Hàm zeta Riemann xuất hiện ở đây như tỉ số của hai biến đổi Mellin

$$\zeta(s) = \frac{\widetilde{f_+}(s)}{\widetilde{f}(s)},$$

và bởi vậy $\zeta(s)$ có thể mở rộng phân hình tới mặt phẳng phức với cực đơn duy nhất tại $s = 1$ với thặng dư 1. Tại các số nguyên âm, nó có giá trị $\zeta(-n) = -B_{n+1}/(n+1)$. Trường hợp đặc biệt, tại các số nguyên âm chẵn, hàm triệt tiêu bởi ta biết $B_{2n+1} = 0$ với mọi số nguyên $n \geq 1$.

Tiếp theo xét hàm Gauss

$$g(t) = e^{-\pi t^2},$$

giảm nhanh tại ∞ và có khai triển Taylor tại 0. Bằng một phép đổi biến dễ dàng, ta tính được biến đổi Mellin

$$\widetilde{g}(s) = \frac{\pi^{-\frac{s}{2}}}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right).$$

Đây là một hàm phân hình của $s \in \mathbb{C}$ với cực đơn tại các số nguyên chẵn không dương.

Bây giờ ta xem xét hàm $g_+(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g(nt)$,

$$g_+(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t^2}.$$

Vì g giảm nhanh tại ∞, hàm g_+ cũng thế. Dáng điệu tiệm cận của g_+ tại 0 ít hiển nhiên hơn. Nhắc lại rằng hàm Gauss g bằng biến đổi Fourier $g^\vee$ của chính nó, do đó $g^\vee$ giảm nhanh tại ∞; nói cách khác g là một hàm Schwartz(5). Vì biến đổi Fourier của $g_t(x) = g(tx)$ cho bởi $g_t^\vee(y) = t^{-1}g^\vee(t^{-1}y) = t^{-1}g_{t^{-1}}(y)$ với mọi $t > 0$, công thức tổng Poisson áp dụng cho g_t là

(5) $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t^2} = t^{-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t^{-2}}.$$

Vì thế ta có mối quan hệ

$$2g_+(t) + 1 = t^{-1}\left(2g_+(t^{-1}) + 1\right),$$

hay là

(6) $$2g_+(t) = t^{-1} - 1 + 2t^{-1}g_+(t^{-1}).$$

Khi $t \to 0$, $g_+(t^{-1}) = O(t^n)$ với mọi số nguyên dương n, do đó

$$2g_+(t) = t^{-1} - 1 + O(t^n)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Từ khai triển Taylor này suy ra biến đổi Mellin $2\widetilde{g_+}$ có thể mở rộng thành hàm phân hình của $s \in \mathbb{C}$ với các cực đơn tại $s = 0$ và $s = 1$, với các thặng dư tương ứng là 1 và -1. Hơn nữa, vì các số hạng t^{-1} và 1 không ảnh hưởng tới biến đổi Mellin, (6) dẫn đến phương trình hàm

$$\widetilde{g_+}(s) = \widetilde{g_+}(1-s).$$

Bây giờ

$$\begin{aligned}2\widetilde{g_+}(s) &= 2\widetilde{g}(s)\zeta(s)\\ &= \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \xi(s)\end{aligned}$$

và ta có được phương trình hàm của hàm zeta Riemann

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Đây hầu như là chứng minh ban đầu của Riemann cho phương trình hàm của ζ dựa trên phương trình hàm của chuỗi theta Jacobi Jacobi

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}.$$

(5)Xem thảo luận đầu Mục 3 về biến đổi Fourier, hàm Schwartz, cũng như công thức tổng Poisson.

Hàm này liên hệ với g_+ bởi quan hệ $\theta(t^2) = 2g_+(t) + 1$. Phương trình (5) thường được xem như phương trình hàm của chuỗi theta Jacobi, và có thể viết lại thành

$$\theta(t^{-1}) = \sqrt{t}\theta(t) \tag{7}$$

với mọi $t > 0$.

3. Công thức tổng Poisson

Để hiểu sâu hơn về phương trình hàm của hàm zeta, ta sẽ đào sâu hơn chứng minh của (6) và làm rõ vai trò của hàm thử Gauss. Ta hãy nhắc lại vài điều cơ bản về biến đổi Fourier và công thức tổng Poisson. Với một hàm biến thực trơn $f(x)$ giảm nhanh tại $\pm\infty$, định nghĩa *biến đổi Fourier* của nó là

$$f^\vee(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x y} dx,$$

khi đó $f^\vee(y)$ cũng là một hàm trơn. Hàm trơn f được gọi là một *hàm Schwartz* nếu cả f và $f^\vee$ giảm nhanh tại $\pm\infty$. Với định nghĩa này, rõ ràng là không gian các hàm Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ổn định dưới biến đổi Fourier. Ở dạng đơn giản nhất, công thức tổng Poisson

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f^\vee(n)$$

đúng với mọi hàm Schwartz $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Có thể nói lỏng các điều kiện về f mà vẫn thu được công thức như trên.

Như đã thấy khi thảo luận về biến đổi Mellin, để thác triển $\widetilde{f_+}$ như hàm phân hình của $s \in \mathbb{C}$, ta cần khai triển Taylor của f_+ tại $t = 0$. Công thức tổng Poisson rất có ích cho mục đích này. Quả thực, công thức tổng Poisson nói rằng tổng rời rạc

$$|t| \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nt)$$

tiến tới tích phân $f^\vee(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ nhanh hơn bất kì hàm t^m nào khi $t \to 0$. Lấy $f \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$, không gian các hàm Schwartz chẵn. Vì biến đổi Fourier của $f_t(x) = f(tx)$ cho bởi $f_t^\vee(y) = t^{-1} f_{t^{-1}}^\vee(y)$ với mọi $t > 0$, công thức Poisson dẫn đến

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nt) = t^{-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f^\vee(nt^{-1}). \tag{8}$$

Do $f, f^\vee$ là các hàm chẵn, ta thu được

$$2f_+(t) + f(0) = 2t^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} f^\vee(nt^{-1}) + t^{-1} f^\vee(0). \tag{9}$$

Vì $f^\vee$ là một hàm Schwartz, khi $t \to 0$ ta có $2t^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} f^\vee(nt^{-1}) = O(t^m)$ với mọi $m \in \mathbb{N}$. Từ đó suy ra

$$2f_+(t) + f(0) = t^{-1} f^\vee(0) + O(t^m)$$

với mọi $m \in \mathbb{N}$. Như vậy với mọi hàm Schwartz chẵn f, hàm $f_+(t)$ có khai triển Laurent khi $t \to 0$. Biến đổi Mellin $\widetilde{f_+}$ có thể thác triển thành hàm phân hình của $s \in \mathbb{C}$ với cực đơn tại $s = 0$ và $s = 1$. Ta kết luận rằng với mọi hàm Schwartz chẵn $f \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ có khai triển Taylor tại 0, các biến đổi Mellin của f và f_+ tồn tại, và là các hàm phân hình của $s \in \mathbb{C}$, và $\zeta(s) = \widetilde{f_+}(s)/\widetilde{f}(s)$ có thể mở rộng phân hình tới $\mathbb{C}$. Đặc biệt, tỉ số $\widetilde{f_+}(s)/\widetilde{f}(s)$ không phụ thuộc vào cách chọn hàm Schwartz chẵn, có khai triển Taylor tại 0, f.

Phương trình (9) cung cấp nhiều thông tin hơn là tính mở rộng phân hình của $\widetilde{f_+}$. Vì các số hạng $f(0)$ và $t^{-1}f^\vee(0)$ không ảnh hưởng tới biến đổi Mellin, (9) cho biết

$$\widetilde{f_+}(s) = \widetilde{(f^\vee)_+}(1-s)$$

và do vậy

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)} = \frac{\widetilde{f^\vee}(1-s)}{\widetilde{f}(s)}. \tag{10}$$

Vậy tỉ lệ $\widetilde{f^\vee}(1-s)/\widetilde{f}(s)$ độc lập với cách chọn f và nó bằng $\zeta(s)/\zeta(1-s)$. Chọn f

là hàm Gauss cho ta một công thức tiện dụng của tỉ lệ này theo hàm gamma.

Weil [5] đưa ra một giải thích khác tại sao tỉ lệ $\frac{\widetilde{f^\vee}(1-s)}{\widetilde{f}(s)}$ độc lập với f, bằng lý thuyết hàm suy rộng. Nhắc lại rằng $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ là không gian các hàm Schwartz trên $\mathbb{R}$. Một hàm suy rộng ôn hòa (tempered distribution) là một phiếm hàm tuyến tính liên tục $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, và gọi $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ là không gian các hàm suy rộng ôn hòa. Với mỗi $s \in \mathbb{C}$ ta ký hiệu $\mathcal{S}'(\mathbb{R})_s$ là không gian con của $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ bao gồm các phiếm hàm tuyến tính l thỏa mãn

$$l(f_\alpha) = \alpha^{-s} l(f) \tag{11}$$

với mọi $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. (Hàm vị tự f_α cho bởi $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$ như đã nói.) Nhận xét căn bản của Weil là với mỗi $s \in \mathbb{C}$,

$$\dim\left(\mathcal{S}'(\mathbb{R})_s\right) = 1,$$

xem [5, 2]. Nếu $\Re(s) > 0$, ta có thể xây dựng một vectơ khác không trong $\mathcal{S}'(\mathbb{R})_s$ bằng tích phân Mellin

$$\widetilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t) t^s \frac{dt}{t}.$$

Phiếm hàm $m_s(f) = \widetilde{f}(s)$ là một vectơ khác không của $\mathcal{S}'(\mathbb{R})_s$. Ta đã chứng minh rằng với $\widetilde{f} \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$, $\widetilde{f}$ có thể thác triển thành một hàm phân hình của s với cùng lắm là các cực đơn tại các số nguyên không dương. Bằng mở rộng giải tích, phiếm hàm $m_s(f) = \widetilde{f}(s)$ là một vectơ của $\mathcal{S}'(\mathbb{R})_s$ với mọi $s \notin \{0, -1, -2, \dots\}$.

