

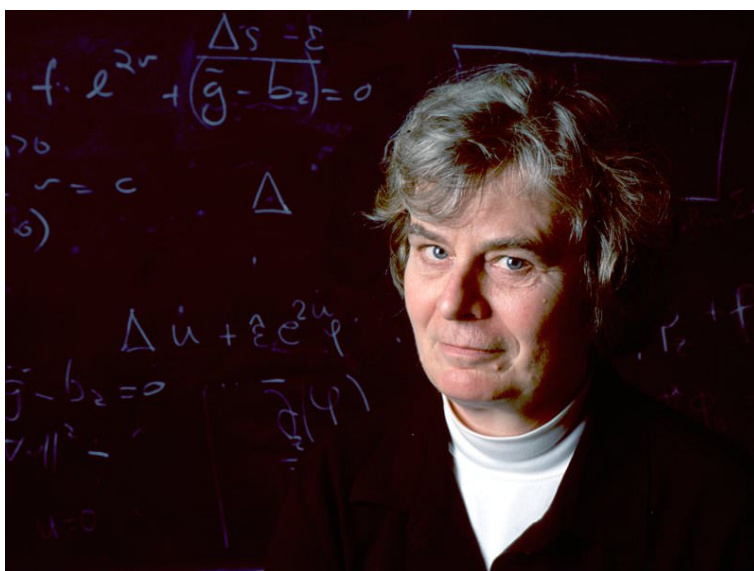
Hội Toán Học Việt Nam



THÔNG TIN TOÁN HỌC

Tháng 12 Năm 2019

Tập 23 Số 4



Thông Tin Toán Học

(Lưu hành nội bộ)

- Tổng biên tập
Đoàn Trung Cường
 - Phó tổng biên tập
Nguyễn Thị Lê Hương
 - Thư ký tòa soạn
Nguyễn Đăng Hợp
 - Ban biên tập
Ngô Quốc Anh
Phan Thị Hà Dương
Nguyễn Đặng Hồ Hải
Ngô Hoàng Long
Đỗ Đức Thuận
Nguyễn Chu Gia Vượng
 - Địa chỉ liên hệ
- Bản tin **Thông Tin Toán Học** nhằm mục đích phản ánh các sinh hoạt chuyên môn trong cộng đồng toán học Việt Nam và quốc tế. Bản tin ra thường kỳ 4 số trong một năm.
 - Thể lệ gửi bài: Bài viết bằng tiếng Việt. Tất cả các bài, thông tin về sinh hoạt toán học ở các khoa (bộ môn) toán, về hướng nghiên cứu hoặc trao đổi về phương pháp nghiên cứu và giảng dạy đều được hoan nghênh. Bản tin cũng nhận đăng các bài giới thiệu tiềm năng khoa học của các cơ sở cũng như các bài giới thiệu các nhà toán học. Bài viết xin gửi về tòa soạn theo email hoặc địa chỉ ở trên. Nếu bài được đánh máy tính, xin gửi kèm theo file với phong chữ unicode.

*Bản tin: **Thông Tin Toán Học**
Viện Toán Học
18 Hoàng Quốc Việt, 10307 Hà Nội*

Email: ttth@vms.org.vn

Trang web:
<http://www.vms.org.vn/ttth/ttth.htm>

Ảnh bìa 1. GS. Karen Uhlenbeck, giải thưởng Abel 2019 (xem bài trang 2). Ảnh do Marsha Miller chụp.

© Hội Toán Học Việt Nam

Trang web của Hội Toán học:
<http://www.vms.org.vn>

Gặp Mặt Đầu Xuân Canh Tý

Nhân dịp năm mới 2020 và Tết Canh Tý, Ban chấp hành Hội Toán học Việt Nam kính chúc quý vị đồng nghiệp một năm mới luôn Mạnh khỏe, Hạnh phúc và Thành công

Ban Chấp hành Hội Toán học Việt Nam trân trọng kính mời tất cả các hội viên của Hội đang có mặt tại Hà Nội và các vùng lân cận tham dự buổi Gặp mặt đầu Xuân 2020.

Thời gian: Chủ Nhật, ngày 9/2/2020 (tức ngày 16 tháng Giêng năm Canh Tý).

Địa điểm: Viện Toán học, Viện Hàn lâm KHCN Việt Nam, 18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà Nội.

Chương trình:

- 9h-9h30: Đón tiếp tại Hội trường Viện Toán học.
- 9h30-10h: Báo cáo tổng kết công tác năm 2019 của Hội và Chúc mừng các hội viên cao tuổi.
- 10h-11h00: Lễ kỷ niệm 30 năm Giải thưởng Lê Văn Thiêm và trao giải thưởng Lê Văn Thiêm 2019.
- 11h-13h: Liên hoan tiệc đứng.

Đăng ký tham dự: Để có thể đặt liên hoan phù hợp, kính đề nghị các tập thể và cá nhân hội viên đăng ký và báo số lượng người tham dự bằng email tới thuky@vms.org.vn trước ngày 6/2/2020.

Phí liên hoan: Miễn phí đối với hội viên. Người nhà đi cùng đóng góp 150.000 đồng/người lớn, 100.000/trẻ em (dưới 10 tuổi). Rất mong sự có mặt của quý vị.

(Lời mời này thay cho giấy mời riêng)

Ảnh nền: Kevin O'Connor.

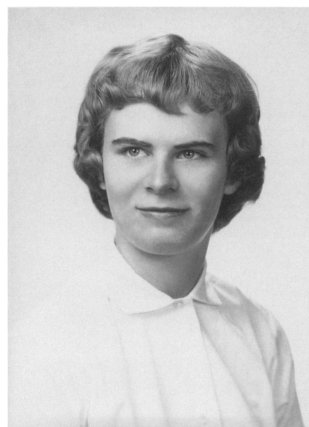
Karen Uhlenbeck và giải thưởng Abel năm 2019

Ngô Quốc Anh⁽¹⁾

Ngày 19 tháng 3 năm 2019 vừa qua, Viện hàn lâm Khoa học Na Uy đã công bố nhà toán học nữ Karen K. Uhlenbeck là chủ nhân của giải thưởng Abel năm 2019. Buổi lễ trao giải đã được long trọng tổ chức tại Đại học Aula (Oslo, Na Uy) vào ngày 21 tháng 5 dưới sự chứng kiến của Nhà vua Harald V.

Karen Uhlenbeck sinh năm 1942 tại Cleveland (bang Ohio, Hoa Kỳ), bà hiện đang là giáo sư danh dự (emeritus professor) tại Đại học Texas, Austin. Bà được trao giải thưởng Abel năm 2019 vì *những thành tựu tiên phong trong lý thuyết các phương trình đạo hàm riêng hình học, lý thuyết các trường chuẩn, lý thuyết các hệ khả tích, và vì tầm ảnh hưởng của các công trình của bà trong giải tích, hình học, và vật lý toán.*⁽²⁾ Nói về quyết định trao giải Abel cho Karen Uhlenbeck, giáo sư toán học Sun-Yung Alice Chang của ĐH Princeton, một trong 5 thành viên của hội đồng xét giải năm 2019⁽³⁾, đã phát biểu như sau: *“Uhlenbeck đã nghiên cứu những vấn đề không ai dám nghĩ tới, và mỗi khi hoàn thành công việc, bà lại mở ra những hướng nghiên cứu toán học mới.”*

Tổng hợp thông tin chủ yếu từ tài liệu [2] của Simon Donaldson, có tham khảo thêm thông tin trong các bài [1] của Kenneth Chang, và [3] của Erica Klarreich, bài viết này sẽ đi qua một vài cột mốc quan trọng trong cuộc đời của Karen Uhlenbeck cũng như một vài điểm nhấn ở thời kỳ đầu trong gia tài đồ sộ các công trình của bà.



Karen K. Uhlenbeck thời trẻ. Nguồn: Liên hiệp Toán học Hoa Kỳ (MAA).

Có thể nói quay xung quanh Karen Uhlenbeck là những câu chuyện thú vị và sâu sắc về con đường đến với toán học, quá trình theo đuổi nghiên cứu toán và cuối cùng là việc gặt hái thành công từ toán. Như tác giả Erica Klarreich đã viết trong bài báo [3] trên Tạp chí Quanta sau khi biết thông tin Uhlenbeck là chủ nhân của giải thưởng Abel năm 2019, dù *thuở nhỏ rất ham đọc sách, nhưng Karen Uhlenbeck không thực sự cảm thấy hứng thú với toán học cho đến khi học năm thứ nhất tại Đại học Michigan (Ann Arbor).*

Sinh ra trong một gia đình trung lưu có bố là kỹ sư và mẹ là nghệ sĩ, cô nhận được ủng hộ từ gia đình trong việc tiếp tục theo đuổi việc học hành sau khi tốt nghiệp phổ thông. Ước mơ được học tại Học viện Công nghệ Massachusetts (MIT) hoặc tại Đại học Cornell (Ithaca, bang New York) nhưng vì kinh tế của gia đình không cho

⁽¹⁾Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội. Email: nganh@vnu.edu.vn

⁽²⁾Nguồn: <https://www.abelprize.no/c73996/binfil/download.php?tid=74095>.

⁽³⁾Theo trang web [abelprize.no](https://www.abelprize.no), năm thành viên của hội đồng xét giải năm 2019 gồm: Hans Munthe-Kaas, Irene Fonseca, Sun-Yung Alice Chang, Gil Kalai, và François Labourie.

phép nên cô phải chọn Đại học Michigan để theo học.

Thời gian đầu khi mới vào đại học, Karen Uhlenbeck dự định theo học chuyên ngành vật lý nhưng việc thường xuyên bị điểm danh trong các giờ học cũng như các hoạt động trong các phòng thí nghiệm đã khiến Uhlenbeck cảm thấy không thoải mái với sự lựa chọn ban đầu này, do đó cô quyết định lựa chọn cho mình một chuyên ngành khác.⁽⁴⁾ Theo thông tin trong cuốn sách *Mathematicians: An outer view of the inner world* của Mariana Ruth Cook, Karen Uhlenbeck đã nhanh chóng bị thu hút bởi các cấu trúc rõ ràng, sự lô-gíc, và vẻ đẹp của toán học. Cô còn nhanh chóng nhận ra rằng việc nghiên cứu toán học là kiểu hoạt động mà người ta có thể tự do thực hiện một mình và ở bất cứ nơi đâu nếu muốn.

Sau khi tốt nghiệp Đại học Michigan, cô tiếp tục chương trình nghiên cứu sinh tại Viện Courant lừng danh của Đại học New York. Tuy nhiên, vì kết hôn với nhà vật lý sinh học Olke C. Uhlenbeck và phải chuyển đến Massachusetts để sinh sống, cô đã chuyển đến học tại Đại học Brandeis. Đó là vào những năm 60 của thế kỷ trước. Năm 1968, với đề tài “*The calculus of variations and global analysis*” (Phép tính biến phân và giải tích toàn cục) dưới sự hướng dẫn của Richard Palais, Karen Uhlenbeck bảo vệ thành công luận án tiến sĩ. Uhlenbeck bắt đầu con đường toán học sau tiến sĩ tại MIT và Đại học California ở Berkeley. Năm 1971, cô chuyển đến Đại học Illinois ở Urbana-Champaign. Đây là điểm xuất phát đưa cô đến vị trí người đặt nền móng cho giải tích hình học hiện đại, vị trí mà ngày nay đã được cộng đồng toán học thừa nhận rãi.

Phép tính biến phân đã được biết đến từ thế kỷ thứ 18 mà ở dạng đơn giản nhất

chính là việc tìm hiểu trạng thái dừng của các phiếm hàm được viết dưới dạng

$$F(u) = \int \Phi(u(x), u'(x)) dx$$

tương ứng với sự thay đổi nhỏ của u . Các phiếm hàm như trên được biết đến với tên gọi là các phiếm hàm năng lượng. Điều kiện về tính dừng của phiếm hàm F được mô tả thông qua (hệ) phương trình Euler–Lagrange

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial u'}.$$

Điều thú vị là ở chỗ nghiệm u trong phương trình Euler–Lagrange ở trên không nhất thiết phải một hàm xác định trên một miền của $\mathbb{R}^n$, nó có thể là các đối tượng hình học phức tạp như ánh xạ, mê-tríc, liên thông, v.v. Ở góc độ này, người ta có thể xem phương trình Euler–Lagrange như một dạng đạo hàm của phiếm hàm F tại u theo một nghĩa nào đó và do đó nghiệm u của phương trình Euler–Lagrange có thể được hiểu là một *điểm tới hạn* của phiếm hàm F .

Để thấy được tầm quan trọng của phương trình Euler–Lagrange và phép tính biến phân, chúng ta có thể đề cập đến bài toán tìm đường đi ngắn nhất trên mặt phẳng nối hai điểm cho trước. Để đơn giản về mặt ký hiệu ta phát biểu bài toán dưới dạng tìm hàm $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ‘đủ tốt’ với hai điều kiện $y(a) = c$ và $y(b) = d$ sao cho đại lượng

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

là nhỏ nhất. Khái niệm đủ tốt ở đây có thể hiểu là hàm y khả vi liên tục trên (a, b) . Biểu thức tích phân ở trên chính là độ dài của đoạn đường cong $(x, y(x))$ khi x thay đổi từ a đến b . Biểu thức này có thể xem là năng lượng của hàm y cần xác định.

⁽⁴⁾Nguồn: <https://web.ma.utexas.edu/users/uhlen/vita/pers.html>.

Bằng cách sử dụng phương trình Euler-Lagrange với

$$\Phi(y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

ta đi đến phương trình

$$0 = \frac{d}{dx} \frac{y'}{1 + y'^2}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân trên có dạng

$$y(x) = ax + b$$

trong đó a và b là các hằng số nào đó. Nói cách khác, đường cong phẳng nối hai điểm có độ dài ngắn nhất nhất thiết là một đoạn thẳng.

Một ví dụ khác mà ta có thể xem xét khi đề cập đến phương trình Euler-Lagrange là bài toán đường đoản thời được Bernoulli đặt ra năm 1696 về đường đi *nhANH NHẤT* cho một quả bóng tròn lăn từ một điểm cao P_1 xuống một điểm thấp hơn P_2 . Thời gian để quả bóng di chuyển từ P_1 đến P_2 được tính theo công thức

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v}$$

trong đó ds là vi phân cung và v là vận tốc của quả bóng. Nếu $u(x)$ là hàm mô tả đường cong cần tìm, thì khi đó định luật bảo toàn năng lượng cho ta

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgu,$$

tức là

$$v = \sqrt{2gu}.$$

Vì vậy, lời giải cho câu hỏi mà Bernoulli đặt ra là việc cực tiểu hoá phiếm hàm năng lượng

$$\int_{x(P_1)}^{x(P_2)} \sqrt{\frac{1 + u'(x)^2}{2gu(x)}} dx$$

để tìm đường cong tối ưu u .