Bây giờ ta xét phiếm hàm

$$m_s^\vee(f) = \int_{\mathbb{R}_+} f^\vee(t) t^s \frac{dt}{t}.$$

Đây là một tích phân hội tụ với $\Re(s) > 0$, và có thể mở rộng tới $s \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$. Bởi biến đổi Fourier của f_t là $t^{-1} f^\vee_{t^{-1}}$ với mọi $t > 0$, $m_s^\vee \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})_{1-s}$ và là một vectơ khác không nếu $\Re(s) > 0$.

Trong từng không gian vectơ một chiều $\mathcal{S}'(\mathbb{R})_s$ với $s \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ ta có hai vectơ là m_s và $m^\vee_{1-s}$, với $m_s \neq 0$ nếu $\Re(s) > 0$ và $m^\vee_{1-s} \neq 0$ nếu $\Re(s) < 1$. Với $\Re(s) > 0$ và s không phải số nguyên, có một số phức duy nhất $\gamma(s)$ sao cho $m^\vee_{1-s} = \gamma(s) m_s$. Bằng cách tính quan hệ này trên một hàm thử bất kì $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ta thấy rằng γ là hàm giải tích của s. Bằng cách đảo vai trò của m_s và $m^\vee_{1-s}$, ta có thể mở rộng γ thành hàm phân hình của s.

Bây giờ với mọi hàm Schwartz $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ta có

$$\gamma(s) = \frac{\widetilde{f^\vee}(1-s)}{\widetilde{f}(s)}.$$

Lấy $f(t) = e^{-\pi t^2}$ ta được

$$\gamma(s) = \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

Với sự trợ giúp của công thức tổng Poisson như trên, suy ra

$$\gamma(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(1-s)}.$$

4. Đối ngẫu Pontryagin

Mục này nói về lý thuyết tích phân trên các nhóm abel com-pắc địa phương và đối ngẫu Pontryagin. Ta không cố gắng đưa ra một thảo luận rốt ráo mà điểm qua các ví dụ và đặt nền móng cho phần giới thiệu về các adèle và idèle phía sau.

Lấy G là một nhóm abel com-pắc địa phương. Một *đặc trưng unita* của G là một đồng cấu liên tục $\chi : G \to \mathbb{C}^1$, trong đó $\mathbb{C}^1$ là nhóm các số phức có chuẩn bằng 1. Nhóm $G^\vee$ các đặc trưng unita của G được trang bị tôpô com-pắc–mở: hội tụ trong tôpô này theo định nghĩa là hội tụ đều trên những tập com-pắc. Theo Pontryagin, $G^\vee$ trang bị với tôpô com-pắc–mở cũng là một nhóm com-pắc địa phương.

Có thể chứng minh được rằng G là com-pắc khi và chỉ khi $G^\vee$ là rời rạc và ngược lại.

Trong phạm vi giới hạn ở đây, thay vì giới thiệu lý thuyết đối ngẫu Pontryagin (chi tiết có trong [1]), ta chỉ nhắc đến vài ví dụ sẽ xuất hiện ở phần sau của bài viết này.

Nếu $G = \mathbb{Z}$, rõ ràng $G^\vee = \mathbb{C}^1$. Ngược lại, nếu $G = \mathbb{C}^1$ thì $G^\vee = \mathbb{Z}$.

Nếu $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, thì $G^\vee$ là nhóm các căn đơn vị bậc n, là nhóm đẳng cấu (không chính tắc) với G. Tổng quát hơn, nếu G là một nhóm abel hữu hạn, $G^\vee$ luôn đẳng cấu với G. Nếu G là cận hữu hạn (profinite), nghĩa là giới hạn ngược (inverse limit) của các nhóm hữu hạn, thì $G^\vee$ là giới hạn thuận (direct limit) của các nhóm hữu hạn, nói cách khác $G^\vee$ là một nhóm rời rạc xoắn (torsion discrete group).

Với $G = \mathbb{R}$, ta có một đặc trưng unita đặc biệt $\psi_\infty : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^1$, tầm thường trên $\mathbb{Z}$, cho bởi $x \mapsto e^{2\pi i x}$. Có thể đồng nhất $G^\vee$ với $\mathbb{R}$ bằng cách cho tương ứng $y \in \mathbb{R}$ với đặc trưng unita $x \mapsto \psi_\infty(xy)$. Nếu $G = \mathbb{R}_+$, nhóm nhân của những số thực dương, đẳng cấu với $\mathbb{R}$ qua ánh xạ lôgarít, để thuận tiện ta đồng nhất $G^\vee$ với nhóm những số thuần ảo bằng cách đồng nhất một số ảo iy với đặc trưng unita $t \mapsto t^{iy}$.

Với $G = \mathbb{C}$, dễ thấy $G^\vee = \mathbb{C}$. Với $G = \mathbb{C}^\times$, có một dãy khớp

$$0 \to \mathbb{C}^1 \to G \to \mathbb{R}_+ \to 0$$

cho bởi đặc trưng chuẩn $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}_+, x \mapsto |x|$. Bằng đối ngẫu, $G^\vee$ chui vào dãy khớp

$$0 \to i\mathbb{R} \to G^\vee \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Nói cách khác, nhóm các thành phần liên thông (component group) của $G^\vee$ là $\mathbb{Z}$ và thành phần trung hòa (neutral component) của nó là đường thẳng ảo.

Với $G = \mathbb{Q}_p$, trường số p-adic, ta cũng có một đặc trưng unita đặc biệt $\psi_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}^1$, tầm thường trên $\mathbb{Z}_p$, cho bởi đơn ánh $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ và đẳng cấu $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}^1$, $x + \mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi i x}$. Khi đó ta cũng có thể đồng nhất $G^\vee$ với $\mathbb{Q}_p$ bằng cách cho tương ứng $y \in \mathbb{Q}_p$ với đặc trưng unita $x \mapsto \psi_p(xy)$.

Với $G = \mathbb{Q}_p^\times$, có một dãy khớp

$$0 \to \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{Z} \to 0$$

cho bởi ánh xạ định giá $\mathrm{val} : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{Z}$. Bằng đối ngẫu, có một toàn ánh của $G^\vee$ lên đối ngẫu của nhóm com-pắc $\mathbb{Z}_p^\times$ với hạch là $\mathbb{C}^1$. Nói cách khác, nhóm các thành phần liên thông của $G^\vee$ là một nhóm rời rạc xoắn và thành phần trung hòa của nó là đường tròn đơn vị.

Có thể mở rộng khái niệm chuỗi Fourier cho các nhóm abel com-pắc địa phương. Cụ thể là khái niệm chuỗi Fourier tổng quát hóa này bao hàm cả chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn và biến đổi Fourier của hàm biến thực. Với mỗi $f \in L^1(G)$, không gian các hàm khả tích trên G, ta định nghĩa

$$f^\vee(\chi) = \int_G f(g)\chi(g)dg,$$

ở đây dg là một độ đo Haar trên G. Nhắc lại rằng theo Haar và von Neumann, tồn tại một độ đo Radon bất biến trên mỗi nhóm abel com-pắc địa phương G, và độ đo đó là duy nhất sai khác một hằng số nhân dương. Một độ đo như thế gọi là *độ đo Haar* của G. Biến đổi Fourier $f \mapsto f^\vee$ phụ thuộc vào cách chọn một độ đo Haar. Ta biết rằng $f^\vee$ là một hàm liên tục trên $G^\vee$. Ta cũng biết rằng $f^\vee$ thỏa mãn một tổng quát hóa của Bổ đề Riemann-Lebesgue trong lý thuyết chuỗi Fourier, chính xác hơn, $f^\vee$ có thể mở rộng bởi không (extension by zero) một cách liên tục lên com-pắc hóa một điểm của

$G^\vee$. Không gian $L^1(G)$ các hàm khả tích trên G được trang bị tích chập

$$f_1 * f_2(g) = \int_G f_1(gh^{-1}) f_2(h) dh.$$

Có thể chứng minh rằng biến đổi Fourier của $f_1 * f_2$ là tích thông thường của $f_1^\vee$ và $f_2^\vee$.

Với mục đích tìm biểu diễn tích phân của hàm zeta, ta cần xét **mở rộng phức của lý thuyết Fourier cho các nhóm abel com-pắc địa phương**, tương tự như cách biến đổi Laplace là mở rộng phức của biến đổi Fourier.

Ta sẽ giới hạn sự chú ý vào các nhóm abel com-pắc địa phương G **được trang bị một ánh xạ chuẩn** $|\cdot| : G \to \mathbb{R}_+$ **với hạch com-pắc** G^1. Ảnh H của ánh xạ chuẩn này có thể là $\mathbb{R}_+$ hay một nhóm con rời rạc của $\mathbb{R}_+$ dạng $q^{\mathbb{Z}} := \{q^n : n \in \mathbb{Z}\}$, với $q \in \mathbb{R}_+$ nào đó. Ta có một dãy khớp

$$0 \to G^1 \to G \to H \to 0.$$

Thí dụ, nếu $G = \mathbb{R}_+$ thì $G^1 = \{\pm 1\}$ và $H = \mathbb{R}_+$. Nếu $G = \mathbb{C}^\times$ thì $G^1 = \mathbb{C}^1$ và $H = \mathbb{R}_+$. Trong trường hợp $G = \mathbb{Q}_p^\times$, ánh xạ chuẩn $\mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{R}_+$ có ảnh $H = p^{\mathbb{Z}}$ và hạch $G^1 = \mathbb{Z}_p^\times$. Một ví dụ quan trọng mà ta sẽ thảo luận là nhóm $G = \mathbb{A}_K^\times / K^\times$ các lớp idèle, trong trường hợp đó $H = \mathbb{R}_+$ và $G^1 = \mathbb{A}^1/K^\times$, nhóm của các lớp idèle có chuẩn 1.

Một *đặc trưng* của G là một đồng cấu liên tục $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$. Ký hiệu $\mathsf{X}(G)$ là nhóm các đặc trưng của G trang bị với tôpô com-pắc–mở. Nó chứa một phần tử không tầm thường là đặc trưng chuẩn $|\cdot| : G \to \mathbb{R}_+$. Hạn chế của $\chi \in \mathsf{X}(G)$ lên nhóm con com-pắc G^1 có ảnh chứa trong $\mathbb{C}^1$, nghĩa là $\chi|_{G^1}$ là một đặc trưng unita. Nhắc lại rằng đối ngẫu $\left(G^1\right)^\vee$ của nhóm com-pắc G^1 là một nhóm rời rạc. Ta có một dãy khớp

$$0 \to \mathsf{X}(H) \to \mathsf{X}(G) \to \left(G^1\right)^\vee \to 0,$$

ở đây $\mathsf{X}(H)$ là nhóm những đặc trưng của H. Phần tử đặc biệt $|\cdot| \in \mathsf{X}(G)$, bởi là tầm thường trên G^1, nằm trong $\mathsf{X}(H)$.

Nếu $H = \mathbb{R}_+$, mỗi đặc trưng của H có dạng $t \mapsto t^s$ với $s \in \mathbb{C}$ nào đó, vì thế $\mathsf{X}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{C}$. Nếu H là một nhóm con rời rạc của $\mathbb{R}_+$ có dạng $q^{\mathbb{Z}}$, có thể đồng nhất $\mathsf{X}(H)$ với $\mathbb{C}^\times$ bằng cho tương ứng $\chi \in \mathsf{X}(H)$ với $\chi(q) \in \mathbb{C}^\times$, ở đây q là một phần tử sinh cố định nào đó của H. Đôi khi để thuận tiện hơn ta xét toàn ánh $\mathsf{X}(\mathbb{R}_+) \to \mathsf{X}(H)$ và đồng nhất $\mathsf{X}(H)$ với thương của $\mathsf{X}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{C}$ chia cho nhóm con rời rạc $\{s \in i\mathbb{R} \mid q^s = 1\}$:

$$\mathsf{X}(H) \cong \mathbb{C} \Big/ \left(\frac{2\pi i}{\log q}\right) \mathbb{Z}\,.$$

Đẳng cấu này độc lập với cách chọn phần tử sinh q của H. Nhìn theo cách nào đi chăng nữa, ngoài cấu trúc nhóm, $\mathsf{X}(H)$ còn sở hữu tự nhiên cấu trúc của một đa tạp phức một chiều. Không gian $\mathsf{X}(G)$, vì là hợp rời của các bản sao của $\mathsf{X}(H)$, nên cũng có cấu trúc đa tạp phức một chiều.

Vì mỗi đặc trưng $\chi : H \to \mathbb{C}^\times$ đều có dạng $t \mapsto t^s$ với s là một phần tử của $\mathbb{C}$ hoặc $\mathbb{C} \Big/ \left(\frac{2\pi i}{\log q}\right) \mathbb{Z}$, ta định nghĩa *phần thực* của χ bằng công thức $\mathfrak{R}(\chi) = \mathfrak{R}(s)$. Dĩ nhiên $\mathfrak{R}(|\cdot|) = 1$. Ta có thể mở rộng hàm phần thực này lên toàn bộ không gian $\mathsf{X}(G)$. Với mọi $\chi \in \mathsf{X}(G)$, phép gán $x \mapsto |\chi(x)|$ định nghĩa một đồng cấu liên tục $|\chi| : G \to \mathbb{R}_+$. Vì nhóm con com-pắc duy nhất của $\mathbb{R}_+$ là nhóm tầm thường, hạn chế của $|\chi|$ lên nhóm com-pắc G^1 là tầm thường. Nói cách khác $|\chi| \in \mathsf{X}(H)$, và ta đặt

(12) $$\mathfrak{R}(\chi) = \mathfrak{R}(|\chi|).$$

Một đặc trưng $\chi \in \mathsf{X}(G)$ là unita khi và chỉ khi $\mathfrak{R}(\chi) = 0$.

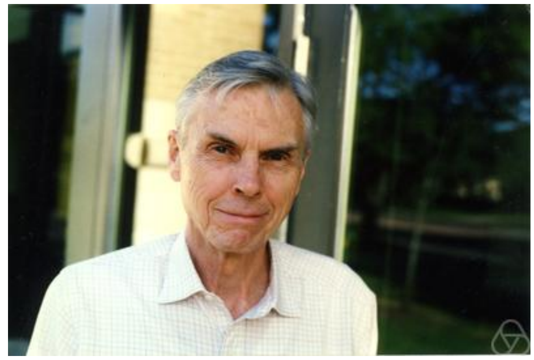
Với một lớp thích hợp các hàm f trên G, ta muốn định nghĩa biến đổi Mellin

$$\widetilde{f}(\chi) = \int_G f(x)\chi(x)dx$$

như hàm của $\chi \in \mathsf{X}(G)$. Nếu f có giá com-pắc, tích phân này hội tụ tuyệt đối và định nghĩa một hàm giải tích của $\chi \in \mathsf{X}(G)$. Trong trường hợp ta quan tâm, tích phân này chỉ hội tụ với $\Re(\chi) > c$ với một hằng số c nào đó và ta sẽ tìm cách mở rộng $\widetilde{f}$ thành hàm phân hình của $\chi \in \mathsf{X}(G)$.

5. CÁC ADÈLE

5.1. **Các adèle của trường $\mathbb{Q}$.** Một adèle là một dãy vô hạn $(x_p; x_\infty) \in \prod_{p \text{ nguyên tố}} \mathbb{Q}_p \times \mathbb{R}$ bao gồm một số p-adic $x_p \in \mathbb{Q}_p$ với mỗi số nguyên tố p, *sao cho* $x_p \in \mathbb{Z}_p$ *với hầu tất cả các số nguyên tố* p, và một số thực $x_\infty \in \mathbb{R}$. Vành $\mathbb{A}$ của các adèle với một tôpô có tên tôpô tích trực tiếp hạn chế (restricted direct product topology), là một nhóm tôpô com-pắc địa phương. Người ta muốn dùng các adèle để thực hiện đồng thời giải tích p-adic và giải tích thực. Tuy nhiên, đây không phải nhiệm vụ dễ dàng vì chỉ riêng một adèle thôi cũng khá cồng kềnh đối với một tâm trí bình thường.



John Tate. Ảnh: George M. Bergman.

Ta hãy làm sáng tỏ cấu trúc của $\mathbb{A}$ với sự trợ giúp của các dãy khớp. Ta xem $\mathbb{Q}$ như nhóm con rời rạc của $\mathbb{A}$ bao gồm các adèle $(x_p; x_\infty)$ với tất cả thành phần bằng nhau $x_p = x_\infty = x \in \mathbb{Q}$, và $\hat{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p$ như nhóm con com-pắc của $\mathbb{A}$ chứa các phần tử $(x_p; x_\infty)$ với $x_p \in \mathbb{Z}_p$ với mọi p và $x_\infty = 0$. Có một dãy khớp

$$0 \to \hat{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{A} \to \bigoplus_{p \text{ hữu hạn}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to 0,$$

ở đây $\oplus_p \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ là nhóm con của $\prod_p \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ chứa các dãy $(\overline{x_p})$ với $\overline{x_p} \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ triệt tiêu với hầu tất cả p. Bây giờ xét đồng cấu giữa hai dãy khớp (sau đây p luôn chỉ một số nguyên tố):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{A} \arrow[r] & \bigoplus_{p \text{ hữu hạn}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Do mũi tên dọc ở giữa là đơn ánh và mũi tên dọc bên phải là toàn ánh với hạch $\mathbb{Z}$, Bổ đề con rắn (Snake Lemma) dẫn đến một dãy khớp

$$0 \to \mathbb{Z} \to \hat{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{A}/\mathbb{Q} \to 0,$$

trong đó $\mathbb{Z}$ nhúng theo đường chéo vào $\hat{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}$. Nói cách khác, có một đẳng cấu chính tắc

$$\mathbb{A}/\mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} \left(\hat{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}\right)/\mathbb{Z}. \tag{13}$$