Nếu xét các bài toán biến phân và vấn đề cực tiểu hoá một phiếm hàm năng lượng nào đó trên đối tượng là các

đa tạp Riemann thì các đường trắc địa (geodesics) là một ví dụ tốt về nghiệm của một lớp các bài toán biến phân. Giả sử N là một đa tạp Riemann liên thông. Cố định hai điểm $p, q \in N$ và xét họ $\mathcal{X}$ các đường cong trơn $\gamma : [0, 1] \rightarrow N$ nối p và q , tức là $\gamma(0) = p$ và $\gamma(1) = q$. Ta xét bài toán cực tiểu hoá phiếm hàm

$$\mathcal{F}(\gamma) = \int_0^1 \|\nabla \gamma\|^2$$

trên $\mathcal{X}$. Không khó để nhận ra rằng biểu thức $\mathcal{F}(\gamma)$ chính là độ dài của phần đường cong γ nối hai điểm p và q . Lời giải của bài toán tối ưu trên chính là nghiệm γ của phương trình Euler-Lagrange tương ứng, tức là

$$\gamma''_i = \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \gamma'_j \gamma'_k$$

và đây chính là phương trình của đường trắc địa nối p và q viết theo hệ tọa độ địa phương cùng với Γ_{ij}^k , là các ký hiệu Christoffel và là những đại lượng thể hiện cho tính chất cong của đa tạp N .

Tất nhiên nếu chúng ta chỉ đòi hỏi sự tồn tại đường trắc địa γ nối p và q thì có thể chứng minh một cách đơn giản dựa vào cách xấp xỉ như Moser đã làm để tránh tính chất vô hạn chiều của không gian $\mathcal{X}$. Tuy nhiên rất khó để lúc nào cũng có thể sử dụng phương pháp xấp xỉ của Moser, đặc biệt nếu chúng ta muốn phát triển một lý thuyết nào đó có tính phổ dụng cao hơn.

Rất may mắn cho chúng ta là việc chứng minh sự tồn tại của đường trắc địa γ nào đó nối hai điểm lại có thể được thực hiện bằng cách sử dụng tính compact của họ đường cong trong $\mathcal{X}$. Tính chất này được phát biểu như sau: Nếu $(\gamma_i)_i$ là một dãy các đường cong trong $\mathcal{X}$ với năng lượng $\mathcal{F}(\gamma_i)$ bị chặn thì luôn tồn tại một dãy con $(\gamma_{i_j})_j \subset (\gamma_i)_i$ hội tụ liên tục đến một đường cong γ trong $\mathcal{X}$.

Mặc dù kết quả về tính com-pắc của dãy đường cong $(\gamma_i)_i$ ở trên có thể được chứng minh một cách dễ dàng bằng cách sử dụng Định lý Arzelà–Ascoli⁽⁵⁾ nhưng điều thú vị nằm ở chỗ kết quả này không yêu cầu một sự hạn chế nào về số chiều của $\mathcal{X}$.

Theo hướng phát triển này chúng ta có thể phát biểu các bài toán tối ưu tổng quát có dạng

$$\inf_{u \in \mathcal{G}} \mathcal{F}(u)$$

trên không gian $\mathcal{G}$ nào đó và mong muốn rằng một dãy cực tiểu $(u_i)_i$ thích hợp sẽ hội tụ về nghiệm của bài toán tối ưu trên. Tất nhiên khi $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{X}}$ và $u = \gamma$ như ở trên thì bài toán tối ưu trên luôn có nghiệm. Mặc dù $\overline{\mathcal{X}}$ là một ví dụ tốt về tính giải được của bài toán tối ưu tổng quát trên lớp các đa tạp Hilbert vô hạn chiều, là các cấu trúc đa tạp mà ở đó sự đồng phôi và vi phôi gắn liền với các tập mở trong không gian Hilbert thay vì các tập mở trong không gian Euclid mà ta quen thuộc khi nghiên cứu các đa tạp khả vi, nhưng bài toán tối ưu tổng quát ở trên không phải lúc nào cũng có nghiệm khi $\mathcal{G}$ là một đa tạp Hilbert.

Phát hiện này đã thúc đẩy Palais và Smale trong các năm 1963-1964 đề xuất ‘Điều kiện C’⁽⁶⁾ về tính com-pắc của các phiếm hàm năng lượng khả vi liên tục trên các đa tạp Hilbert trừu tượng. Kết quả này mở đường cho việc hình thành một loạt các kỹ thuật tìm nghiệm cho các

phương trình đạo hàm riêng thông qua phương pháp biến phân.

Năm 1970, trong một công trình công bố trên *Bull. Amer. Math. Soc.*, Uhlenbeck đã mở rộng kết quả của Palais và Smale cho các đa tạp Banach, là lớp các cấu trúc đa tạp rộng hơn mà ở đó sự đồng phôi và vi phôi gắn liền với các tập mở trong không gian Banach.



Từ trái sang phải: Richard Palais và Stephen Smale. Nguồn: Internet.

Tuy nhiên, ngoại trừ bài toán tối ưu về đường trắc địa, phần lớn các bài toán trong hình học vi phân được quan tâm lại không thoả mãn tính com-pắc Palais–Smale. Ta sẽ xem xét vấn đề này thông qua ví dụ về các ánh xạ điều hoà từ các không gian có số chiều > 1 .

Giả sử (M, g_M) và (N, g_N) là các đa tạp Riemann, compact trong đó g_M và g_N lần lượt là các mê-tríc trên M và N . Với mỗi một ánh xạ $u : M \rightarrow N$, năng lượng của u được xác định thông qua phiếm hàm năng lượng Dirichlet dưới đây

$$\mathcal{F}(u) = \int_M \|\nabla u\|^2 d\mu_{g_M},$$

⁽⁵⁾Nếu $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ thì

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla \gamma\| \leq \sqrt{\mathcal{F}(\gamma)} \sqrt{t_2 - t_1}$$

và do đó ta có thể chứng minh tính com-pắc của dãy đường cong $(\gamma_i)_i$ bằng cách sử dụng Định lý Arzelà–Ascoli.

⁽⁶⁾Điều kiện C còn được biết đến với tên gọi điều kiện Palais–Smale (hoặc điều kiện PS) và rất hay được sử dụng trong lý thuyết các phương trình đạo hàm riêng thông qua phương pháp biến phân như là một tiêu chuẩn com-pắc để tìm các điểm tới hạn của một phiếm hàm năng lượng liên kết với bài toán cần giải.

trong đó kí hiệu $\|\nabla u\|$ để chỉ chuẩn của ∇u và $d\mu_{g_M}$ là dạng thể tích trên M . Ánh xạ u được gọi là *điều hoà* nếu u là một điểm tới hạn của phiếm hàm $\mathcal{F}$. Trong hệ toạ độ địa phương, ánh xạ điều hoà u thoả mãn hệ phương trình Euler–Lagrange dưới đây

$$\Delta_M u_i = \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \nabla u_j \nabla u_k,$$

trong đó Δ_M là toán tử Laplace trên đa tạp M . Có thể nhận ra phương trình Euler–Lagrange cho ánh xạ điều hoà u là một sự mở rộng tự nhiên của phương trình Euler–Lagrange cho các đường trắc địa γ đã đề cập ở trên nếu chọn $M = \mathbb{R}$, trong khi đó ánh xạ điều hoà u chính là hàm điều hoà nếu chọn $N = \mathbb{R}$. Các phương trình ánh xạ điều hoà giữa các đa tạp Riemann đã được nghiên cứu một cách hệ thống bởi Eells và Sampson từ những năm 1964.⁽⁷⁾ Tuy nhiên việc nghiên cứu chúng gặp nhiều khó khăn sẽ được chỉ ra ngay sau đây.

Giả sử M có số chiều $n > 1$. Xét bài toán chứng minh sự tồn tại của các ánh xạ điều hoà $u : M \rightarrow N$. Để bắt chước cách chứng minh sự tồn tại của đường trắc địa dựa vào tính com-pắc của dãy đường cong, ta mong muốn xấp xỉ

$$\inf_{u \in \mathcal{X}} \mathcal{F}(u)$$

bởi một dãy các ánh xạ $u_i : M \rightarrow N$. Rõ ràng năng lượng của $(u_i)_i$ là bị chặn và do đó ta hi vọng có thể trích ra được một dãy con các ánh xạ $(u_{i_j})_j \subset (u_i)_i$ sao cho u_{i_j} hội tụ đến một ánh xạ điều hoà u nào đó cần tìm. Tuy nhiên, việc cực tiểu hoá phiếm hàm năng lượng $\mathcal{F}$ trên $\mathcal{X}$ gặp khó khăn do bài toán mất tính com-pắc. Chẳng hạn, ta xét trường hợp $M = \mathbb{S}^2$ và

$$\Phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

là một ánh xạ Möbius. Do Φ là một ánh xạ bảo giác, các tính toán trực tiếp đối với phiếm hàm năng lượng Dirichlet $\mathcal{F}$ chỉ ra rằng $\mathcal{F}$ là bất biến theo nghĩa

$$\mathcal{F}(u \circ \Phi) = \mathcal{F}(u)$$

với mọi ánh xạ $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow N$. Hơn thế nữa, do lớp các ánh xạ Möbius không có tính com-pắc nên ta có thể xây dựng một dãy các ánh xạ $(u \circ \Phi_i)_i$ có cùng mức năng lượng nhưng không có tính com-pắc.

Trong những năm 1970 khi đang là giáo sư tại Đại học Illinois ở Urbana–Champaign, Karen Uhlenbeck đã bỏ ra nhiều công sức để tìm hiểu kỹ hơn vấn đề về việc mất tính com-pắc của $\mathcal{F}$ khi $n = 2$. Thời gian sinh sống tại Urbana–Champaign là những năm tháng khó khăn đối với Uhlenbeck, nên đến năm 1976 bà đã phải chuyển đến Đại học Illinois ở Chicago. Tuy nhiên giữa những năm tháng khó khăn này bà đã có cơ hội được gặp và cộng tác với nghiên cứu viên sau tiến sĩ Jonathan Sacks, người mà sau này cùng bà đã có những kết quả đột phá về lý thuyết các hàm điều hoà, là nền móng cho tầm ảnh hưởng sâu rộng của bà trên rất nhiều lĩnh vực có liên quan của toán học.

Trong công trình “*The existence of minimal immersions of 2-spheres*” được viết chung với Jonathan Sacks đăng trên *Annals of Mathematics* năm 1981, thay vì xét phiếm hàm năng lượng $\mathcal{F}$ cho các ánh xạ $u : M \rightarrow N$, Uhlenbeck và Sacks đã xấp xỉ $\mathcal{F}$ bằng cách sử dụng phiếm hàm năng lượng dạng

$$\mathcal{F}^\alpha(u) = \int_M (1 + |\nabla u|^2)^\alpha d\mu_{g_M},$$

trong đó $\alpha > 1$. Rõ ràng khi $\alpha = 1$ thì $\mathcal{F}^1(u)$ và $\mathcal{F}(u)$ chỉ sai khác nhau thể tích của M , do đó u là một ánh xạ điều hoà tương ứng với năng lượng $\mathcal{F}$ khi và chỉ

⁽⁷⁾J. Eells và J.H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.* **86** (1964) 109–160.

khi nó cũng là một ánh xạ điều hoà tương ứng với năng lượng $\mathcal{F}^1$. Khi $\alpha > 1$, từ biểu thức của phiếm hàm $\mathcal{F}^\alpha$, Uhlenbeck và Sacks nhận ra rằng có thể chứng minh được tính com-pắc của phiếm hàm $\mathcal{F}^\alpha$ và do đó bằng cách sử dụng các kỹ thuật cơ bản của phép tính biến phân, có thể chỉ ra sự tồn tại của một ánh xạ $u_\alpha : M \rightarrow N$ cực tiểu hoá phiếm hàm $\mathcal{F}^\alpha$ trong lớp các ánh xạ trơn từ M vào N . Vấn đề Uhlenbeck và Sacks quan tâm là đáng điệu của u_α khi $\alpha \searrow 1$. Tất nhiên từ việc mất tính com-pắc của $\mathcal{F}$ khi $n > 1$, ta không thể hi vọng thu được bất cứ một kết quả tổng quát nào về sự hội tụ của u_α khi $\alpha \searrow 1$.

Kết quả Uhlenbeck và Sacks hoàn thành từ 1977 và sau này được công bố trong năm 1981, khẳng định rằng tồn tại một tập hữu hạn $S \subset M$ và một hàm $u : M \rightarrow N$ sao cho

$$u_\alpha \rightarrow u$$

hội tụ theo tôpô C^∞ trên $M \setminus S$ và u có thể được thác triển thành một ánh xạ điều hoà từ M vào N . Hơn thế nữa, tại một điểm $p \in M$ mà u_α không hội tụ, tồn tại một ánh xạ điều hoà không tầm thường $v : \mathbb{S}^2 \rightarrow N$ sao cho bằng một cách co giãn u_α thích hợp trong một lân cận của p thì

$$u_\alpha \rightarrow v.$$

Các điểm p như trên được gọi là điểm kỳ dị và hiện tượng kỳ dị được mô tả như trên được gọi là kỳ dị (kiểu) bong bóng (bubble singularity). Phát hiện của Uhlenbeck và Sacks có liên hệ chặt chẽ với rất nhiều bước đột phá khác trong

các lĩnh vực khác nhau ở cùng thời điểm này. Chẳng hạn, chúng ta có thể thấy hiện tượng kỳ dị bong bóng cũng xuất hiện trong lý thuyết các đa tạp con cực tiểu, trong tôpô symplectic, trong lý thuyết các phương trình đạo hàm riêng với số mũ tới hạn mà tiêu biểu là bài toán Brezis–Nirenberg, và đặc biệt bài toán Yamabe về sự tồn tại của mê-tríc với độ cong vô hướng hằng trong hình học Riemann.

Một trong những ứng dụng đẹp của kết quả của Uhlenbeck và Sacks là định lý phân loại các đa tạp Riemann có số chiều ≥ 4 dựa vào điều kiện về tính dương của độ cong do Micallef và Moore chứng minh năm 1988.⁽⁸⁾ Kết quả này phát biểu rằng nếu N là một đa tạp Riemann có số chiều ≥ 4 , đơn liên và có độ cong dương trên bất kỳ một mặt phẳng đẳng hướng nào, thì N đồng luân với một mặt cầu. Do đó, từ lời giải cho Giả thuyết Poincaré, ta biết rằng N cũng đồng phôi với mặt cầu đó. Sử dụng kết quả của Micallef và Moore ta có thể thu được một cách chứng minh khác cho Định lý hình cầu của Berger và Klingenberg.⁽⁹⁾

Từ giữa năm 1979 đến giữa năm 1980 đánh dấu một khoảng thời gian vô cùng đặc biệt trong sự nghiệp làm khoa học của Uhlenbeck khi bà có cơ hội được làm việc tại Viện nghiên cứu cao cấp (IAS) ở Princeton trong một sê-ri các hoạt động của Viện liên quan đến năm hình học vi phân do Shing-Tung Yau điều hành.⁽¹⁰⁾ Trong thời gian ở IAS, bà có cơ hội được gặp gỡ, trao đổi với những đồng nghiệp mà sau này trở thành những tên tuổi lớn

⁽⁸⁾M. Micallef và J. Moore, Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes, *Annals of Math.* **127** (1988), 199–227.

⁽⁹⁾Định lý hình cầu nói rằng nếu độ cong cắt (sectional curvature) của đa tạp Riemann đơn liên và đầy N nằm trong khoảng $(1, 4]$ thì N đồng phôi với một hình cầu. Năm 2007, bằng cách sử dụng dòng Ricci, trong một công trình đăng trên *J. Amer. Math. Soc.*, Simon Brendle và Richard Schoen đã chứng minh được kết quả mạnh hơn rằng với những giả thiết như trong định lý hình cầu của Berger và Klingenberg thì N vi phôi với một hình cầu. Kết quả của Brendle và Schoen được biết đến với tên gọi “định lý hình cầu khả vi”.

⁽¹⁰⁾Nguồn: <https://hdl.handle.net/20.500.12111/6007>.

trong cộng đồng toán học. Trong số đó có Richard Schoen, mới chưa đầy 30 tuổi nhưng đã gây tiếng vang khi cùng Shing-Tung Yau chứng minh *Định lý khối lượng dương* trong vật lý toán dựa vào lý thuyết các mặt cực tiểu.⁽¹¹⁾



Karen Uhlenbeck tại Viện nghiên cứu cao cấp, Princeton, năm 1995. Nguồn: Internet.

Tại IAS, cộng tác cùng với Richard Schoen, bà đã công bố hai công trình mà sau này cộng đồng toán học vẫn thường gọi là *lý thuyết Schoen–Uhlenbeck cho các ánh xạ điều hoà*. Các công trình này đề cập đến tính chính quy của các ánh xạ điều hoà và từ đó mở ra con đường xây dựng các mặt cực tiểu trên các đa tạp trừu tượng thông qua việc giải các bài toán Dirichlet tương ứng.

Để thấy được tầm quan trọng của lý thuyết Schoen–Uhlenbeck cho các ánh xạ điều hoà, ta xét trường hợp của ánh xạ

$$u : B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad x \mapsto x/|x|.$$

Ánh xạ u ở trên là một ánh xạ điều hoà và nó là điểm tới hạn của phiếm hàm năng lượng Dirichlet nếu hạn chế trên lớp các ánh xạ điều hoà có vết trên biên là ánh xạ đồng nhất. Tuy nhiên u không liên tục tại gốc và do đó u là một ánh xạ điều hoà kì dị.

Kết quả đầu tiên trong lý thuyết của Schoen–Uhlenbeck là ước lượng số chiều của tập kì dị của các ánh xạ điều hoà $u : M \rightarrow N$.⁽¹²⁾ Một hệ quả của ước lượng trên là mọi ánh xạ điều hoà từ một mặt hai chiều vào N luôn trơn. Nói một cách rộng hơn, ước lượng trên cho phép chúng ta chỉ ra rất nhiều ví dụ về các ánh xạ điều hoà trơn.

Trong công trình thứ hai với Schoen, bà đã giải quyết bài toán Dirichlet cho các ánh xạ điều hoà, yêu cầu tìm các ánh xạ điều hoà $u : M \rightarrow N$ với hạn chế trên biên $u|_{\partial M} : \partial M \rightarrow N$ cho trước.⁽¹³⁾ Trong trường hợp M là một mặt, bài toán Dirichlet trên tương tự bài toán Plateau cho các mặt cực tiểu. Cho đến tận ngày nay, kết quả, ý tưởng và phương pháp chứng minh chứa đựng trong các công trình của Uhlenbeck và Schoen về ánh xạ điều hoà và mặt cực tiểu vẫn còn nguyên giá trị.

Sau một loạt kết quả mang tính đột phá với Sacks và Schoen, Karen Uhlenbeck hướng sự quan tâm của mình đến *lý thuyết trường chuẩn*. Đó là sự mở rộng của lý thuyết điện từ trên phương diện toán học nhằm mục đích cung cấp các nền tảng toán học cho nhiều lý thuyết vật lý khác trong đó có *mô hình chuẩn của vật lý hạt*. Tương tự như trong trường hợp các ánh xạ điều hoà, vấn đề trung tâm của lý thuyết trường chuẩn là việc đi tìm các trạng thái cân bằng tương ứng với một mức năng lượng nào đó. Trong trường hợp này vấn đề mà Uhlenbeck quan tâm là nghiệm của *phương trình Yang–Mills*, một phiên bản tương tự như *hệ phương trình Maxwell* trong lý thuyết

⁽¹¹⁾R. Schoen và S.T. Yau, On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, *Comm. Math. Phys.* **65** (1979), 45–76.

⁽¹²⁾R. Schoen và K. Uhlenbeck, A regularity theory for harmonic maps, *J. Differential Geom.* **17** (1982), 307–335.

⁽¹³⁾R. Schoen và K. Uhlenbeck, Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps, *J. Differential Geom.* **18** (1983), 253–268.

điện từ trường. Cần phải nói thêm rằng phương trình Yang–Mills cũng chính là phương trình Euler-Lagrange cho phiếm hàm Yang–Mills trên một đa tạp. Đó là những năm đầu của thập kỷ 80 khi bà còn

là giáo sư tại Đại học Illinois ở Chicago. Năm 1988, bà chuyển đến Đại học Texas ở Austin và làm việc ở đây cho đến khi nhận giải thưởng Abel danh giá.



Uhlenbeck nhận giải thưởng Abel 2019 từ Vua Harald V.
Ảnh: Trygve Indrelid/NTB Scanpix.

Đóng góp quan trọng của bà về các phương trình Yang–Mills là định lý về kì dị khử được.⁽¹⁴⁾ ⁽¹⁵⁾ Định lý này nói rằng hiện tượng kì dị bong bóng nói chung là không xảy ra đối với nghiệm của phương trình Yang–Mills trên các đa tạp 4 chiều. Các đóng góp của Karen Uhlenbeck trong lý thuyết trường chuẩn ảnh hưởng sâu rộng đến hầu hết các nghiên cứu về sau trong lĩnh vực này. Hơn thế nữa, các kết quả căn bản của bà còn là động lực thúc đẩy những nghiên cứu của rất nhiều nhà khoa học thế hệ sau. Một ví dụ tiêu biểu là các công trình của Simon Donaldson, người nhận Huy chương Fields năm 1986 cho những đóng góp quan trọng trong

việc nghiên cứu tô pô của các đa tạp 4 chiều.



Simon Kirwan Donaldson.
Nguồn: Wikipedia.

Kết quả đã mang lại cho Simon Donaldson Huy chương Fields là việc chứng minh sự tồn tại các đa tạp 4 chiều ngoại

⁽¹⁴⁾K. Uhlenbeck, Removable singularities in Yang-Mills fields, *Commun. Math. Phys.* **83** (1982), 11–29.

⁽¹⁵⁾K. Uhlenbeck, Connections with L^p bounds on curvature, *Commun. Math. Phys.* **83** (1982), 31–42.

lai.⁽¹⁶⁾ Một bước quan trọng trong chứng minh của kết quả này là việc sử dụng tính com-pắc yếu của các liên thông đã được Uhlenbeck thiết lập trước đó (xem chú thích (15)).

Karen Uhlenbeck là nhà toán học nữ đầu tiên đoạt giải thưởng Abel trong lịch sử 17 năm của giải. Không những là nhà toán học nữ đầu tiên được giải thưởng Abel, bà còn là một trong số ít các nhà toán học nữ có vinh dự được đọc báo cáo mời phiên toàn thể tại một kỳ Đại hội Toán học Quốc tế. Điều đáng kể hơn nữa là vào năm 1990, sau 58 năm chờ đợi, Uhlenbeck là người thứ hai có được vinh dự trên kể từ báo cáo của Emmy Noether tại Đại hội năm 1932 ở Zürich (Thụy Sĩ).⁽¹⁷⁾

Cùng với Huy chương Fields năm 2014 của Maryam Mirzakhani (1977–2017), giải thưởng Abel năm 2019 một lần nữa chứng tỏ tài năng của phái nữ và sự tôn vinh của cộng đồng toán học đương đại đối với họ.

Thực tế là không có giải thưởng Nobel cho toán học, và trong rất nhiều thập kỷ qua huy chương Fields được xem là giải thưởng danh giá bậc nhất trong toán học. Tuy nhiên, huy chương Fields lại chỉ trao tặng 4 năm một lần và chỉ dành cho các nhà toán học trẻ tuổi đời không quá 40. Với những lý do trên, giải thưởng Abel, được đặt theo tên của nhà toán học người Na Uy Niels Hendrik Abel, được thành lập với phương châm tạo ra một giải thưởng uy tín được trao hàng năm, không giới hạn tuổi, và có tầm ảnh hưởng như giải thưởng Nobel cho cộng đồng toán học.

Là một phụ nữ nổi tiếng và là hình mẫu cho rất nhiều nhà toán học nữ khác, Karen Uhlenbeck đã có những nỗ lực

không ngừng trong việc thúc đẩy sự phát triển của cộng đồng các nhà toán học nữ. Karen Uhlenbeck đã đồng sáng lập ra chương trình *Phụ nữ và Toán học* tại IAS với sứ mệnh đào tạo, lôi cuốn, và hỗ trợ phụ nữ theo đuổi sự nghiệp toán học.

Karen Uhlenbeck còn là một ví dụ chỉ cho chúng ta thấy rằng thành công trong khoa học không nhất thiết phải đến từ thầy hướng dẫn mà hoàn toàn có thể đến từ sự độc lập của bản thân và sự cộng tác với các đồng nghiệp khác. Việc tìm kiếm lời giải cho các vấn đề khó không thông qua tư duy theo lối mòn cũng là điều cần thiết. Khi trả lời phỏng vấn trên *Celebratio Mathematica* về công trình của bà với Sacks, Uhlenbeck đã nói: “*Khi Jonathan Sacks giới thiệu với tôi vấn đề này, tôi không có sẵn một cách tiếp cận nào, vì vậy tôi buộc phải tìm ra một con đường riêng.*”

Ở độ tuổi thường được gọi là ‘*thất thập cổ lai hy*’, Karen Uhlenbeck vẫn đang miệt mài làm việc và tiếp tục đóng góp tri thức cho dòng chảy của toán học hiện tại. Đó là một đức tính rất cần phải học tập đặc biệt là với các nhà toán học trẻ tuổi.

TÀI LIỆU

- [1] Kenneth Chang, *Karen Uhlenbeck is first woman to win Abel prize for mathematics*, The New York Times, đăng ngày 19 tháng 3 năm 2019. Bản điện tử: www.nytimes.com/2019/03/19/science/karen-uhlenbeck-abel-prize.html.
- [2] Simon Donaldson, *Karen Uhlenbeck and the calculus of variations*, Notices of the American Mathematical Society, số tháng 3 năm 2019, DOI: 10.1090/noti1806.
- [3] Erica Klarreich, *Karen Uhlenbeck, uniter of geometry and analysis, wins Abel prize*, Quanta Magazine. Bản điện tử: www.quantamagazine.org/karen-uhlenbeck-uniter-of-geometry-and-analysis-wins-abel-prize-20190319.

⁽¹⁶⁾S.K. Donaldson, Self-dual connections and the topology of smooth 4-manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.* **8** (1983), 81–83.

⁽¹⁷⁾Nếu tính thêm cả các báo cáo mời tiểu ban thì Hilda Phoebe Hudson mới là nhà toán học nữ đầu tiên được báo cáo mời tại đại hội năm 1912 ở Cambridge (Anh) tại tiểu ban hình học. Thông tin thêm có thể xem tại Thông Tin Toán Học Tập 22, số 1.

Vai trò của Emmy Noether trong cuộc cách mạng thuyết tương đối⁽¹⁾

David E. Rowe⁽²⁾

Một trăm năm trước, Emmy Noether (1882-1935; Hình 1) công bố bài báo “Bài toán biến phân bất biến” [Noether 1918], ngày nay được xem như một trụ cột cho vật lý lý thuyết. Tuy nhiên, công trình này chỉ trở nên nổi tiếng sau khi bà mất vì ít nhất hai lý do, thứ nhất: bà là nữ giới, và thứ hai: bà đánh giá một cách khiêm tốn những kết quả của mình. Khi còn sống cũng như rất lâu sau khi đã mất, Noether chỉ được nhắc đến như người có vai trò chính trong việc khai sinh ra đại số hiện đại vào những năm 1920. Một phần vì ảnh hưởng lớn lao của bà với đại số, ít người nhớ rằng bà cũng là người có vai trò đáng kể làm sáng tỏ những bí ẩn toán học xoay quanh thuyết tương đối rộng của Einstein, đặc biệt những vấn đề liên quan đến các định luật bảo toàn. Phải nói định lý thứ nhất trong bài báo nói trên của Noether bao trùm cả cơ học cổ điển và lý thuyết các trường vật lý, và đưa ra cái nhìn sâu sắc về các định luật bảo toàn trong hầu hết các hệ vật lý. Định lý then chốt này dẫn đến các định luật bảo toàn

quen thuộc như định luật bảo toàn xung lượng, năng lượng, và mômen quay.⁽³⁾

Ngày nay, định lý của Noether chiếm một vị trí nổi bật trong sách giáo khoa của vật lý hiện đại. Tuy thế, trong tác phẩm công phu [Kosmann-Schwarzbach 2006], Yvette Kosmann-Schwarzbach đã chỉ ra rằng các nhà vật lý đã không ghi nhận ý nghĩa của kết quả này ngay lập tức. Ngay cả đến nay, chỉ có một số ít tác giả biết nhấn mạnh rằng bài báo gốc của Noether thực sự chứa *hai* định lý cơ bản. Hơn thế, *cả hai* định lý đều cần thiết để hiểu động lực thúc đẩy công trình của bà, cụ thể là sự phân biệt giữa cái mà Noether gọi là những định luật bảo toàn thực chất và những định luật bảo toàn không thực chất trong vật lý. Công trình này đã nảy sinh từ những tranh luận phức tạp về bản chất của luật bảo toàn năng lượng trong thuyết tương đối rộng của Einstein; bối cảnh của những tranh luận này sẽ được phác thảo ở đây (chi tiết xem tại [Rowe 1999]). Đóng góp của Noether xuất phát từ những thảo luận quan yếu vừa nêu ở Đại học Göttingen, nơi bà làm việc cùng với David Hilbert và Felix Klein.