Chia hai vế cho $\hat{\mathbb{Z}}$, ta có một đẳng cấu

$$\mathbb{A}/\left(\mathbb{Q} + \hat{\mathbb{Z}}\right) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \tag{14}$$

Lập luận tương tự chỉ ra rằng với mỗi $m \in \mathbb{N}$, ta có thể đồng nhất phủ $\mathbb{A}/\left(\mathbb{Q}+m\hat{\mathbb{Z}}\right)$ của $\mathbb{A}/\left(\mathbb{Q}+\hat{\mathbb{Z}}\right)$ với phủ $\mathbb{R}/m\mathbb{Z}$ của $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Theo nghĩa này, $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ có thể xem như phủ cận phổ quát (pro-universal covering) của đường tròn $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Sử dụng đồng cấu tự nhiên $\mu : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ta nhận được một đặc trưng unita tự nhiên của $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$,

(15) $$\psi : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \to \mathbb{C}^1,$$

cho bởi $\mathbb{A}/\mathbb{Q} \ni x \mapsto e^{2i\pi\mu(x)}$. Hạn chế trên thành phần $\mathbb{Q}_p$, nó cảm sinh một đặc trưng unita $\psi_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}^1$ tầm thường trên $\mathbb{Z}_p$. Hạn chế trên thành phần thực $\mathbb{R}$, ta có $\psi_\infty(x) = e^{2i\pi x}$.

Với giúp đỡ của đặc trưng cộng tính (15), ta thiết lập một biến đổi Fourier trên $\mathbb{A}$. Lấy $\mathcal{S}(\mathbb{A})$ là không gian vectơ những hàm trên $\mathbb{A}$ sinh bởi các hàm có dạng $f = \otimes_p f_p \otimes f_\infty$ thỏa mãn đồng thời ba điều kiện sau:

(i) với mỗi số nguyên tố hữu hạn p, f_p là một hàm hằng địa phương với giá com-pắc trên $\mathbb{Q}_p$,

(ii) với hầu tất cả số nguyên tố p, f_p là hàm đặc trưng của $\mathbb{Z}_p$[(6)], và,

(ii) tại trị thực (real place), f_∞ là một hàm Schwartz trên $\mathbb{R}$.

Nếu $x = (x_p; x_\infty)$ là một adèle, tích vô hạn $f(x) = \prod_p f_p(x_p) f_\infty(x_\infty)$ có nghĩa vì hầu tất cả thừa số bằng 1. Biến đổi Fourier của f được định nghĩa là

$$f^\vee(y) = \int_{\mathbb{A}} f(x)\psi(-xy)dx,$$

ở đây dx là một độ đo Haar trên $\mathbb{A}$. Độ đo này tồn tại duy nhất sai khác một hằng số nhân, vì $\mathbb{A}$ là một nhóm com-pắc địa phương. Độ đo Haar của $\mathbb{A}$ có thể được chuẩn hóa sao cho

$$(f^\vee)^\vee(x) = f(-x).$$

Nói cách khác, đặc trưng cộng tính ψ xác định một độ đo Haar duy nhất trên $\mathbb{A}$.

Trong ngữ cảnh này, công thức tổng Poisson phát biểu như sau: với mọi $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$, chuỗi $\sum_{n\in\mathbb{Q}} f(n)$ hội tụ tuyệt đối và ta có đẳng thức

(16) $$\sum_{n\in\mathbb{Q}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Q}} f^\vee(n).$$

5.2. **Các adèle của trường số.** Thảo luận ở trên về các adèle có thể tổng quát hóa cho một trường số bất kỳ[(7)]. Lấy K là một mở rộng hữu hạn của $\mathbb{Q}$ với bậc n. Vành $\mathbb{Z}_K$ các số nguyên của nó bao gồm các phần tử $x \in K$ thỏa mãn một phương trình

$$x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

với $m \geq 1, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$. Vành $\mathbb{Z}_K$ là một $\mathbb{Z}$-môđun tự do hạng n.

Với mọi ideal nguyên tố $\mathfrak{p}$ của $\mathbb{Z}_K$, các lũy thừa $\mathfrak{p}^m, m \geq 1$ định nghĩa một cơ sở lân cận của một tôpô trên K. Gọi p là số nguyên tố duy nhất nằm trong $\mathfrak{p}$, thì đầy đủ hóa $K_\mathfrak{p}$ của K đối với tôpô vừa nêu là một mở rộng hữu hạn của $\mathbb{Q}_p$. Đầy đủ hóa của $\mathbb{Z}_K$ đối với tôpô này, ký hiệu bởi $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$, là vành các số nguyên của $K_\mathfrak{p}$.

Các ideal nguyên tố của $\mathbb{Z}_K$ được gọi là các trị hữu hạn của K. Các trị vô cực của K là các lớp tương đương của các chuẩn archimedes trên K, hai chuẩn được gọi là tương đương nếu chúng cảm sinh cùng một tôpô trên K. Chú ý rằng chỉ có một số hữu hạn các trị vô cực. Với mỗi trị vô cực ν, đầy đủ hóa K_ν của K đối với tôpô

(6) Tức là $f_p(x) = 1$ nếu $x \in \mathbb{Z}_p$ và 0 nếu ngược lại.

(7) Một *trường số* (chính xác hơn, *trường số đại số*) là một mở rộng trường hữu hạn của $\mathbb{Q}$. Ví dụ $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2-3)$ là các trường số, trong khi $\mathbb{R}$ và $\mathbb{C}$ đều không phải trường số.

cảm sinh có thể là $\mathbb{R}$ hay $\mathbb{C}$, ta nói ν là trị thực hay phức tùy theo đó. Ta có

$$K_{\mathbb{R}} = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \prod_{\nu} K_{\nu}$$

ở đây ν chạy qua tập hợp các trị hữu hạn và vô cực của K. Không gian thực n-chiều $K_{\mathbb{R}}$ được gọi là không gian Minkowski.

Một adèle của K là một dãy $(x_{\nu}) \in \prod_{\nu} K_{\nu}$, trong đó với mọi trị hữu hạn hay vô cực của K, $x_{\nu} \in K_{\nu}$, và $x_{\nu} \in \mathcal{O}_{\nu}$ với hầu tất cả các trị hữu hạn ν. Vành $\mathbb{A}_K$ các adèle như thế, được trang bị với tôpô mang tên tôpô tích trực tiếp hạn chế, là một nhóm com-pắc địa phương. Giống như trường hợp các số hữu tỉ, K nhúng theo đường chéo như một nhóm con rời rạc đối com-pắc (cocompact discrete subgroup) của $\mathbb{A}_K$. Nếu $\hat{\mathbb{Z}}_K$ là đầy đủ hóa cận hữu hạn (profinite completion) của $\mathbb{Z}_K$, ta có đẳng cấu

$$\mathbb{A}_K / \left(\hat{\mathbb{Z}}_K + K\right) \cong K_{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}_K,$$

$K_{\mathbb{R}}/\mathbb{Z}_K$ là một xuyến thực có chiều n. Thương $\mathbb{A}_K/K$ có thể được đồng nhất với phủ cận phổ quát (pro-universal covering) của xuyến đó.

Vì K là một $\mathbb{Q}$-không gian vectơ chiều n, đẳng cấu $\mathbb{A}_K \cong \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{Q}} K$ cho thấy $\mathbb{A}_K$ là một $\mathbb{A}$-môđun tự do hạng n. Phép nhân với một phần tử $x \in \mathbb{A}_K$, xem như một biến đổi $\mathbb{A}$-tuyến tính trong $\mathbb{A}_K$, có vết $\mathrm{tr}(x) \in \mathbb{A}$. Rõ ràng ánh xạ $\mathrm{tr} : \mathbb{A}_K \to \mathbb{A}$ tương thích với ánh xạ vết thông thường $\mathrm{tr} : K \to \mathbb{Q}$, và cảm sinh một đồng cấu $\mathbb{A}_K/K \to \mathbb{A}/\mathbb{Q}$. Hợp thành với ánh xạ (15) $\psi : \mathbb{A}/\mathbb{Q} \to \mathbb{C}^1$, ta thu được một đặc trưng unita

$$\psi_K : \mathbb{A}_K/K \to \mathbb{C}^1.$$

Thảo luận về biến đổi Fourier trên $\mathbb{A}$ bây giờ có thể được lặp lại với $\mathbb{A}_K$. Cụ thể hóa, với mọi trị ν, hữu hạn hay vô cực, ψ_K cảm sinh một đặc trưng unita $\psi_{\nu} : K_{\nu} \to \mathbb{C}^1$. Đặc trưng unita này cho phép ta đồng nhất K_{ν} với đối ngẫu Pontryagin của nó bằng cách gán $y \in K_{\nu}$ với đặc trưng unita $x \mapsto \psi_{\nu}(xy)$. Có một độ đo Haar duy nhất dx trên K_{ν} sao cho biến đổi Fourier

$$f^{\vee}(y) = \int_{K_{\nu}} f(x)\psi_{\nu}(-xy)dx$$

định nghĩa một biến đổi của $\mathcal{S}(K_{\nu})$ thỏa mãn $(f^{\vee})^{\vee}(x) = f(-x)$.

(Còn tiếp)

Tài liệu

[1] A. Deitmar và S. Echterhoff, *Principles of harmonic analysis*. Universitext. Springer, New York, 2009.