⁽¹⁾Nguyên bản: On Emmy Noether’s role in the relativity revolution, The Math. Intelligencer, Tập 41, Số 2 (2019), 65–72. Dịch với sự cho phép của NXB Springer. Chúng tôi bỏ qua một số đoạn không thực sự quan trọng. Các chú thích tiếng Việt trong cặp ngoặc vuông [...] dưới đây là của người dịch và biên tập viên.

⁽²⁾Viện toán học của Đại học Gutenberg, 55099 Mainz, Đức. Email: rowe@mathematik.uni-mainz.de

⁽³⁾Về định lý thứ nhất của Noether, GS. Đàm Thanh Sơn viết: “Nó nói rằng mỗi đối xứng (chính xác hơn: đối xứng liên tục) của một hệ vật lý dẫn đến một định luật bảo toàn. Ví dụ tính đồng nhất của không gian dẫn đến định luật bảo toàn xung lượng. Tính đồng nhất của thời gian (các định luật vật lý, các hằng số cơ bản không thay đổi theo thời gian) dẫn đến định luật bảo toàn năng lượng. Tính đẳng hướng của không gian (nhìn theo hướng nào không gian cũng như nhau) dẫn đến định luật bảo toàn mômen quay. Định lý này đã thấm sâu vào nếp suy nghĩ của các nhà vật lý. Mọi định luật bảo toàn cuối cùng đều được đưa về một đối xứng.” (Theo <https://damtson.wordpress.com/2018/07/26/o-dau-co-doi-xung-o-do-co-bao-toan/>, BBT.)



Invariante Variationsprobleme.
(F. Klein zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum.)
Von
Emmy Noether in Göttingen.
Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 26. Juli 1918¹⁾.

Es handelt sich um Variationsprobleme, die eine kontinuierliche Gruppe (im Lieschen Sinne) gestatten; die daraus sich ergebenden Folgerungen für die zugehörigen Differentialgleichungen finden ihren allgemeinsten Ausdruck in den in § 1 formulierten, in den folgenden Paragraphen bewiesenen Sätzen. Über diese aus Variationsproblemen entspringenden Differentialgleichungen lassen sich viel präzisere Aussagen machen als über beliebige, eine Gruppe gestattende Differentialgleichungen, die den Gegenstand der Lieschen Untersuchungen bilden. Das folgende beruht also auf einer Verbindung der Methoden der formalen Variationsrechnung mit denen der Lieschen Gruppentheorie. Für spezielle Gruppen und Variationsprobleme ist diese Verbindung der Methoden nicht neu; ich erwähne Hamel und Herglotz für spezielle endliche, Lorentz und seine Schüler (z. B. Fokker), Weyl und Klein für spezielle unendliche Gruppen²⁾. Insbesondere sind die zweite Klein'sche Note und die vorliegenden Ausführungen gegenseitig durch einander beeinflusst.

1) Die endgültige Fassung des Manuskriptes wurde erst Ende September eingereicht.
2) Hamel: Math. Ann. Bd. 50 und Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 50. Herglotz: Ann. d. Phys. (4) Bd. 36, bes. § 9, S. 511. Fokker, Verslag d. Amsterdamer Akad., 27/1, 1917. Für die weitere Literatur vergl. die zweite Note von Klein: Göttinger Nachrichten 19. Juli 1918.
In einer eben erschienenen Arbeit von Kneser (Math. Zeitschrift Bd. 2) handelt es sich um Aufstellung von Invarianten nach ähnlicher Methode.
Erl.-Götting. 2. Wiss. Nachrichten. Math.-phys. Klasse. 1918. Heft 2. 17

HÌNH 1. Emmy Noether (1882–1935) và trang đầu bài báo
“Bài toán biến phân bất biến”. Nguồn: Đại học Göttingen.

Quả thực, Noether cũng đã tương tác với những trợ lý “chính thức” của Klein và Hilbert, cũng như một số các nhà khoa học trẻ quan tâm theo đuổi các vấn đề liên quan đến thuyết tương đối rộng. Một người ngày nay đã bị lãng quên trong số đó, là sinh viên mang tên Rudolf J. Humm, người Thụy Sĩ, kém Noether 13 tuổi. Mặc dù đóng vai trò thứ yếu trong cuộc cách mạng tương đối, cuộc đời của ông được kể lại ngắn gọn ở đây để làm sáng tỏ những sự kiện quan trọng diễn ra đồng thời trong những năm Chiến tranh Thế giới thứ nhất⁽⁴⁾.

Từ Erlangen đến Göttingen. Một phần đáng kể vì hoàn cảnh cá nhân, Amalie Emmy Noether đã mất một thời gian dài để chứng tỏ năng lực tư duy trừu tượng

của mình. Sinh ra tại thành phố nhỏ Erlangen vào năm 1882, một thời gian dài cô chỉ được biết đến với tư cách con gái của Max Noether, một nhà hình học đại số nổi tiếng. Gia đình Emmy thuộc tầng lớp trí thức Do Thái ưu tú ở nước Đức, và toán học là một trong số ít các lĩnh vực học thuật ở đó các thanh niên Do Thái có cơ hội để vươn lên thành giáo sư đại học.

Từ năm 1900 đến 1902, Emmy được phép học dự thính các khóa về toán và ngôn ngữ hiện đại tại trường đại học nơi cha mình làm việc. Cô là một trong hai nữ sinh tham gia các khóa học ở Erlangen cùng với 984 nam sinh. Vào năm 1903, Vương quốc Bavaria⁽⁵⁾ đã cho phép nữ giới đến giảng đường và vì thế Emmy đăng ký trở thành sinh viên chính thức tại Erlangen. Emmy chọn học ngành toán và tham dự các khóa học do Max Noether

⁽⁴⁾Để biết chi tiết hơn về việc nghiên cứu thuyết tương đối ở Göttingen trong Chiến tranh Thế giới thứ nhất, xem [Rowe 2004].

⁽⁵⁾Erlangen nằm ở Vương quốc Bavaria (tồn tại từ 1805 đến 1918), thuộc miền Nam Đức (BBT).

và người đồng nghiệp Paul Gordan giảng dạy.

Sau một học kỳ ở Erlangen, Noether chuyển đến Göttingen để nghe dự thính các bài giảng của David Hilbert, Felix Klein, Hermann Minkowski, Otto Blumenthal, và Karl Schwarzschild. Trớ trêu thay, vì là một công dân Đức, Noether không thể nhập học ở một trường đại học Phổ (Göttingen và các trường đại học Phổ khác tiếp tục không nhận nữ giới vào học trong suốt năm năm nữa⁽⁶⁾). Chán nản, Emmy trở lại thành phố nhỏ Erlangen và bảo vệ luận án tiến sĩ với điểm tuyệt đối. Noether đã viết luận án tiến sĩ dưới sự hướng dẫn của Paul Gordan, người ở thời kì đó được mệnh danh là “ông vua của những bất biến”. Gordan là một trong những nhà tính toán hình thức (algorist) lớn cuối cùng, và không quá ngạc nhiên khi luận án của Emmy Noether – sau này thường bị chính tác giả lơ đi – đã chứng minh tài năng của cô trong việc xử lý các tính toán đại số phức tạp. “Người mẹ của đại số hiện đại” là một nhà tính toán hình thức hàng đầu.

Trong suốt tám năm tiếp theo, Emmy tiếp tục trưởng thành về mặt toán học, đặt biệt dưới ảnh hưởng của Ernst Fischer, người kế nhiệm Gordan. Cuối cùng cô cũng thoát khỏi cảnh biệt lập trong thời gian đầu của Chiến tranh Thế giới thứ nhất, khi những giảng đường gần như trống không và những chiến hào bắt đầu tấp nập người. Ở Göttingen, Hilbert và Klein luôn tìm kiếm những tài năng trẻ và họ đã mời Emmy Noether đến Göttingen vào mùa xuân năm 1915. Khi gửi lời mời này, hai nhà toán học hẳn đã nghĩ khoa triết học của trường mình sẽ tán đồng

việc bổ nhiệm chức danh tiến sĩ khoa học cho Noether. Nhưng hóa ra ngay cả sự hậu thuẫn của những người có thể lực như Klein và Hilbert vẫn chưa đủ.

Vào những năm 1907, đã có những thảo luận về việc cho phép phụ nữ có trình độ giảng dạy tại các trường đại học Phổ. Do hầu hết các giáo sư đều phản đối điều này, Bộ Giáo dục Phổ đã giữ nguyên điều khoản không cho phép phụ nữ được bổ nhiệm chức danh tiến sĩ khoa học. Tám năm sau đó khi xem xét trường hợp của Emmy Noether tại Göttingen, phân khoa khoa học-toán học của đại học này đã bỏ phiếu về việc miễn trừ các quy định hình thức với tỉ lệ ủng hộ là 10 trên 7. Trong một cuộc họp căng thẳng của toàn bộ giảng viên trường diễn ra sau đó⁽⁷⁾, Hilbert đã mỉa mai đả kích phía đối lập: “Đây là trường đại học chứ đâu phải nhà tắm công cộng”. Cuối cùng, vì bị Bộ Giáo dục từ chối yêu sách, Hilbert đã phải đến Berlin đàm phán với các đại diện của bộ này. Ông nhận được sự nhượng bộ đáng kể từ phía các đại diện của Bộ Giáo dục: từ học kỳ đông 1916-1917, Hilbert thông báo về các khóa học do “Giáo sư Hilbert giảng dạy với sự trợ giúp của nữ Tiến sĩ Noether”. Thật ra các khóa học này hoàn toàn do Emmy Noether đứng lớp. Với nền tảng chuyên môn về lý thuyết bất biến, cô đã làm sáng tỏ một số bí ẩn toán học trong thuyết tương đối (xem Bảng 1). Chỉ sau Chiến tranh Thế giới thứ nhất, trong không khí cởi mở hơn của Cộng hòa Weimar non trẻ, cô mới được tạo cơ hội gia nhập vào trường Göttingen.

Một nhân vật tâm cổ khác cũng ủng hộ Noether là Albert Einstein, người có quan hệ thân thiện với các nhà toán học

⁽⁶⁾Thành phố Göttingen thuộc tỉnh Hanover, Vương quốc Phổ (tồn tại từ 1701 đến 1918). Từ 1871 đến 1918, Vương quốc Phổ và Vương quốc Bavaria cùng trực thuộc Đế quốc Đức (German Empire) (BBT, dẫn theo Wikipedia).

⁽⁷⁾Một giai thoại phổ biến kể rằng trong cuộc họp này, có giáo sư đã phàn nàn: “Cứ tưởng tượng những chiến sĩ của ta từ chiến trường trở về, họ sẽ cảm thấy thế nào nếu phải học một người phụ nữ?” (theo trang mạng đã dẫn của GS. Đàm Thanh Sơn, BBT).

ở Göttingen. Giống như Klein và Hilbert, Einstein đánh giá cao tài năng của cô.

Bảng 1: Lý thuyết bất biến trong Toán học và Vật lý

Lý thuyết bất biến cổ điển có liên quan chặt chẽ đến hình học giải tích xạ ảnh, lĩnh vực nghiên cứu các bất biến dưới các phép biến đổi tuyến tính của các đối tượng hình học, chẳng hạn như bậc của một đường cong đại số. Một đường cong bậc hai trong mặt phẳng được cho bởi phương trình

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Về mặt hình học, các đường cong như vậy là các đường conic với $a + c$ và $ac - b^2$ là các bất biến. [Chính xác hơn, đây là các bất biến khi hạn chế trong lớp các biến đổi Euclid trong mặt phẳng, tức là các phép quay, tịnh tiến, đối xứng, và một hợp hữu hạn của các biến đổi đó.] Trong trường hợp tổng quát, đường cong này sẽ là đường elip hoặc đường hyperbol, và phương trình của nó có thể được biến đổi về dạng

$$\frac{x^2}{p^2} \pm \frac{y^2}{q^2} = 1,$$

trong đó $p, q > 0$, dấu cộng hay trừ cho ta biết dạng của đường conic. Dễ thấy

$$a + c = \frac{1}{p^2} \pm \frac{1}{q^2} \quad \text{và} \quad ac - b^2 = \pm \frac{1}{p^2 q^2}.$$

Do đó, các bất biến này có ý nghĩa hình học rõ ràng, vì $2p, 2q$ là độ dài tương ứng của các trục cơ sở.

Vật lý sơ cấp bắt đầu với những tính chất của các vectơ trong không gian 3 chiều, mỗi vectơ có một độ dài và hướng xác định. Trong một hệ trục tọa độ cố định, vectơ $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ có độ dài $\|v_1\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, là một bất biến [đối với các phép biến đổi Euclid. Một bất biến đối với các phép biến đổi Euclid còn được gọi là một bất biến Euclid]. Hai vectơ có ba bất biến Euclid, tất cả đều được sinh ra từ tích vô hướng. Cụ thể, với $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ và $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$, chúng ta nhận được ba bất biến vô hướng

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

và mọi bất biến vô hướng khác của hai vectơ v_1, v_2 đều có thể thu được từ 3 bất biến trên.

Trong lý thuyết tương đối, những bất biến vô hướng cơ bản được xây dựng dựa trên

metric Minkowski, với tọa độ thứ tư theo thời gian có dấu ngược với dấu của ba tọa độ không gian. [Nhớ lại biểu thức $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$.] Thuyết tương đối hẹp cũng được xây dựng trên các biến đổi khác loại với các biến đổi Euclid, cụ thể là các phép biến đổi Lorentz, do Henri Poincaré chỉ ra. Thuyết tương đối rộng cho phép các biến đổi tọa độ tùy ý và có một số bất biến, mang tên là *bất biến vi phân*, không thay đổi qua các biến đổi đó. [Tên gọi “bất biến vi phân” bắt nguồn từ việc các bất biến này là biểu thức của các *hàm* và *đạo hàm* của chúng, đối lập, ví dụ, với các bất biến Euclid của các dạng toàn phương 2 biến, vì các bất biến này chỉ là biểu thức của các *tham số*. Độ cong (curvature) là ví dụ về một loại bất biến vi phân.] Những phương trình trường hấp dẫn của Einstein được gọi là có tính hiệp biến rộng (generally covariant), vì chúng giữ nguyên dạng của mình dưới các phép biến đổi tọa độ bất kỳ đó. Các phương trình Einstein, chi phối vận động của không-thời gian, được biểu diễn qua các bất biến vi phân đặc biệt.