[2] S.S. Kudla, *Tate's Thesis*. In: Bernstein J., Gelbart S. (eds) *An Introduction to the Langlands Program*. Birkhäuser, Boston, MA (2004).

[3] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.

[4] J. Tate, *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions*, Princeton Ph.D. thesis, Princeton University, Princeton, NJ, 1950.

[5] A. Weil, *Fonction zêta et distributions*, Séminaire Bourbaki 1965–1966, exp. 312.

[6] D. Zagier, *The Mellin transform and other useful analytic techniques*. Phụ lục cho E. Zeidler, *Quantum Field Theory I: Basics in Mathematics and Physics, A Bridge Between Mathematicians and Physicists*, tr. 307–328, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

Người dịch: Ngô Trung Hiếu (Đại học Bách khoa Hà Nội).

Furstenberg và Margulis nhận Giải Abel 2020

Nguyễn Quốc Thắng[(1)]

Viện Hàn lâm Khoa học và Nhân văn Na Uy[(2)] đã quyết định trao Giải thưởng Abel danh giá năm 2020 cho Hillel Furstenberg (Đại học Hebrew, Jerusalem, Israel) và Gregory Margulis (Đại học Yale, Hoa Kỳ) vì những đóng góp "**tiên phong trong việc sử dụng các phương pháp xác suất và động lực học trong lý thuyết nhóm, số học và tổ hợp**". Dưới đây chúng tôi giới thiệu sơ lược về các công trình của Furstenberg và Margulis.

Một hướng trung tâm của lý thuyết xác suất hiện đại nghiên cứu về các bước ngẫu nhiên (random walk). Bước ngẫu nhiên là một đường đi bao gồm một chuỗi các chuyển động ngẫu nhiên. Một ví dụ để hình dung là tuyến đường khám phá một thành phố xa lạ của một khách du lịch, trong đó ở mỗi điểm giao cắt giao thông, người này tung đồng xu để quyết định nên rẽ trái hay rẽ phải.

Hillel Furstenberg và Gregory Margulis đã phát minh ra các kỹ thuật bước ngẫu nhiên để nghiên cứu cấu trúc của các nhóm tuyến tính (đặc biệt là các nhóm Lie và nhóm đại số) và lý thuyết đồ thị. Qua đó, họ đưa ra các lời giải bằng xác suất cho nhiều vấn đề mở trong lý thuyết nhóm, lý thuyết số, tổ hợp và lý thuyết đồ thị. Không chỉ đặt ra những khái niệm có tầm khái quát rộng và hiệu quả lớn để giải quyết các bài toán vô cùng hóc búa, Furstenberg và Margulis cũng phát hiện ra những liên hệ đầy bất ngờ và lý thú giữa các ngành toán học kể trên. Các công trình của họ giúp hình thành một trường phái toán học có tác động sâu sắc đến đến nhiều lĩnh vực của toán học lý thuyết cũng như toán ứng dụng.

Furstenberg và Margulis đã sử dụng khéo léo các phương pháp xác suất để đạt được rất nhiều kết quả mới về sự tồn tại của các cấp số cộng đủ dài chỉ bao gồm các số nguyên tố, về cấu trúc của dàn trong các nhóm Lie, cách xây dựng các đồ thị giãn nở với các ứng dụng trong công nghệ truyền thông và khoa học máy tính. Ảnh hưởng của Furstenberg và Margulis vượt qua các lĩnh vực ban đầu nơi họ xuất phát. Hai ông đã chứng minh tính phổ dụng của các phương pháp xác suất và tính hiệu quả của việc vượt qua ranh giới giữa các ngành toán học riêng biệt, và đặc biệt là của việc vượt qua ranh giới truyền thống giữa toán thuần túy và toán ứng dụng.

Hillel Furstenberg là nhà toán học quốc tịch Mỹ và Israel, giáo sư danh dự Đại học Hebrew, Jerusalem. Furstenberg sinh ra ở Berlin, Đức năm 1935. Năm 1939, gia đình ông chạy sang Hoa Kỳ trốn tránh Đức Quốc xã và định cư tại khu phố Washington Heights của thành phố New York, ngay trước khi Chiến tranh Thế giới thứ hai bùng nổ.

Furstenberg làm nghiên cứu sinh tiến sĩ tại Đại học Princeton dưới sự hướng dẫn của Salomon Bochner và nhận bằng tiến sĩ với luận án về lý thuyết dự đoán năm 1958. Từ 1959 đến 1960, Furstenberg là giảng viên mang danh C.L.E. Moore tại Viện Công nghệ Massachusetts, một vị trí

[(1)] Viện Toán học, Viện HLKHCN Việt Nam. Email: nqthang@math.ac.vn

[(2)] Tên tiếng Anh: The Norwegian Academy of Science and Letters, có nơi dịch là *Viện Hàn lâm Khoa học Na Uy*. Đặt trụ sở tại Oslo, Viện hàn lâm này đặt mục tiêu hỗ trợ sự phát triển của khoa học tự nhiên, nhân văn và khoa học xã hội ở Na Uy.

mà nhiều nhà toán học hàng đầu của thế kỷ 20 như John Nash, Walter Rudin và Elias M. Stein đã từng trải qua. Năm 1961, Furstenberg nhận chân trợ lý giáo sư tại Đại học Minnesota. Tuy sau đó vài năm (năm 1965) ông được bổ nhiệm luôn là giáo sư toàn phần tại ĐH Minnesota nhưng ông đã quyết định chuyển đến Israel năm 1965 để tham gia giảng dạy tại Đại học Hebrew, tại Viện Toán học mang tên Einstein và đã làm việc ở đó cho đến khi nghỉ hưu năm 2003.

Hillel Furstenberg năm 1975. Ảnh: Wikipedia.

Năm 1955, mới 20 tuổi, ông đã gây chú ý bằng việc đưa ra một chứng minh tôpô đầy sáng tạo về sự vô hạn của các số nguyên tố. Trong một loạt các bài báo, bắt đầu từ năm 1963 với "Công thức Poisson cho các nhóm Lie nửa đơn", ông tiếp tục khẳng định mình là một nhà toán học mang tính cách đột phá. Bắt đầu từ việc nghiên cứu tích ngẫu nhiên các ma trận, Furstenberg đã đưa ra và phân loại một khái niệm có tầm quan trọng cơ bản, được gọi là *biên Furstenberg*. Sử dụng khái niệm này, ông đã đưa ra công thức kiểu Poisson biểu diễn các hàm điều hòa trên các nhóm Lie nửa đơn, thông qua các giá trị biên của chúng. Công trình của ông cho thấy tính chất của các bước ngẫu nhiên trên một nhóm có liên quan mật thiết đến cấu trúc của nhóm, từ đó dẫn đến khái niệm biên Furstenberg, có ảnh hưởng lớn trong các nghiên cứu về dàn và nhóm Lie. Trong các công trình về các bước ngẫu nhiên vào đầu những năm 60, một phần viết chung với Harry Kesten, ông đã đưa ra một tiêu chuẩn quan trọng cho tính dương của số mũ Lyapunov lớn nhất.

Được thúc đẩy bởi lý thuyết xấp xỉ Diophant, vào năm 1967, trong bài báo "Tính rời trong lý thuyết ergodic, các tập tối thiểu, và một vấn đề trong xấp xỉ Diophant", Furstenberg đã đưa ra khái niệm *tính rời* (disjointness), một khái niệm trong các hệ thống ergodic tương tự như tính chất nguyên tố cùng nhau ở các số nguyên. Khái niệm hoàn toàn tự nhiên này đã tỏ ra cực kỳ quan trọng và nó đã có nhiều ứng dụng vào một loạt các lĩnh vực rộng lớn bao gồm xử lý tín hiệu và vấn đề lọc trong kỹ thuật điện, hình học fractal, dòng đồng nhất, và số học.

Giả thuyết "$\times 2 \times 3$" của Furstenberg là một ví dụ đẹp đẽ, sơ cấp, nhưng dẫn đến nhiều hơn nữa kết quả mới. Ông đã chứng minh rằng nếu xét các ánh xạ trên đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức biến mỗi phần tử thành bình phương hay lập phương của chúng, thì một tập đóng bất biến dưới cả hai ánh xạ này hoặc là hữu hạn hoặc là toàn bộ đường tròn. Giả thuyết của Furstenberg nói rằng một độ đo bất biến dưới cả hai ánh xạ lấy bình phương và lập phương chỉ có thể hoặc là hữu hạn hoặc là bất biến đối với phép quay. Bất chấp nỗ lực của nhiều nhà toán học, giả thuyết này hiện vẫn còn mở.

Việc phân loại các độ đo bất biến dưới các tác động nhóm đã bùng nổ thành một lĩnh vực nghiên cứu rộng lớn có ảnh hưởng đến lý thuyết ergodic số học lượng tử, các mặt tịnh tiến (translation surfaces), phiên bản Margulis của một giả thuyết của Littlewood hay các công trình quan trọng của Marina Ratner. Trong khi nghiên cứu các độ đo bất biến dưới góc độ hình học, Furstenberg đã chứng minh vào năm 1972 tính ergodic duy nhất (unique ergodicity) của dòng horocyclic cho các mặt hyperbolic, một định lý đã sản sinh nhiều kết quả về sau.

Trong bài viết năm 1977, "Dáng điệu ergodic của các độ đo đường chéo và một định lý của Szemerédi về các cấp số cộng", sử dụng lý thuyết ergodic và định lý đa truy hồi (multiple recurrence) của mình, Furstenberg đã đưa ra một chứng minh mới tuyệt đẹp của định lý Szemerédi về sự tồn tại của cấp số cộng đủ dài trong các tập con của $\mathbb{N}$ với mật độ dương. Trong các công trình tiếp theo viết chung với Yitzhak Kaztnelson, Benjamin Weiss và những người khác, ông đã đưa ra các mở rộng ở số chiều cao hơn, và tổng quát hơn của định lý Szemerédi. Ngoài ra, ông và đồng nghiệp còn đưa ra các ứng dụng khác của động lực học tôpô và lý thuyết ergodic vào lý thuyết Ramsey và tổ hợp cộng tính. Các công trình này đã có ảnh hưởng nhiều đến sự phát triển sau này của tổ hợp cộng tính, như các kết quả của Ben Green, Terence Tao, và Tamar Ziegler về sự tồn tại các cấp số cộng đủ dài trong tập số nguyên tố, và giả thuyết Hardy-Littlewood.

Furstenberg đã dành phần lớn sự nghiệp của mình ở Israel để giúp biến Viện Toán học mang tên Einstein thành một trung tâm toán học tầm cỡ thế giới, đặc biệt là về lý thuyết ergodic. Nhiều tên tuổi trong lý thuyết ergodic hoặc các lý thuyết liên quan là các nhà toán học Israel trưởng thành từ trung tâm này, đơn cử như Elon Lindenstrauss (Huy chương Fields 2010). Năm 1993, Furstenberg đã giành giải thưởng Israel và giải thưởng Harvey của Israel. Như đánh giá của Hội đồng trao giải Harvey, lý do ông được nhận giải này là "để ghi nhận cống hiến cơ bản, đột phá của ông trong lý thuyết xác suất và ergodic, các nhóm Lie và động lực học tôpô" và vì "cách thức tài tình của ông khi sử dụng các công cụ nói để giải quyết nhiều vấn đề mở trong số học tổ hợp, qua đó mở ra một kỷ nguyên mới trong lĩnh vực số học tổ hợp."

Năm 2007, ông được trao giải thưởng Wolf về toán học, cùng với S. Smale (Huy chương Fields 1966). Ông là thành viên của Viện Hàn lâm Khoa học và Nhân văn Israel, Viện Hàn lâm Khoa học và Nghệ thuật Hoa Kỳ. Fustenberg có nhiều thế hệ học trò xuất sắc, như Alexander Lubotzky, Yuval Peres, Tamar Ziegler, Shahar Mozes và Vitaly Bergelson.

Gregory Aleksandrovich Margulis là nhà toán học Mỹ gốc Nga. Ông sinh năm 1946 và được thế giới biết đến vì những công trình về dàn trong nhóm Lie, và về việc ứng dụng các phương pháp của lý thuyết ergodic vào lý thuyết xấp xỉ Diophant. Ông đã được trao Huy chương Fields năm 1978, Giải Wolf về Toán học năm 2005 và trở thành nhà toán học thứ năm nhận được cả ba giải thưởng (Fields, Wolf và Abel).

Gregory Margulis năm 1978.
Ảnh: George M. Bergman, Berkeley.

Margulis sinh ra trong một gia đình Do Thái Nga ở Moscow, Liên Xô. Năm

1962, ở tuổi 16, Margulis giành được huy chương bạc tại Olympic Toán học quốc tế. Ông nhận bằng tiến sĩ năm 1970 từ Đại học quốc gia Moscow, bắt đầu nghiên cứu về lý thuyết ergodic dưới sự hướng dẫn của Yakov Sinai và làm việc tại Viện Truyền tải thông tin của Viện Hàn lâm Khoa học Liên Xô (cũ). Năm 1991, ông gia nhập Khoa Toán của Đại học Yale, nơi ông hiện là giáo sư toán học mang danh Erastus L. De Forest.

Công trình đầu tiên của Margulis với David Kazhdan đã đưa ra Định lý Kazhdan-Margulis, một kết quả cơ bản về nhóm rời rạc. Định lý về tính siêu chặt (superrigidity) chứng minh năm 1975 của ông đã giúp giải quyết dần các giả thuyết kinh điển về việc đặc trưng các nhóm số học trong lớp các dàn trong các nhóm Lie.

Gregory Margulis đã cách mạng hóa việc nghiên cứu các dàn trong các nhóm Lie nửa đơn. Một dàn trong một nhóm là một nhóm con rời rạc sao cho thương tương ứng của chúng có một độ đo hữu hạn. Vào giữa những năm 1970, Margulis đã phân loại các dàn này cho trường hợp các nhóm Lie nửa đơn, trong các định lý về tính siêu chặt và về tính số học (arithmeticity). Borel và Harish-Chandra đã xây dựng các dàn số học trong các nhóm Lie nửa đơn bằng các xây dựng số học, chủ yếu như là các nhóm ma trận có hệ số nguyên trong một nhóm ma trận lớn hơn. Margulis đã chứng minh rằng tất cả dàn có hạng phân rã từ 2 trở lên đều là các nhóm con (dựa trên các xây dựng) số học, qua đó chứng minh giả thuyết nổi tiếng của Atle Selberg[(3)].

Margulis đã chứng minh rằng với các giả thiết phù hợp trên nhóm Lie nửa đơn G (không có các thành phần com-pắc, hạng thực phân rã lớn hơn hoặc bằng hai), thì một dàn bất khả quy Γ tùy ý luôn là số học, tức là có thể thu được theo cách của Borel và Harish-Chandra. Cụ thể, Γ là thông ước với nhóm con $G(\mathbb{Z})$ của G, tức là giao của Γ và $G(\mathbb{Z})$ có chỉ số hữu hạn trong cả hai nhóm. Do đó, những kết quả này của Margulis mở đường cho việc phân loại các dàn. Tính chất *số học* liên quan chặt chẽ đến một tính chất đáng chú ý khác của dàn được phát hiện bởi Margulis, đó là tính *chặt* (rigid). Tính chặt của một dàn Γ trong G có thể hiểu nôm na là bất kỳ đồng cấu nào của Γ vào nhóm ma trận $n \times n$ khả nghịch có thể mở rộng lên toàn bộ G. Thuật ngữ này xuất phát từ tính chất sau:

Cho G và G' là các nhóm đại số nửa đơn trên một trường địa phương không có các thành phần com-pắc và có hạng phân rã ít nhất là 2, Γ và Γ' là các dàn bất khả quy trong chúng. Cho $f : \Gamma \to \Gamma'$ là một đồng cấu giữa các dàn. Khi đó f tương thích với hạn chế của một đồng cấu giữa các nhóm đại số $\pi : G \to G'$ trên một nhóm con có chỉ số hữu hạn của Γ.

(Trường hợp khi f là một đẳng cấu được gọi là có tính siêu chặt (superrigidity). Trong khi các hiện tượng chặt nhất định đã được biết đến trước đó, cách tiếp cận của Margulis đồng thời là mới mẻ, mạnh và rất đẹp.)

Vào năm 1978, Margulis đã thiết lập cấu trúc của các dàn thông qua định lý về "nhóm con chuẩn tắc". Mấu chốt trong chứng minh định lý của ông là sử dụng phương pháp xác suất một cách đầy điêu luyện và bất ngờ (trong đó có các bước ngẫu nhiên, định lý của Oseledets, biên Furstenberg), bên cạnh tính chất (T) của Kazhdan. Cũng vào năm 1978, Margulis được Đại hội Toán học Quốc tế tại Helsinki trao tặng Huy chương Fields, song không thể đến nhận giải vì phong

(3)Nhà toán học Mỹ gốc Na Uy, Huy chương Fields năm 1950.

trào bài Do Thái ở Liên Xô. Jacques Tits (Giải Abel năm 2008 cùng với John G. Thompson (Huy chương Fields 1970)) là người giới thiệu các công trình kể trên của Margulis tại Helsinki. Tits nói rằng trong cả cuộc đời mình, năm dành để nghiên cứu các công trình của Margulis là năm ông học được nhiều điều về toán học nhất.

Margulis đã giải quyết vấn đề Banach–Ruziewicz, hỏi rằng trên quả cầu n chiều, liệu độ đo Lebesgue có phải là độ đo duy nhất đồng thời có các tính chất: cộng tính hữu hạn, chuẩn hóa, bất biến đối với phép quay, hay không? Gần như cùng thời điểm và độc lập với Margulis, lời giải khẳng định cho $n > 3$, cũng được Dennis Sullivan đưa ra, sau khi xây dựng một nhóm con trù mật của nhóm trực giao có tính chất (T).

Trong luận án tiến sĩ vào năm 1970, Margulis đã xây dựng độ đo Bowen-Margulis của một đa tạp Riemann với độ cong biến đổi âm chặt (strictly negative variable curvature). Sử dụng tính chất trộn của dòng trắc địa đối với độ đo này, ông đã chứng minh một mệnh đề tương tự như định lý về phân bố số nguyên tố, cụ thể là công thức tiệm cận cho số các đường trắc địa đóng không dài hơn một đại lượng cho trước. Trước đây, kết quả đếm duy nhất kiểu như vậy cần dùng đến công thức vết của Selberg, và chỉ áp dụng được cho các không gian đối xứng địa phương. Kể từ công trình của Margulis, rất nhiều bài toán về đếm và phân bố đều đã được nghiên cứu bằng cách sử dụng cách tiếp cận pha trộn của Margulis.