Điểm xuất phát của các phương trình Einstein là metric tenxơ $g^{\mu\nu}$, thứ xác định các tính chất hình học của không-thời gian. Metric tenxơ quy về metric Minkowski trong không-thời gian phẳng, do đó các trường hấp dẫn phát sinh trong thuyết tương đối hẹp chỉ có tính hình thức và có thể loại bỏ được bằng các phép biến đổi tọa độ thích hợp. Một không-thời gian phẳng được đặc trưng bởi sự triệt tiêu của tenxơ Riemann-Christoffel $R^\sigma_{\mu\nu\kappa}$. Tenxơ này có 20 thành phần độc lập, hơn nữa, từ tenxơ này ta có thể xây dựng tenxơ Einstein:

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R.$$

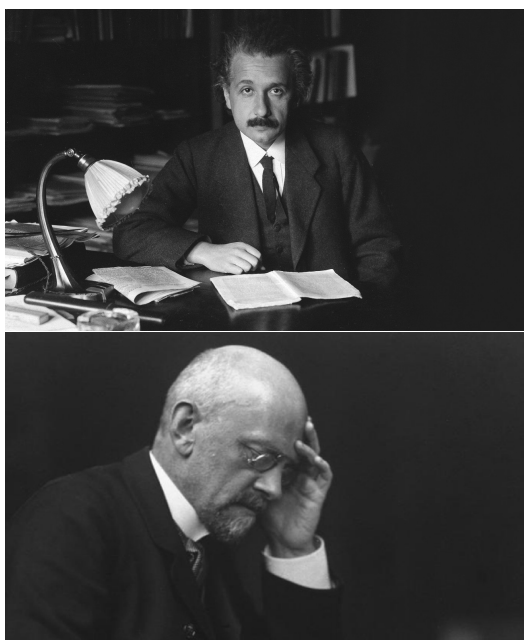
Ở đây, $R^{\mu\nu}$ là tenxơ Ricci phản biến nhận được bằng cách co (contract) tenxơ Riemann-Christoffel; co thêm một lần nữa cho ta độ cong vô hướng (scalar curvature hay curvature scalar) $R^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = R$. Điều này dẫn đến các phương trình Einstein:

$$G^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, \dots, 4,$$

trong đó $T^{\mu\nu}$ là tenxơ năng-xung lượng. Sự đối xứng của $g^{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu}$ và $T^{\mu\nu}$ khiến cho số phương trình nhận được là 10 chứ không phải 16.

Sau khi đọc bài báo của Noether về việc rút gọn các bất biến vi phân về các bất biến đại số [(bài báo chứa hai định lý Noether)], Einstein đã viết cho Hilbert: “Thật ấn tượng khi ta có thể nhìn những vấn đề [trong thuyết tương đối rộng] đó từ quan điểm tổng quát như vậy. Những người lính từ chiến trường trở về Göttingen sẽ không thiết thời giờ nếu được nghe bài giảng của Noether. Cô ấy hiểu sâu sắc công việc của mình.” [Einstein 1998b, tr. 744].

Trích đoạn này rõ ràng cho thấy Einstein hiểu biết khá rõ những khó khăn trong việc bổ nhiệm Noether ở Göttingen. [Xem cước chú (7).]



HÌNH 2. Từ trên xuống dưới: Albert Einstein và David Hilbert. Nguồn: Wikimedia Commons và Đại học Göttingen.

Einstein tại Göttingen. Một thời gian ngắn sau khi Noether đến Göttingen vào mùa xuân năm 1915, Einstein đến Göttingen đọc một loạt bài giảng về thuyết tương đối rộng. Chuyến viếng thăm này diễn ra chỉ vài tháng trước bước đột phá Einstein đạt được vào tháng Mười Một năm 1915, khi cả ông và Hilbert tìm

ra những phiên bản rất sát nhau của các phương trình trường hấp dẫn. Tuy nhiên, các công trình của họ được khơi nguồn từ những giả thiết vật lý và phương pháp toán học hoàn toàn khác nhau. Trong khi Einstein tìm cách khai thác nguyên lý tương đối tổng quát của mình để giải thích các hiện tượng hấp dẫn và quán tính, thì Hilbert lại nhắm đến một lý thuyết trường thống nhất kết hợp tiếp cận về hấp dẫn của Einstein với lý thuyết điện động lực học về vật chất của Gustav Mie. Lý thuyết của Mie quy giản vật chất về các trường điện từ, còn về phần mình, Hilbert tìm cách chỉ ra rằng các phương trình trường điện từ chỉ là trường hợp đặc biệt của các phương trình trường hấp dẫn. Einstein hết sức hoài nghi chương trình nghiên cứu của Hilbert. Trong thư gửi Hermann Weyl, ông viết: “Đối với tôi, cách tiếp cận thế giới vật chất của Hilbert có vẻ ngây thơ như cách nhìn của một đứa trẻ không ý thức gì về những cạm bẫy của thế giới thực...” (Thư Einstein gửi Weyl, ngày 23/11/1916 [Einstein 1998a, tr. 366]).

Cách tiếp cận toán học [với các phương trình trường hấp dẫn] của Hilbert trong [Hilbert 1915] dựa trên giải tích biến phân, phương pháp này đã đóng vai trò quan trọng trong cơ học cổ điển từ thời Joseph-Louis Lagrange (xem Bảng 2). Einstein cũng đã thử nghiệm với một cách tiếp cận thuyết tương đối rộng dựa trên hàm Lagrange và giải tích biến phân, nhưng Hilbert là người đầu tiên khai thác hướng đi này để rút ra các phương trình trường hấp dẫn có tính hiệp biến rộng thông qua các phương trình Euler-Lagrange. Hilbert cũng nhận thấy rằng hệ gồm 14 phương trình trường của mình có 4 quan hệ đồng nhất, mà ông xem như những phương trình thiết lập sự liên hệ giữa trọng lực và điện từ. Tuy nhiên, bản chất cụ thể của các quan hệ đồng

nhất này vẫn còn khá mù mờ cho đến khi Noether công bố các công trình của cô.

Huyền bí hơn nữa, cái được Hilbert gọi là phương trình bảo toàn năng lượng lại dựa trên một đối tượng phức tạp mang tên vectơ năng lượng. Hilbert nghĩ rằng với phương trình bảo toàn năng lượng của mình, ông đã làm sáng tỏ sự kết nối giữa lực hấp dẫn và điện từ (chi tiết về việc Hilbert chuyển hướng sang nghiên cứu năng lượng trong thuyết tương đối rộng, xem [Corry 2004, tr. 333–340, 355–360]). Emmy Noether bắt đầu nghiên cứu những tính chất của vectơ năng lượng một thời gian sau đó, nhưng không công bố kết quả nào về chủ đề này. Tuy nhiên những gì bà phát hiện lại được biết đến thông qua những trao đổi được công bố giữa Klein và Hilbert về vấn đề bảo toàn năng lượng trong thuyết tương đối rộng. Trong những trao đổi này, Klein nhận xét “Chắc anh cũng biết rằng cô Noether thường xuyên trao đổi nhận xét về những gì tôi nghiên cứu, và phải nhờ cô ấy tôi mới giải quyết được những vấn đề của mình” [Klein 1917].

Bảng 2: Giải tích biến phân cổ điển

Giải tích biến phân nảy sinh từ nỗ lực giải quyết các bài toán tối thiểu hóa đường đi. Vào năm 1696, Johann Bernoulli đặt ra *bài toán đường đoản thời*: tìm đường lặn giữa hai điểm không cùng độ cao cho trước của một quả bóng tròn dưới tác dụng của trọng lực sao cho thời gian lặn là ngắn nhất. Chính ông đã giải quyết được bài toán này bằng cách liên hệ đến một vấn đề tương tự trong quang học – nguyên lý Fermat về thời gian tối thiểu – và sau đó rút ra phương trình vi phân mà đường đoản thời phải thỏa mãn. Từ đó ông suy ra đường cong này chính là đường cycloid. Euler và Lagrange sau đó đã phát minh ra các phương pháp biến phân để giải quyết các vấn đề vật lý tương tự.

Trong cơ học cổ điển, tác dụng (action) được cho bởi một tích phân theo thời gian

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

trong đó hàm dưới dấu tích phân L được gọi là hàm Lagrange. Sự tiến triển của một hệ thống vật lý có thể xác định bằng cách tối thiểu hóa tích phân tác dụng, trên những đường tác dụng khả dĩ nằm trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 . Trong ngôn ngữ của giải tích biến phân, điều kiện tối thiểu hóa được viết lại là $\delta A = 0$, và điều này dẫn đến phương trình của chuyển động (các phương trình Euler-Lagrange). Các phương pháp này sau đó được áp dụng để phát biểu chặt chẽ nguyên lý tác dụng tối thiểu, còn được gọi là nguyên lý Hamilton. Trong lần tái bản thứ hai của cuốn *Cơ học giải tích* (1811), Lagrange đã sử dụng giải tích biến phân để rút ra dạng hiện đại của định luật bảo toàn năng lượng. Ký hiệu T là động năng và V là thế năng (một hàm chỉ phụ thuộc vào các tọa độ không gian), ông định nghĩa $L = T - V$ là “hàm Lagrange” của một tích phân tác dụng. Tích phân vừa nêu thỏa mãn một tính chất đối xứng tương ứng với phương trình $T + V = E$, và do đó tổng năng lượng E trong hệ được bảo toàn. Các bài toán biến phân với hàm biến thiên chỉ phụ thuộc duy nhất biến số thời gian tương ứng với các bài toán cơ học cổ điển, trong khi đó trong lý thuyết trường, hàm biến thiên phụ thuộc nhiều biến số độc lập.

Trong thảo luận với Hilbert, Klein chỉ ra rằng phương trình bảo toàn năng lượng của Hilbert là một đồng nhất thức trừu tượng, chứ không phải định luật bảo toàn theo nghĩa cơ học cổ điển. Cụ thể hơn, trong khi những định luật bảo toàn cổ điển phản ánh những tính chất vật lý của vật chất, phương trình của Hilbert chỉ là hệ quả của phương trình trường hấp dẫn và những suy luận logic thuần túy. Klein nói thêm rằng Emmy Noether đã phát hiện ra điều này và đã trình bày tất cả các chi tiết trong một bản thảo.

Hilbert đáp lại Klein: “Tôi hoàn toàn đồng ý với nhận định của ông về các định

lý năng lượng. Emmy Noether là người tôi đã nhờ cậy trong hơn một năm qua để làm sáng tỏ vấn đề với định lý năng lượng của tôi, và cô ấy đã phát hiện ra rằng bằng cách sử dụng các phương trình vi phân Lagrange... trong bài báo đầu tiên [về nền tảng vật lý [Hilbert 1915]] của tôi, có thể biến đổi các biểu thức năng lượng mà tôi và Einstein đề xuất, thành các biểu thức có hàm divergence triệt tiêu...”.

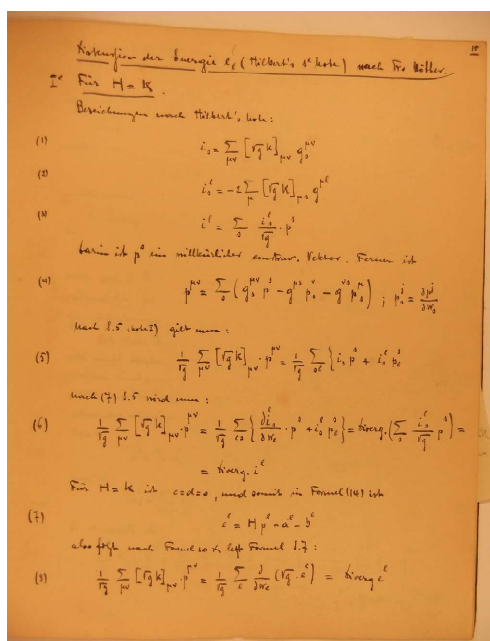
Chúng ta sẽ trở lại với vai trò của Emmy Noether dưới đây, nhưng trước tiên là một vài lời về một người ít được biết đến nhưng cũng đã suy tư sâu sắc về chính những vấn đề của Noether. Cuộc thảo luận giữa Klein và Hilbert bắt đầu từ 22 tháng Giêng năm 1918, khi Klein trình bày ý tưởng của mình trước Hội Toán học Göttingen. Ông và Hilbert sau đó đã đồng ý cho xuất bản những thư trao đổi của họ trên tờ *Göttinger Nachrichten* (Klein đã trình bày bản thảo sơ bộ của bài báo [Klein 1917] tại một cuộc họp Hội Toán học vào ngày 25 tháng Giêng). Khi đó, một sinh viên Thụy Sĩ tên là Rudolf Jakob Humm đã tham dự bài giảng của Klein và bị ấn tượng mạnh. Humm đang là học trò của Hilbert, nhưng anh cũng đã dành một học kỳ ở Berlin để làm việc và thảo luận với Einstein. Do đặc biệt quan tâm đến chủ đề bảo toàn năng lượng, Humm chắc chắn đã đọc bài báo trong đó Klein nhắc đến bản thảo của Noether. Chính vì thế, nhiều khả năng anh đã tiếp cận Noether để xin một bản sao của bản thảo đó. Điều này có thể giải thích tại sao sau khi Humm mất, người ta tìm thấy những ghi chép của Humm về bản thảo của Noether (Hình 3). Nhờ những ghi chép này, ta thấy rằng những kết quả Noether tìm ra đã báo trước những luận điểm chính trong bài giảng của Klein vào ngày 22/1/1918.

Rudolf Humm ở Göttingen và Berlin. Humm là một chàng trai trẻ đầy tham vọng nhưng cũng đầy bất an.