Một ứng dụng ngoạn mục khác của các phương pháp của Margulis là chứng minh năm 1984 cho một giả thuyết trong lý thuyết số của Oppenheim (được đưa ra từ 1929):

Cho $f(x_1, \ldots, x_n)$ một dạng toàn phương không suy biến, không xác định (dương/âm), với hệ số thực và với số biến $n \geq 3$. Khi đó hoặc $f(x_1, \ldots, x_n)$ nhận một tập hợp các giá trị trù mật trong tập các số thực khi các biến chạy trên $\mathbb{Z}$, hoặc $f(x_1, \ldots, x_n)$ là bội của một dạng toàn phương với các hệ số hữu tỷ.

Đây là một câu hỏi mở tồn tại hơn nửa thế kỷ, trong đó những kết quả chính đã thu được bằng phương pháp đường tròn của Hardy và Littlewood; nhưng để giảm số lượng biến đến mức tốt nhất có thể, các phương pháp mang tính cấu trúc hơn từ lý thuyết nhóm Lie đã chứng tỏ vai trò quyết định. Margulis đã xây dựng một chương trình nghiên cứu tiếp theo để phát triển các thành tựu trên, mục tiêu bao gồm cả giả thuyết Littlewood.

Trong lý thuyết đồ thị, sự sáng tạo của Margulis được thể hiện qua công trình năm 1973, trong đó ông xây dựng một họ các đồ thị giãn nở tường minh đầu tiên, bằng cách dùng tính chất (T) của Kazhdan. Đồ thị giãn nở là đồ thị có tính liên thông mạnh và đã được định nghĩa bởi Mark Pinsker, liên quan đến việc nghiên cứu các mạng truyền thông. Đồ thị giãn nở giờ đây là một công cụ cơ bản trong khoa học máy tính và mã sửa sai. Vào năm 1988, Margulis đã xây dựng các đồ thị giãn nở tối ưu (optimal expanders), hiện nay được gọi là đồ thị Ramanujan (và cũng được Alex Lubotzky, Peter Sarnak và Ralph Phillips độc lập tìm ra).

Margulis được bầu làm thành viên của Viện Hàn lâm Khoa học Quốc gia Hoa Kỳ năm 2001. Năm 2005, Margulis đã nhận được giải thưởng Wolf (cùng với S. Novikov (Huy chương Fields 1970)) vì "những đóng góp nền tảng cho đại số, cụ thể là cho lý thuyết các dàn trong các nhóm Lie nửa đơn, và những ứng dụng đáng kinh ngạc trong lý thuyết ergodic, lý thuyết biểu diễn, số học, tổ hợp và lý thuyết độ đo”.

TÀI LIỆU

[1] https://www.abelprize.no/c76018/binfil/download.php?tid=76077

[2] https://www.ams.org/news?class_id=1&expand=1&type=news

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Hillel_Furstenberg

[4] https://harveypz.net.technion.ac.il/harvey-prize-laureates/

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Grigory_Margulis

[6] J. Tits, *The work of Gregori Aleksandrovitch Margulis*. Proceedings of the ICM (Helsinki, 1978). Vol. 1. Helsinki: Academia Scientiarum Fennica. pp. 57–63, 1980.

Giải thưởng Viện Toán học 2019

Nguyễn Quốc Thắng(1)

Giải thưởng Viện Toán học là giải thưởng dành cho những nhà toán học trẻ làm việc tại Việt Nam và có thành tích đặc biệt xuất sắc trong nghiên cứu toán học.

Năm 1982, để khuyến khích các nhà toán học trẻ tích cực nghiên cứu, Viện Toán học thành lập Giải thưởng "Công trình nghiên cứu khoa học của cán bộ trẻ" để trao cho ứng viên là cán bộ của Viện có tuổi đời không quá 35 tuổi. Từ năm 1995, Viện Toán đổi tên là "Giải thưởng khoa học cho cán bộ trẻ" để trao cho ứng viên là cán bộ của Viện có tuổi đời không quá 40 tuổi. Từ năm 1997, giải thưởng được đổi tên thành "Giải thưởng Viện Toán học" và được trao cho ứng viên trong cả nước có tuổi đời không quá 40 tuổi. Ứng viên không nhất thiết là người Việt Nam nhưng phải đang làm việc (hoặc có vị trí làm việc) tại Việt Nam trong năm xét và có tuổi đời không quá 40 tuổi (tính đến ngày 1 tháng 1 năm xét Giải thưởng).

Giải thưởng Viện Toán học được xét và trao tặng hai năm một lần, vào các năm lẻ. Người nhận Giải thưởng sẽ được trao Giấy chứng nhận và một số tiền thưởng.

Năm nay Hội đồng Khoa học Viện Toán học đã nhận được nhiều hồ sơ rất xuất sắc của các ứng viên. Sau một quá trình lấy ý kiến phản biện từ các chuyên gia đầu ngành ở trong và ngoài nước cho tất cả các hồ sơ, bằng cách bỏ phiếu kín và với đa số phiếu tập trung, Hội đồng Khoa học đã chọn ra hai nhà toán học trẻ được tặng Giải thưởng Viện Toán học năm 2019 là TS. Nguyễn Đăng Hợp (Viện Toán học, Viện HL Khoa học và Công nghệ Việt Nam) và TS. Lê Quý Thường (Khoa Toán-Cơ-Tin học, Trường đại học KHTN, Đại học Quốc gia Hà Nội). Sau đây là sơ lược lý lịch khoa học và thành tích của hai nhà toán học trẻ này.

TS. Nguyễn Đăng Hợp. Ảnh: NVCC.

TS. Nguyễn Đăng Hợp sinh năm 1986, tốt nghiệp Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội, năm 2008 và bảo vệ luận án Tiến sĩ tại ĐH Osnabrück, CHLB Đức năm 2012.

(1)Viện Toán học, Viện HLKHCN Việt Nam. Email: nqthang@math.ac.vn

Lĩnh vực nghiên cứu của TS. Nguyễn Đăng Hợp là đại số giao hoán. Anh được trao Giải thưởng Viện Toán học năm 2019 vì những đóng góp xuất sắc của mình trong việc nghiên cứu Giải tự do, đại số Koszul và lũy thừa hình thức của các iđêan trong vành đa thức và được thể hiện trong cụm công trình sau:

[1] H.D. Nguyen, *Notes on the linearity defect and applications*, Illinois J. Math. **59** (2015), 637–662.

[2] H.D. Nguyen, P. D. Thieu, and T. Vu, *Koszul determinantal rings and $2 \times e$ matrices of linear forms*, Michigan Math. J. **64** (2015), 349–381.

[3] A. Conca, H.D. Nguyen and T. Vu, *Products of ideals of linear forms in quadric hypersurfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **147**, no. 5 (2019), 1867–1880.

[4] H.D. Nguyen and N.V. Trung, *Depth functions of symbolic powers of homogeneous ideals*, Invent. Math. **218**, no. 3 (2019), 779–831.

[5] H.T. Hà, H.D. Nguyen, N.V. Trung and T.N. Trung, *Symbolic powers of sums of ideals*, Math. Z. **294** (2020), 1499–1520.

TS. Lê Quý Thường. Ảnh: NVCC.

TS. Lê Quý Thường sinh năm 1981, tốt nghiệp Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội, năm 2004, tốt nghiệp Thạc sỹ tại cùng trường năm 2006 và Bảo vệ luận án Tiến sĩ tại ĐH Paris 6, Cộng hòa Pháp, năm 2012.

Lĩnh vực nghiên cứu của TS. Lê Quý Thường là tích phân motivic và lý thuyết kỳ dị. Anh được trao Giải thưởng Viện Toán học năm 2019 vì những đóng góp xuất sắc của mình trong việc nghiên cứu tích phân motivic, không gian Berkovich và ứng dụng lý thuyết mô hình trong lý thuyết kỳ dị và được thể hiện trong cụm công trình sau:

[1] Lê Quy Thuong, *Proofs of the integral identity conjecture over algebraically closed fields*, Duke Math. J. **164** (2015), 157–194.

[2] Quy Thuong Lê, *The motivic Thom-Sebastiani theorem for regular and formal functions*, J. Reine Angew. Math. **735** (2018), 175–198.

[3] Lê Quy Thuong, Nguyen Hong Duc, *Euler reflexion formulas for motivic multiple zeta functions*, J. Algebraic Geom. **27** (2018), 91–120.

[4] Lê Quy Thuong, *A proof of the l-adic version of the integral identity conjecture for polynomials*, Bull. Soc. Math. France **147** (2019), 355–375.

[5] Lê Quy Thuong, Nguyen Hong Duc, *Equivariant motivic integration and proof of the integral identity conjecture for regular functions*, Math. Ann. **376** (2020), 1195–1223.