Sinh ra ở Modena, Humm là con cả trong ba người con trai của một gia đình Thụy Sĩ gốc Kirchleerau, một vùng hẻo lánh thuộc bang Aargau. Bố của Humm là một thương gia đến lập nghiệp ở miền bắc nước Ý trong thời gian nhiều người quê ông bắt đầu rời khỏi Kirchleerau. Rudolf học xong cấp hai tại trường trung học của bang Aargau, ngôi trường Einstein đã học một năm trước khi chuyển đến trường Bách khoa Zürich. Có thể sự kiện này đã tạo động lực cho Humm theo học thuyết tương đối ở Đức. Đầu tiên anh đến Munich vào năm 1915, chủ yếu là để học toán rồi nhanh chóng chuyển đến Göttingen. Đến học kỳ mùa đông 1916/1917 anh đã hoàn toàn đắm mình trong vật lý lý thuyết, như ghi chép trong nhật kí. Nhật kí của Humm cung cấp rất nhiều chi tiết, thường khá chủ quan, về bầu không khí tại trường đại học trong thời chiến.

Humm dường như chỉ trao đổi thoáng qua với Emmy Noether. Tuy nhiên, trong một thế giới nhỏ bé như vậy, hẳn họ đã trông thấy nhau khá thường xuyên. Trong số những người Humm nhắc đến nhiều nhất có một số người Thụy Sĩ: Paul Scherrer và vợ, Paul Finsler, và Richard Bär. Anh cũng hay gặp gỡ Vsevolod Frederiks, một trong những người Nga học vật lý và toán ở Göttingen [Rowe 2004, tr. 114–115], và Willy Windau, một nhà toán học hoàn thành luận án tiến sĩ dưới sự hướng dẫn của Hilbert năm 1920. Một người bạn khác của Humm là nhà thiên văn học Walter Baade, người nhận bằng tiến sĩ vào năm 1919. Phần lớn nhật kí của Humm ghi chép về những chuyến du ngoạn, những mối tình đơn phương, những chuyện tán gẫu, triết lý tuổi trẻ, bên cạnh đó là những bận tâm về tiền

bạc, thiếu thức ăn, và than thở về cuộc sống buồn chán và nhớ nhà. Tuy nhiên, hầu hết thời gian anh làm việc rất chăm chỉ, và khi rời Göttingen để đến Zürich ngay trước khi chiến tranh kết thúc, tuy chưa hoàn thành luận án, Humm đã tích lũy được rất nhiều kiến thức và kỹ thuật liên quan đến phương pháp biến phân trong vật lý cổ điển và vật lý tương đối.



HÌNH 3. Trang đầu ghi chép của Rudolf Humm về bản thảo của Noether về vectơ năng lượng của Hilbert, tiêu đề “Diskussion der Energie e_l (Hilberts 1. Note) nach Fr. Noether”. Nguồn: Di cảo Humm, Thư viện trung tâm Zürich.

Vào tháng Mười năm 1916, anh mô tả một ngày điển hình của mình như sau: dậy lúc 7 giờ, uống trà (thời này chưa có cà phê), ăn ba mẩu bánh mì kèm mứt dâu. Chín giờ mười lăm lên thư viện đọc bản sao các bài giảng của Hilbert và Klein về thuyết tương đối. Khoảng 11 giờ, tạm nghỉ và dành 90 phút để sao chép bài giảng của khóa học về thuyết lượng tử của Peter Debye. Nghỉ ăn trưa lúc 12 giờ 30 tại khách sạn Deutscher Hof ở gần thư viện, nơi phục vụ những món ăn rất hợp khẩu vị anh. Sau đó về phòng nghỉ trưa,

hút một điều xì-gà, đọc tờ *Neue Züricher Zeitung*. Đến 3 giờ chiều trở lại làm việc, thường là ở phòng đọc sách ở tầng hai của toà nhà giảng đường. Giải lao lần thứ hai vào khoảng 6 giờ chiều, dành thời gian cho các tờ báo có trong phòng đọc. Và chắc chắn sẽ về nhà đúng 7 giờ để ăn bữa tối được bà chủ nhà chuẩn bị. Humm sẽ đọc những tờ báo địa phương do bà chủ nhà xếp ra đến 9 giờ tối. Sau đó quay lại làm việc, chủ yếu là đọc những tài liệu liên quan, đến 11 giờ và ra ngoài đi bộ khoảng nửa giờ trước khi đi ngủ.

Tên Noether bắt nguồn xuất hiện trong nhật ký của Humm (Hình 3) trong một hoàn cảnh khá thú vị. Từ khi Einstein đến Göttingen vào cuối mùa xuân 1915, Hilbert đã vật lộn với vấn đề nhân quả (problem of causality) trong thuyết tương đối rộng. Ban đầu, Hilbert nghĩ ông có thể khắc phục tính bất định trong các phương trình cơ bản của mình bằng cách sử dụng những điều kiện về bảo toàn năng-xung lượng, nhưng sau đó ông hướng bài toán đến việc hạn chế các tọa độ (coordinate restrictions). Trong tháng Mười Một năm 1916, Hilbert trình bày hai báo cáo về chủ đề này trước hội toán học. Humm, Baade, cũng như Emmy Noether là ba trong số những thính giả. Bài nói đầu tiên của Hilbert đã làm dậy lên cuộc thảo luận đầy sôi nổi tối hôm đó giữa Baade và Humm, nhưng Humm còn có cơ hội nghiên cứu thêm vấn đề này vài ngày sau đó. Lý do là Emmy Noether đã ghi chép bài giảng đầu tiên của Hilbert, và sau đó Humm có được một bản in rônê-ô của ghi chép đó. Sau khi Hilbert đọc bài giảng thứ hai, trợ lý của Hilbert là Richard Bär cung cấp một ghi chép khác, sẽ được tái bản sau này, trong khi ghi chép trước đó của Noether dường như không còn nữa.

Đánh giá từ nhiều sự việc trong nhật ký của Humm, chưa kể đến thời gian dành

cho việc ghi chép, những gì anh mô tả về một “ngày điển hình” dường như là một khuôn mẫu hơn là những gì thực tế diễn ra. Chàng trai bất an trong đời sống tinh thần cũng như trong các mối quan hệ xã hội này khó có thể thích ứng với một lịch trình làm việc nghiêm ngặt như vậy. Một buổi tối tháng Tư năm 1917, anh và bạn mình Walter Baade uống bia cùng nhau tại khách sạn National, một công trình ấn tượng được xây từ những năm 1730 khi trường đại học mới thành lập. Humm có vẻ khá chán nản, một phần vì học kỳ tới có quá ít khóa học. Anh đã hăng say tham gia học khóa về thuyết tương đối của Hilbert, nhưng học kỳ mùa hè tới, Hilbert chỉ dạy một khóa 4 học phần về lý thuyết tập hợp. Humm và Baade đều biết Einstein đã bắt đầu giảng về thuyết tương đối ở Berlin. Humm đã đôi lần dự định dành một học kỳ học dự thính ở Berlin, nhưng anh thấy ý tưởng này quá mạo hiểm. Baade hoàn toàn không thấy việc học dự thính có gì mạo hiểm và cố gắng thuyết phục bạn. Vào cuối buổi tối thứ Sáu đó, Humm đã quyết định sẽ đi Berlin vào sáng Chủ Nhật. Quyết định hấp tấp này dẫn anh đến rất nhiều vấn đề cũng như rủi ro, nhưng đến tối thứ Hai sau đó, ngày cuối cùng của tháng Tư, Humm đã ở Berlin. Tối hôm đó, anh lấy cuốn nhật ký thân thuộc ra ghi lại những bản loạn đã xảy ra trong những ngày trước đó, nhưng trước hết là ghi chép về địa chỉ mới: số 17 Motzstrasse, Schöneberg, cách Nollendorfplatz một đoạn đường bộ ngắn. Ngày tiếp theo anh đăng kí nhập học, hi vọng sẽ gặp Einstein và Heinrich Rubens, người điều hành các buổi hội đàm (colloquium) về vật lý. Khóa học của Einstein diễn ra vào thứ Năm từ 2 đến 4 giờ.

Humm đã bỏ lỡ hai bài giảng đầu tiên do đó anh có nhiều vấn đề thắc mắc khi nghe bài giảng thứ ba. Einstein

thoải mái đề nghị gắp Humm vào thứ Bảy. Trong cuộc gặp gỡ đó, Humm được nghe rất nhiều nhận xét của nhà vật lý và anh cố gắng hồi tưởng lại chúng trong nhật kí của mình. Einstein mới đọc xong bài báo thứ hai của Hilbert về nền tảng của vật lý [Hilbert 1917]. Trong đó, Hilbert giới thiệu về một hệ tọa độ đặc biệt giúp cho bảo toàn các liên hệ nhân quả trong thuyết tương đối rộng, nhưng Einstein nghĩ các hệ tọa độ đặc biệt đó là vô ích vì chúng dẫn đến những đường chân trời (worldlines) cắt nhau, và do đó tạo ra kỳ dị trong không-thời gian. Thực ra ông đã đề cập đến điều này hai tuần trước đó trong thư gửi Felix Klein (24/5/1917, [Einstein 1998a, tr. 436]). Einstein còn chỉ trích bài báo đầu tiên của Hilbert về nền tảng của vật lý [Hilbert 1915] gay gắt hơn. Năm ngoái, ông đã cố gắng để hiểu bài viết này. Ông thậm chí đã đồng ý để trình bày những kết quả của Hilbert trong một buổi hội đàm của Rubens, nhưng ngay sau đó ông viết thư cho Hilbert để được nghe giải thích về nhiều điểm khúc mắc với ông. Einstein thừa nhận rằng ông không thể hiểu được định lý năng lượng của Hilbert, ngay cả bản thân cái định lý đó phát biểu (thư Einstein gửi Hilbert, 25/5/1916 [Einstein 1998a, tr. 289]). Có vẻ ông vẫn giữ nguyên nhận định của mình khi nói chuyện với Humm một năm sau đó. Ông tự hỏi làm sao năng lượng có thể là một vectơ, hơn nữa tại sao định nghĩa vectơ đó lại có thể đa trị (suy từ việc nó chứa một vectơ bất kỳ). Và tại sao lại chỉ có một định luật bảo toàn thay vì bốn (ba cho xung lượng, một cho năng lượng, như trong thuyết tương đối hẹp)?

Đây chỉ là một trong nhiều cuộc nói chuyện giữa Humm với Einstein trong suốt ba tháng ở Berlin. Cùng với khóa học của Einstein, Humm còn tham gia khóa của Max Planck về lý thuyết lượng

tử cũng như hội đàm thứ Tư hàng tuần do Rubens tổ chức. Anh hứng thú với các hoạt động này, nhưng cũng tiếc nuối những tiện nghi ở phòng đọc Göttingen. Ở Berlin, ta phải mượn sách qua thủ thư, do đó không thể đến giá sách và tự chọn những cuốn mình muốn đọc. Rubens đề nghị Humm đọc một báo cáo trong hội đàm vào tháng Tám, nhưng kế hoạch này bị hủy sau khi Einstein bị ốm vào giữa tháng Bảy. Trợ lý của Einstein, Jakob Grommer, tiếp quản khóa học, trong khi Einstein đến Thụy Sĩ để điều trị bệnh đường ruột. Việc này làm cho Humm không còn động lực lưu lại Berlin lâu hơn, và do đó anh hủy bài báo cáo đã định và quay trở về Göttingen.

Humm bị cuốn hút mạnh mẽ bởi cách suy nghĩ mang tính khái quát cao của Einstein về các vấn đề vật lý cơ bản, một tiếp cận mà anh xem như hoàn toàn đối lập với phương pháp toán học thuần túy của Hilbert. Từ đây, bảo toàn năng lượng và phương trình của chuyển động [theo nghĩa Euler-Lagrange] trong thuyết tương đối rộng trở thành vấn đề nghiên cứu chính của Humm. Công cụ toán học chính của anh, cũng như Hilbert, là các nguyên lý biến phân. Einstein trước đó đã vấp phải một số sai lầm khi áp dụng phương pháp biến phân cho các biến liên quan đến trường. Trong thư gửi Hilbert vào 30/3/1916 [Einstein 1998a, tr. 277], ông đề cập đến một sai lầm đã mắc phải trong bài báo trước đó, mà Hilbert là người đã phát hiện ra [Einstein 1998a, tr. 191]. Sau này, Einstein đã tránh được những sai lầm tương tự. Cuối năm 1916, ông và Hendrik Antoon Lorentz độc lập với nhau tìm ra những kết quả cơ bản trong thuyết tương đối rộng sử dụng phương pháp biến phân, hơn thế, khác với tiếp cận của Mie, họ không cần dùng đến bất kỳ giả thiết vật lý đặc biệt nào. Một năm sau, Weyl cũng đi theo hướng

tránh các giả thiết vật lý đặc biệt, và nhấn mạnh tính nửa vời của mọi nỗ lực xây dựng lý thuyết hấp dẫn dựa trên nguyên lý Hamilton, vì các hàm vật chất tương ứng trong thuyết tương đối rộng vẫn còn rất bí ẩn. Từ những công trình đi trước này, Klein tiến thêm một bước quan trọng bằng cách sử dụng lý thuyết Lie về các nhóm liên tục. Vào tháng Ba năm 1917, Klein cũng bắt đầu trao đổi thư từ thường xuyên với Einstein, người đang vật lộn với các vấn đề liên quan đến năng lượng hấp dẫn. Những sự kiện vừa kể có vai trò then chốt và đặt nền tảng cho bài báo của Noether.

Trong khi đó, Humm vẫn tiếp tục liên hệ với Einstein, người đã gửi đăng hai bài báo của anh cho tạp chí *Annalen der Physik*. Bài đầu tiên [Humm 1918] được viết vào tháng Năm 1918, chỉ hai tháng trước khi Emmy Noether trình bày khám phá quan trọng của mình [Noether 1918]. Trong bài báo đầu tiên, Humm cố gắng giải thích cặn kẽ cách áp dụng các phương pháp biến phân khác nhau để thu được kết quả phù hợp với một bối cảnh vật lý cụ thể. Một phát hiện của Humm là phương trình vi phân về bảo toàn năng lượng của Einstein có thể rút ra từ phương trình chuyển động, tức là từ giả thuyết rằng một hạt thử (test particle) luôn di chuyển dọc theo một đường trắc địa trong không-thời gian cong. Humm gửi đăng bài báo thứ hai [Humm 1919] chỉ một tháng sau khi Noether hoàn thành công trình của mình, và một lần nữa ta thấy họ có những mối quan tâm giống nhau. Bài báo thứ hai của Humm nhằm mục đích chỉ ra các phương trình năng lượng của Einstein là tương đương với các phương trình chuyển động, bằng một lập luận tương tự với cơ học Lagrange. Phải chăng Rudolf Humm là một trong những người “đến nghe những bài giảng của Noether”? Có lẽ, nhưng

tôi không tìm thấy được bằng chứng nào từ nhật ký của ông. Humm viết nhiều trang nhật ký giải thích cặn kẽ động lực thúc đẩy ông viết hai bài báo trên, nhưng không hề nhắc đến ý tưởng của Noether. Có thể thậm chí ông còn không tham dự bài giảng trình bày kết quả trước Hội Toán học Göttingen của Noether. Việc đó cũng không hẳn là đáng kinh ngạc. Chính Humm muốn bắt đầu sự nghiệp khoa học ở Göttingen, và như thế hiển nhiên ông cần phải gây ấn tượng với Hilbert và Klein [bằng cách tập trung vào nghiên cứu của mình].

Chương trình Erlangen của Klein. Trở lại buổi thảo luận diễn ra sau bài giảng của Klein vào 22 tháng Giêng năm 1918, thính giả tinh ý nhanh chóng nhận ra rằng vectơ năng lượng phức tạp của Hilbert thực ra có thể nhận được theo cách đơn giản hơn nhiều. Hơn nữa, ý nghĩa vật lý của nó là chưa rõ ràng. Thật vậy, Humm đã ghi lại vào tháng 12/1917 rằng Hilbert rất muốn xem xét lại toàn bộ các định luật năng lượng trong thuyết tương đối rộng. Trong hồi đáp với Klein vào tháng Hai 1918, Hilbert cũng bày tỏ sự nhất trí chung với những phát hiện của Klein liên quan đến các định luật bảo toàn. Thật ra, ông đã đi xa hơn bằng cách tuyên bố rằng sự thiếu tương đồng giữa bảo toàn năng lượng cổ điển và phương trình năng lượng của chính ông là một đặc trưng của thuyết tương đối rộng. Hilbert còn cho rằng người ta có thể chứng minh nó như một định lý. Klein đáp lại: “Tôi sẽ rất phấn khích nếu được thấy chứng minh mà anh nhắc đến.” Đối với Klein, điều này có nghĩa là chỉ ra cái gì làm cho một định luật bảo toàn có nội dung vật lý, chứ không phải chỉ là một đẳng thức thuần túy logic. Điều này sau đó trở thành một vấn đề chính mà

Noether muốn giải quyết vào đầu năm 1918.



HÌNH 4. Felix Klein (1849-1925).

Noether đi nghỉ ở Erlangen vào thời điểm Klein hoàn thành bài báo [Klein 1917]. Trong khi đó, Klein trao đổi với Einstein về những vấn đề mở trong thuyết tương đối rộng. Vào 13/3/1918, Einstein phản hồi về công trình của Klein [Klein 1917] như sau [Einstein 1998b, tr. 673-674]:

“Tôi rất phấn khởi khi được đọc thảo luận hết sức sắc sảo và tinh tế của ông về bài báo đầu tiên về nền tảng vật lý của Hilbert. Tuy nhiên, tôi nghĩ rằng những nhận xét của ông về việc xây dựng định luật bảo toàn của tôi là không chính xác.”

Điều Einstein phản đối là luận điểm của Klein cho rằng Einstein đã tìm ra phương trình vi phân về bảo toàn năng lượng dựa trên các đồng nhất thức không có nội dung vật lý. Einstein nhấn mạnh “Chính xác là có những mối quan hệ tương tự như thế trong vật lý không tương đối tính.” Sau khi giải thích ý nghĩa vật lý của các phương trình trong thuyết tương đối rộng của mình, Einstein viết:

“Tôi hi vọng rằng những giải thích khá sơ lược này là đủ để ông hiểu được ý tôi. Trên hết, tôi hi vọng rằng ông sẽ thay đổi ý kiến cho rằng định lý bảo toàn năng lượng tôi thu được chỉ là một đồng nhất thức không đặt điều kiện nào cho những đại lượng xuất hiện trong đó⁽⁸⁾.”

Hồi đáp của Klein không gây ấn tượng gì đối với Einstein, vì ông đã trả lời những

⁽⁸⁾Tức là không có ý nghĩa vật lý, giống như đồng nhất thức $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (BBT).

chỉ trích tương tự của Tullio Levi-Civita và những người khác. Nhưng Klein phần khởi kể rằng đồng nghiệp của ông là Carl Runge đã tìm được cách để thu được các đại lượng bảo toàn một cách trực tiếp bằng cách chọn hệ trục tọa độ phù hợp. Einstein trả lời rằng, chính ông cũng đã thử cách tiếp cận này, tuy nhiên ông đã bỏ cuộc “bởi vì lý thuyết đó dự đoán những sự mất mát năng lượng do sóng hấp dẫn gây ra” [Einstein 1998b, tr. 698], nhưng những sự mất mát đó là không thể giải thích được.

Từ Erlangen, Noether phản hồi về đề xuất của Runge bằng cách chỉ cho Klein thấy đề xuất này thất bại ngay cả trong phạm vi các nguyên lý biến phân cổ điển, khi giải thích nguyên lý tác dụng tối thiểu. Đồng thời, bà cũng diễn đạt ngắn gọn nhưng khúc chiết phát hiện sâu sắc và quan trọng của mình: “Định luật bảo toàn năng lượng *không còn đúng* cho trường hợp bất biến dưới các phép biến đổi của các biến phụ thuộc z cảm sinh bởi toàn bộ các phép biến đổi của các biến độc lập.”⁽⁹⁾

Điều Noether vừa viết ám chỉ hệ quả trung tâm của định lý thứ hai của bà trong [Noether 1918]. Ngay sau đó, Klein phải xem xét lại các quan điểm của mình, còn Runge thì rút lại bài báo ông dự định xuất bản trên tờ *Göttinger Nachrichten*.

Sau những sự kiện đột phá này, Emmy Noether hoàn thành công trình về bài toán biến phân bất biến, trình bày những kết quả nhận được trước Hội Toán học Göttingen vào ngày 23 tháng Bảy. Bà chú

thích ở lời dẫn đầu của [Noether 1918] rằng cách tiếp cận của bà là sự tổng hợp của giải tích biến phân và lý thuyết Lie về các phương trình vi phân bất biến dưới các phép biến đổi vi phân (infinitesimal transformations). Khi bắt đầu sự nghiệp của mình, Sophus Lie đã có nhận định sâu sắc rằng để lấy tích phân của một phương trình vi phân, người ta cần tìm một nhiễu nhỏ của các đường cong tích phân sao cho họ các đường cong vẫn là bất biến. Định lý đầu tiên của Noether trong giải tích biến phân nói rằng, số các đại lượng được bảo toàn tương ứng với một hệ Lagrange (hay Hamilton) bằng số các *loại* biến đổi vi phân độc lập làm cho hệ phương trình bất biến. Định lý này liên quan đến các nhóm biến đổi được xác định bởi một số hữu hạn *tham số*, trong khi đó định lý thứ hai của bà liên quan đến các nhóm được xác định bởi hữu hạn các *hàm số* và *đạo hàm* của chúng. Giống như Lie, bà gọi các nhóm dạng đầu tiên là các nhóm liên tục hữu hạn, còn các nhóm dạng thứ hai là các nhóm liên tục vô hạn. Đặc biệt quan trọng là các nhóm chứa cả hai loại cấu trúc, có tên gọi là các nhóm hỗn hợp (mixed groups).

Định lý thứ hai của Noether đã chỉ ra rằng đối với một nguyên lý biến phân bất biến dưới tác động của một nhóm vô hạn, các biểu thức Lagrange không còn độc lập nữa, mà thỏa mãn một số đồng nhất thức nhất định. Trong bối cảnh của thuyết tương đối rộng, nhóm vô hạn này bao gồm những phép biến đổi cảm sinh từ các phép đổi tọa độ bất kỳ. Ở đây,

⁽⁹⁾Chúng tôi dựa theo cách dịch Noether của Kosmann-Schwarzbach [Kosmann-Schwarzbach 2011, tr. 48], vì có vẻ sáng sủa hơn cách dịch trong nguyên bản của David Rowe. Câu của Noether trong bản dịch tiếng Anh của Kosmann-Schwarzbach là: “by my additional research, I have now established that the [conservation] law for energy is not valid in the case of invariance *under any extended group generated by the transformation induced by the z 's*.” Và Kosmann-Schwarzbach cắt nghĩa thêm: “Here z designates the set of dependent variables, and the last words of the emphasized sentence should be understood as “invariance under the transformations of the z 's induced by all the transformations of the independent variables.” Chú ý rằng cụm từ in nghiêng trong bản dịch *tiếng Việt* câu của Noether là do chúng tôi viết để nhấn mạnh (BBT).

Noether chỉ ra một “nhóm tịnh tiến” bảo toàn các tích phân tác dụng và vì nhóm này mà có bốn mối quan hệ đồng nhất được Hilbert tìm ra trong [Hilbert 1915]. Thay vì gán ý nghĩa vật lý cho các quan hệ đồng nhất đó, Noether nhấn mạnh đây là những định luật bảo toàn bất quy tắc và không tương ứng với các định luật bảo toàn trong cơ học cổ điển hay thuyết tương đối hẹp, vì trong cả hai trường hợp sau ta đều dựa trên các nhóm [liên tục] hữu hạn.

Trong [Kosmann-Schwarzbach 2011, tr. 42-43], Kosmann-Schwarzbach có nhận xét đáng chú ý là Einstein đã sai lầm khi cho rằng các định luật bảo toàn năng lượng trong thuyết tương đối rộng là tương tự như các định luật bảo toàn năng lượng trong vật lý cổ điển (xem trang 21, cột 2). Nhưng sai lầm của Einstein (nếu có thực) không phải là không thể tưởng tượng được. Theo [Kosmann-Schwarzbach 2011, chú thích 6, tr. 27], hơn 100 năm trôi qua từ các công trình của Noether, Einstein, và Hilbert, bảo toàn năng lượng vẫn đang là một vấn đề gây tranh cãi trong giới các nhà vật lý.

Nói về ý nghĩa vật lý của các kết quả nhận được, bà lưu ý rằng định lý đầu tiên tổng quát hóa cơ chế hoạt động của những kết quả cơ bản về bảo toàn trong cơ học cổ điển. Bà mô tả định lý thứ hai như là “khái quát hóa [sử dụng] lý thuyết nhóm tổng quát nhất của thuyết tương đối rộng.” Những kết quả cơ bản mà bà thu được không những giải thích ý nghĩa của phương trình năng lượng Hilbert, mà chúng còn mô tả hết sức chính xác cách thức các định luật bảo toàn phát sinh trong cơ học cổ điển và các lý thuyết trường hiện đại.

Klein rất hài lòng khi nộp bài báo của Noether cho Hội Khoa học Göttingen vào 26/7/1918⁽¹⁰⁾. Trên thực tế, ông đã xem

những phát hiện của Noether như một minh chứng cho “chương trình Erlangen” nổi tiếng được ông phát triển vào năm 1872 khi hợp tác cùng Sophus Lie. Sau khi Hermann Minkowski phát minh ra hình học không-thời gian vào năm 1908, Klein đã phát biểu những nguyên lý lý thuyết nhóm trong chương trình của ông thành một học thuyết chung cho vật lý tương đối. Lý thuyết tương đối, theo chương trình Erlangen, nên được xem như lý thuyết bất biến có liên quan đến một số nhóm nhất định được quan tâm trong một lý thuyết vật lý cụ thể. Trong công trình rút các định luật bảo toàn từ các nguyên tắc biến phân, Emmy Noether rõ ràng đã xem chương trình Erlangen như một nguồn gợi ý.

Về phần Rudolf Himm, ông rời Göttingen để đến Zürich vào tháng Chín năm 1919. Trống tay và rệu rã [sau hai bài báo ít tiếng vang], ông vẫn mong được tiếp tục làm về thuyết tương đối và hoàn thành luận án tiến sĩ dưới sự hướng dẫn của Hermann Weyl, người có ấn tượng tốt với các kết quả của Himm. Nhưng thực tế không như vậy, sự ngờ vực bản thân và những bất ổn về cảm xúc đã khiến ông bỏ cuộc. Sau đó không lâu ông mất liên lạc với bạn bè và những người quen trong những năm ở Göttingen, nhưng tại Zürich ông đã thành danh trong sự nghiệp văn chương. Hermann Hesse đã viết một bài phê bình ca ngợi cuốn tiểu thuyết đầu tay của Himm, sau đó giữa họ nảy sinh một tình bạn thân thiết.

Hilbert dường như không biết gì về cuộc sống mới của Himm, nhưng một ngày nọ, ông hỏi thăm một nhóm người quen biết Himm. Điều này dẫn đến một giai thoại nổi tiếng về một sinh viên không tên tuổi đã bỏ toán để viết văn

⁽¹⁰⁾Chú thích 1 trong bài báo của Noether (xem Hình 1) cho biết sau bản đầu tiên, phiên bản hoàn thiện chỉ được nộp vào cuối tháng 9/1918 (BBT).

(hoặc làm thơ, như trong một số phiên bản). Theo giai thoại, khi biết việc đã xảy ra, Hilbert nhận xét rằng như thế cũng tốt, đằng nào anh chàng đó cũng không có đủ trí tưởng tượng để làm toán.

Theo [Kosmann-Schwarzbach 2011, tr. 64]: “Ồ chú thích cuối cùng trong [Noether 1918], Noether chỉ ra tầm quan trọng của nhận xét của Klein theo tinh thần của chương trình Erlangen, và Noether phát biểu lại nhận xét của Klein thành “từ *tương đối* trong vật lý nên được thay bằng cụm từ *bất biến dưới một tác động nhóm*”. Như thế Noether đã phát triển những vấn đề về nhóm bất biến của các phương trình cơ học và phương trình tương đối rộng thành một lý thuyết tổng quát về các nhóm bất biến của các bài toán biến phân, phân biệt một cách rõ ràng trường hợp các nhóm bất biến là các nhóm Lie hữu hạn chiều với trường hợp các nhóm bất biến phụ thuộc vào các hàm tùy ý và do đó nói chung có chiều vô hạn. Nhờ công trình của những người như Weyl, Chen Ning Yang và Robert L. Mills, nghiên cứu liên quan đến các nhóm sau cùng này sẽ phát triển thành lý thuyết trường chuẩn.”

Lời cảm ơn. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn TS. Nguyễn Hải Châu (ĐH Siegen, CHLB Đức) đã góp những ý kiến quý báu cho việc hoàn thiện bản dịch.