Tin tức hội viên và hoạt động toán học

* **Quỹ Đổi mới sáng tạo VinIF** (Viện nghiên cứu dữ liệu lớn VinBDI) đã xây dựng Chương trình hợp tác và tài trợ đào tạo thạc sĩ chất lượng cao trong nước liên

quan đến lĩnh vực Khoa học dữ liệu và Học máy với năm cơ sở đào tạo thuộc các viện nghiên cứu, trường đại học sau: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Hà Nội, Viện Công nghệ Thông tin và Truyền thông – Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội, Viện Toán học, Viện John von Neumann và Trường Đại học Khoa học tự nhiên – Đại học Quốc gia Hồ Chí Minh, Trường Đại học Quy Nhơn. Trong tháng 2 và tháng 3, VinIF và lãnh đạo các cơ sở đào tạo đã họp thảo luận và đề xuất quy chế chung về việc phát triển Chương trình (dự kiến tài trợ 3 năm từ năm 2020, bao gồm tổ chức các khóa học thạc sĩ với các giáo sư uy tín trên thế giới, hợp tác khoa học và đào tạo học viên cao học).

* Từ 1/4/2020, **Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán** chuyển về trụ sở mới sau một thời gian xây dựng. Địa chỉ trụ sở mới của Viện là số **157** phố Chùa Láng, phường Láng Thượng, quận Đống Đa, Hà Nội.

* **PGS. Nguyễn Thạc Dũng** (Trường ĐHKHTN, ĐHQGHN) nhận được tài trợ từ Chương trình học giả Abel của Liên đoàn Toán học Thế giới IMU, sẽ sang làm việc tại Đại học California ở Santa Barbara trong thời gian một tháng trong năm 2020.

* **Giải thưởng Lê Văn Thiêm** năm 2019 đã được trao cho năm thầy cô giáo và học sinh có tên sau đây.

TS. Phạm Văn Quốc, sinh năm 1980, giáo viên THPT Chuyên KHTN – ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội. Thầy Quốc hoàn thành luận án tiến sĩ năm 2008 tại Nhật Bản. Thầy tham gia đào tạo học sinh chuyên Toán từ năm 2002, và đã có công bồi dưỡng 16 huy chương toán quốc tế IMO. Trong số các học sinh được thầy đào tạo từ 2010 đến nay, đã có 3 huy chương vàng, 3 huy chương bạc, 1 huy chương đồng tại IMO.

Thầy Hồ Sỹ Hùng, sinh năm 1980, giáo viên Trường THPT chuyên Phan Bội Châu, tỉnh Nghệ An. Thầy Hùng bắt đầu sự nghiệp giảng dạy từ năm 2002, và đã góp phần đào tạo 16 học sinh đoạt giải tại kỳ thi HSG quốc gia, và 2 huy chương IMO.

Bạn Nguyễn Nguyễn, cựu học sinh Phổ thông Năng khiếu, ĐHKHTN, ĐHQG Tp. HCM, huy chương vàng IMO 2019. Hiện bạn Nguyễn đang là sinh viên ĐHKHTN, ĐHQG Tp. HCM.

Bạn Nguyễn Thuận Hưng, cựu học sinh THPT Chuyên Trần Phú, Hải Phòng, huy chương vàng IMO 2019. Hiện bạn Hưng đang là sinh viên ĐH Sư phạm Hà Nội.

Bạn Vũ Đức Vinh, học sinh lớp 12 THPT chuyên Phan Bội Châu, tỉnh Nghệ An. Tuy điều kiện xuất thân và hoàn cảnh gia đình không thuận lợi, bạn Vinh đã đoạt huy chương bạc IMO 2019, trong số nhiều thành tích xuất sắc khác.

* **Một số hoạt động thường niên** của Hội Toán học đầu năm 2020 đã bị huỷ do diễn biến phức tạp của dịch bệnh viêm đường hô hấp cấp Covid-19 ở Việt Nam và trên thế giới. Buổi gặp mặt đầu xuân của Hội Toán học dự kiến tổ chức vào ngày 9/2 cùng với lễ trao giải thưởng Lê Văn Thiêm đã được thông báo huỷ vào cuối tháng 1. Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên và Học sinh lần thứ 28 cũng vừa được Ban Tổ chức kỳ thi quyết định huỷ. Kỳ thi được dự kiến tổ chức tại Trường đại học Sư phạm - Đại học Huế từ ngày 6-12/4/2020. Trong những năm gần đây, mỗi năm kỳ thi thu hút khoảng 80-90 trường đại học, cao đẳng, học viện tham gia với 350 sinh viên thi môn Đại số và 350 sinh viên thi môn Giải tích. Ngoài ra có khoảng 10 trường THPT chuyên

với gần 100 học sinh tham gia thi mảng phổ thông. Do ảnh hưởng của dịch Covid-19 nên một loạt các hội thảo khoa học, trường chuyên biệt (school) tổ chức tại các trường đại học và các viện nghiên cứu cũng đã tạm hoãn hoặc huỷ.

* **Vừa qua các nhà khoa học Việt Nam**, đã và đang nghiên cứu và học tập tại Trung tâm Vật lý lý thuyết Quốc tế Abdus Salam (ICTP) và Trường Quốc tế về Nghiên cứu cao cấp (SISSA), đã tổ chức quyên góp ủng hộ thành phố Trieste đang phải chống đỡ dịch Covid-19. Sau một tuần thông báo, nhóm đã chuyển cho Đại sứ quán Cộng hòa Italia tại Hà Nội số tiền hơn 270 triệu đồng. ĐSQ Italia đã ra thông cáo báo chí cảm ơn sự giúp đỡ công cuộc chống dịch tại Italia, từ phía Việt Nam, trong đó có nhóm các nhà khoa học Việt Nam nói trên.

Tin thế giới

* **Bảng phân loại lĩnh vực toán học 2020** (2020 Mathematics Subject Classification - MSC2020) đã được công bố và chính thức sử dụng từ 1/1/2020. Bảng phân loại MSC2020 là bản sửa đổi của MSC2010 được Mathematical Reviews (MR) và Zentralblatt für Mathematik (zbMATH) sử dụng từ năm 2010. Đây là kết quả của nỗ lực hợp tác trong hơn hai năm của các biên tập viên của hai cơ sở dữ liệu lớn nhất về các công bố toán học hiện nay MR và zbMATH. Các sửa đổi cũng dựa trên nhiều đề xuất hữu ích từ cộng đồng toán học trong quá trình sửa đổi. So với bảng phân loại MSC2010, chỉ có một số thay đổi về mã số hoặc tên của một số mục con F1, F2, phản ánh phần nào sự phát triển hoặc thậm chí xuất hiện của một số lĩnh vực nghiên cứu. Các mục lớn (F0) không có thay đổi gì. Thông tin chi tiết có trên trang web của MR(1) hoặc zbMATH(2).

* **Louis Nirenberg**, giải thưởng Abel 2015, đã qua đời ngày 26/1/2020, hưởng thọ 95 tuổi. Ông sinh năm 1925 tại Canada và nhận bằng cử nhân toán học và vật lý tại Đại học McGill năm 1945. Tuy lúc đầu muốn theo đuổi vật lý lý thuyết, sau khi hoàn thành luận văn thạc sĩ toán học năm 1947, ông thay đổi dự định và hai năm sau bảo vệ luận án tiến sĩ toán học tại Đại học New York dưới sự hướng dẫn của James Stoker. Sau khi nhận được học vị tiến sĩ, ông đến làm việc tại Viện Courant thuộc Đại học New York, và ở đó cho đến khi mất. Hướng nghiên cứu chính của Louis Nirenberg là lý thuyết phương trình đạo hàm riêng. Trong sự nghiệp của mình, Nirenberg đã đạt được rất nhiều giải thưởng danh giá như: Giải tưởng niệm Bôcher (1959), Giải Crafoord (1982), Giải Steele (1994, 2014), Huy chương Chern (2010), Giải Abel (2015). Chi tiết hơn về cuộc đời và một số đóng góp toán học quan trọng của ông, xem bài viết của Tristan Rivière trên Thông Tin Toán Học tập 21 số 4 (năm 2017) và tập 22 số 1 (năm 2018).

Louis Nirenberg năm 1979.
Ảnh: Konrad Jacobs, Erlangen.

(1) https://mathscinet.ams.org/msc/msc2010.html

(2) https://zbmath.org/classification/

Thông báo

IM-Simons postdoctoral Fellowship 2020

The Institute of Mathematics (IM), Vietnam Academy of Science and Technology invites applications for 5 positions of the IM-Simons postdoctoral Fellowship Program, 2020-2021. The initial appointment will be for one year, with possibility of extension up to a second year. Renewal for the second year will depend on a comprehensive review of the scientific activity of the fellow.

The targets of this program are:

(1) to attract foreign young researchers to work at the institute;

(2) to provide Vietnamese young researchers a bridge to a long-term scientific career.

Eligibility

Applications are invited from qualified researchers under 40 years of age who have a PhD degree in mathematics no more than five years before the deadline of the application. Preferences will be given to research areas of the institute, see the website http://math.ac.vn/en/.

Salary and benefits

The salary will be 1.000 USD per month plus support for accommodation. In addition, the fellows will receive a round flight ticket and a research grant up to 1.000 USD per year for attending conferences and small equipment.

How to Apply

Interested candidates should submit the following documents to `im_simons@math.ac.vn`:

- Curriculum vitae;
- List of publications;
- A research proposal (no more than four pages);
- Two recommendation letters.

The submission deadline is June 01, 2020. Applications will be considered until the positions are filled. The expected starting date of the fellowship is September 1, 2020. Informal queries should be sent to the above email address.

THÔNG TIN TOÁN HỌC, Tập 24 Số 1 (2020)