TÀI LIỆU

- [Corry 2004] Corry, Leo (2004): *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898–1918): From Grundlagen der Geometrie to Grundlagen der Physik*. Dordrecht: Kluwer.
- [Einstein 1998a] Einstein, Albert (1998a): *Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 8A: *The Berlin Years: Correspondence, 1914–1917*, Robert Schulmann, et al., eds. Princeton: Princeton University Press.
- [Einstein 1998b] ——— (1998b): *Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 8B: *The Berlin Years: Correspondence, 1918*, Robert Schulmann, et al., eds. Princeton: Princeton University Press.
- [Hilbert 1915] Hilbert, David (1915): Die Grundlagen der Physik I, *Nachrichten der Göttingen Gesellschaft der Wissenschaften*, 1915: 395–407.
- [Hilbert 1917] ——— (1917): Die Grundlagen der Physik II, *Nachrichten der Göttingen Gesellschaft der Wissenschaften*, 1917: 53–76.
- [Humm 1918] Humm, Rudolf Jakob (1918): Über die Bewegungsgleichungen der Materie. Ein Beitrag zur Relativitätstheorie, *Annalen der Physik*, Serie 4, 57: 68–80.
- [Humm 1919] ——— (1919): Über die Energiegleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, Serie 4, 58: 474–486.
- [Klein 1917] Klein, Felix (1917): Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik, *Nachrichten der Göttingen Gesellschaft der Wissenschaften*, 1917: 469–482.
- [Kosmann-Schwarzbach 2006] Kosmann-Schwarzbach, Yvette (2006): *Les Théorèmes de Noether. Invariance et lois de conservation au XXe siècle, avec une traduction de l'article original Invariante Variationsprobleme*, Éditions de l'École Polytechnique, 2004. Deuxième édition, révisée et augmentée.
- [Kosmann-Schwarzbach 2011] ——— (2011): *The Noether Theorems: Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century*, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer, 2011. English translation of [Kosmann-Schwarzbach 2006].
- [Noether 1918] Noether, Emmy (1918): Invariante Variationsprobleme, *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1918: 235–257.
- [Rowe 1999] Rowe, David E. (1999): The Göttingen Response to General Relativity and Emmy Noether's Theorems, in *The Symbolic Universe. Geometry and Physics, 1890–1930*, Jeremy Gray, ed. Oxford: Oxford University Press, 1999, pp. 189–233.
- [Rowe 2004] ——— (2004): Making Mathematics in an Oral Culture: Göttingen in the Era of Klein and Hilbert, *Science in Context*, 17(1/2): 85–129.

Người dịch: Trần Nguyễn Khánh Linh (ĐH Sư phạm, ĐH Huế)

Giáo sư Phạm Hoàng Hiệp nhận giải thưởng Ramanujan 2019

Trần Văn Thành⁽¹⁾

Giải thưởng Ramanujan năm 2019 được Trung tâm quốc tế Vật lý lý thuyết (ICTP) trao cho GS. Phạm Hoàng Hiệp, Viện Toán học, Viện Hàn lâm KHCN Việt Nam. Giải thưởng được trao hằng năm cho một nhà toán học trẻ dưới 45 tuổi ở các nước đang phát triển.

Giải thưởng lấy tên nhà toán học thiên tài Srinivasa Ramanujan (1887-1920), một nhà toán học Ấn Độ tự học nhưng đã có những phát hiện rất quan trọng khi còn rất trẻ. Giải Ramanujan được tài trợ bởi Bộ Khoa học và Công nghệ Ấn Độ và Quỹ Abel của Viện Hàn lâm Khoa học và Nhân văn Na Uy, với sự cộng tác của Liên đoàn Toán học quốc tế (IMU). Người nhận giải được trao tặng 15 nghìn Đô la Mỹ. Giải được trao lần đầu tiên năm 2005 cho Marcelo Viana, hiện nay là viện trưởng Viện Quốc gia về Toán lý thuyết và Toán ứng dụng (IMPA) của Brazil. Hội đồng xét giải năm nay gồm có Alicia Dickenstein (ĐH Buenos Aires), Lothar Goettsche (ICTP, trưởng ban), Kapil Hari Paranjape (Indian Institute of Science Education and Research (IISER) Mohali), Philibert Nang (École normale supérieure Libreville, Gabon), và Vũ Hà Văn (ĐH Yale).



GS. Phạm Hoàng Hiệp. Nguồn: Vnexpress.net.

Giải thưởng ghi nhận những đóng góp nổi bật của GS. Phạm Hoàng Hiệp trong lĩnh vực giải tích phức, đặc biệt trong lý thuyết đa thể vị mà ở đó anh đã có một kết quả nghiên cứu quan trọng về kỳ dị của hàm đa điều hòa dưới, phương trình Monge-Ampère phức và ngưỡng chính tắc với những ứng dụng quan trọng trong hình học đại số và hình học Kähler phức. Giải thưởng cũng ghi nhận những đóng góp của GS. Phạm Hoàng Hiệp trong sự phát triển toán học ở Việt Nam.

GS. Phạm Hoàng Hiệp cho biết anh "rất tự hào và hạnh phúc khi nhận được giải thưởng Ramanujan 2019", đặc biệt là sau khi xem một bộ phim về Srinivasa Ramanujan. "Tôi rất ấn tượng về cuộc sống và những đóng góp to lớn của ông cho toán học. Ông đã phát minh ra nhiều công thức toán học bằng khả năng tự học của mình." Anh nói "Tôi biết rằng toán học đóng góp vào sự phát triển giáo dục và khoa học thông qua việc dạy những kiến thức cơ bản và tư duy toán học" và "Trong quá trình giảng dạy, tôi luôn cố gắng chuẩn bị các bài giảng tốt nhất để cho học sinh thấy các nguyên lý toán học và ứng dụng của chúng."

Phạm Hoàng Hiệp tốt nghiệp Đại học Sư phạm Hà Nội năm 2004, bảo vệ luận án tiến sĩ tại Đại học Umea (Thụy Điển) năm 2008. Anh bảo vệ luận án tiến sĩ khoa học tại Đại học Aix-Marseille (Pháp) năm 2013, và được phong chức danh PGS năm 2011 và GS năm 2017. Anh giảng dạy tại Đại học Sư phạm Hà Nội từ lúc tốt nghiệp đại học đến 2015, và từ 2015

⁽¹⁾Viện Toán học, Viện Hàn lâm KHCNVN.

đến nay, anh làm việc ở Viện Toán học, Viện Hàn lâm KHCNVN. Anh đã công bố hơn 35 bài báo trên các tạp chí toán học quốc tế, một quyển sách chuyên khảo và hai giáo trình giảng dạy đại học và sau đại học. Anh là nhà toán học Việt Nam ở trong nước đầu tiên có bài đăng trên tạp chí *Acta Mathematica*, một trong những tạp chí toán học hàng đầu của thế giới. GS. Phạm Hoàng Hiệp đã được tặng nhiều danh hiệu và giải thưởng, như *Gương mặt trẻ Việt Nam tiêu biểu* năm

2011, Giải thưởng Viện Toán học năm 2013, Giải thưởng Tạ Quang Bửu dành cho nhà khoa học trẻ năm 2015, Thành viên trẻ của Viện Hàn lâm Khoa học Thế giới thứ ba (TWAS) giai đoạn 2016 - 2020.

Thông tin chính thức về giải thưởng Ramanujan 2019 có trên trang mạng của Trung tâm Vật lý lý thuyết ICTP

<https://www.ictp.it/about-ictp/media-centre/news/2019/10/ramanujanwinner2019.aspx>

Các công trình của Alessio Figalli⁽¹⁾

Allyn Jackson

Lời toà soạn. *Nhà toán học người Ý Alessio Figalli đã vinh dự được Đại hội Toán học Quốc tế trao tặng huy chương Fields quý giá cùng với ba nhà toán học khác tại Rio de Janeiro (ICM 2018 - Brasil). Ông sinh ngày 2/4/1984, tốt nghiệp đại học năm 2006 tại Trường Sư phạm cao cấp Pisa (Scuola Normale Superiore di Pisa), CH Ý, và bảo vệ tiến sĩ vào năm 2007 dưới sự hướng dẫn của Luigi Ambrosio (Trường Sư phạm cao cấp Pisa) và Cédric Villani (Trường Sư phạm cao cấp Lyon, Pháp, huy chương Fields năm 2010). Sau khi trải qua các vị trí tại Pháp, Mỹ, hiện nay Figalli là giáo sư tại Học viện Kỹ thuật Zürich (ETH Zürich), Thụy Sĩ.*

Trong lĩnh vực đang rất phát triển là lý thuyết vận tải tối ưu, nơi đang thu hút một số trí tuệ hàng đầu của toán học, Figalli nổi bật lên như một người lãnh đạo chính và một nhà đổi mới. Các công trình của ông, gồm khoảng 150 công bố, là rất

đáng chú ý ngay cả nếu đó là thành tựu của một nhà toán học ở tuổi về hưu; việc ông đạt được nhiều thành tựu như vậy ở tuổi 34 quả là đáng kinh ngạc. Điều quan trọng hơn số lượng là sự phong phú và sâu sắc của các công trình này, thể hiện sự quan tâm trên phạm vi rộng, những nhận thức sâu sắc và sức mạnh kỹ thuật đỉnh cao của tác giả.

Không thể viết một bản tổng quan đầy đủ về các thành tựu của Figalli trong khuôn khổ của một bài báo ngắn. Vì thế chúng tôi sẽ giới thiệu ngắn gọn khái niệm vận tải tối ưu, sau đó miêu tả ba bài toán có thể làm ví dụ về phạm vi quan tâm rộng rãi và sự tinh tế trong các công trình của Figalli.

Hãy tưởng tượng rằng trên giá sách có n cuốn sách và ta phải chuyển chúng về bên phải một vị trí⁽²⁾. Một cách tối ưu là chuyển quyển sách thứ n sang phải một vị trí, sau đó chuyển quyển thứ $n - 1$ sang phải một vị trí, tiếp tục làm như vậy

⁽¹⁾ Allyn Jackson, *The Work of Alessio Figalli*.

<https://www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Prizes/Fields/2018/figalli-final.pdf>

⁽²⁾ Ta không quan tâm đến vị trí giữa các cuốn sách với nhau (ND).

cho đến khi chuyển quyền sách thứ nhất sang phải một vị trí. “Giá” mà ta phải trả trong cách làm này là n dịch chuyển. Có một cách giải tối ưu khác cũng với “giá” n dịch chuyển là chuyển quyền sách thứ nhất sang bên phải n vị trí. Mỗi cách giải nói trên là một bản đồ vận tải tối ưu.



Alessio Figalli (Ảnh: Tatjana Ruf, Viện nghiên cứu toán Oberwolfach).

Những nghiên cứu chặt chẽ đầu tiên về các vấn đề thuộc loại này xuất hiện khoảng 250 năm trước trong các công trình của nhà toán học Pháp Gaspard Monge, người đã tìm cách cực tiểu hóa giá thành vận chuyển nguyên liệu xây dựng từ một số nguồn đến địa điểm xây dựng. Trừu tượng hóa khía cạnh hình học của vấn đề, Monge kết luận rằng bản đồ vận tải tối ưu là một bản đồ làm cực tiểu hóa khoảng cách phải vận chuyển.

Công trình của Monge đã không được tiếp tục phát triển trong vòng 150 năm sau đó do thiếu những công cụ toán học cần thiết. Vào những năm 1940, nhà kinh tế học và nhà toán học Leonid Kantorovich⁽³⁾ đã làm hồi sinh lại đối tượng nghiên cứu này với những công cụ của lý thuyết độ đo và giải tích hàm. Ông mở rộng khuôn khổ bài toán để có thể bao trùm cả những tình thế phức tạp hơn, ví dụ như một nhóm các cửa hàng làm bánh muốn cung cấp sản phẩm cho một số tiệm cà phê. Trong trường hợp này, một bản đồ vận tải tối ưu sắp xếp các cửa hàng làm bánh thành cặp với các

tiệm cà phê sao cho cực tiểu hóa tổng giá thành vận chuyển bánh. Năm 1975, Kantorovich nhận giải Nobel Kinh tế vì các công hiến đó.

Trong những năm 1980, các nhà toán học đã đạt được những bước tiến lý thuyết quan trọng dẫn đến sự bùng nổ ứng dụng mới trong các lĩnh vực như quy hoạch đô thị, thiết kế kỹ thuật, thủy động lực học, xử lý ảnh, nhận dạng và sinh học. Điều này cũng kích thích việc sử dụng lý thuyết vận tải tối ưu bên trong toán học, đặc biệt là trong các lĩnh vực như hình học Riemann và phương trình đạo hàm riêng. Một ví dụ xuất sắc trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng là công trình của Figalli và các đồng nghiệp Francesco Maggi và Aldo Pratelli về các bài toán với tên gọi bài toán đẳng chu.

Bài toán đẳng chu cổ điển có thể phát biểu như sau: Cho trước chu vi của hàng rào, miếng đất được rào có diện tích lớn nhất sẽ có hình dạng như thế nào? Có thể chứng minh rằng hình tròn là tối ưu, đây cũng là hình với diện tích cho trước được bao quanh bởi hàng rào có chu vi ngắn nhất. Bong bóng xà phòng cho ta một ví dụ khác về hiện tượng đẳng chu: một bong bóng chứa được một lượng không khí cho trước đồng thời làm cực tiểu hóa một dạng nào đó của năng lượng, cụ thể, là áp suất bề mặt của màng xà phòng.

Các tinh thể giống bong bóng xà phòng ở chỗ chúng cũng lựa chọn hình dạng có năng lượng cực tiểu - mặc dù những hình dạng này có thể rất khác nhau, phụ thuộc vào cấu trúc nguyên tử của chúng. Những tính chất này của bong bóng xà phòng và tinh thể được biết đến từ một trăm năm trước đã được lý tưởng hóa rất nhiều và không tính đến các lực có thể tác động. Ví dụ, một tinh thể sẽ biến đổi như thế nào

⁽³⁾Leonid Vitaliyevich Kantorovich (1912-1986), nhà toán học và kinh tế học Xô Viết (BBT).

khi có năng lượng đến từ bên ngoài, dưới dạng nhiệt chẳng hạn?

Đây chính là câu hỏi mà Figalli và các đồng nghiệp quan tâm khi xem như một bài toán vận tải tối ưu. Dưới tác động của một lượng nhiệt E , hình dạng tinh thể lý tưởng hoá sẽ bị biến đổi sang một hình dạng khác. Xét giá phải trả là bình phương của khoảng cách mà những điểm trong tinh thể phải dịch chuyển để tinh thể này chuyển sang hình dạng mới, Figalli và các đồng nghiệp nhận được một kết quả đơn giản bất ngờ là mỗi điểm phải dịch chuyển trung bình một quãng đường bằng $\sqrt{E}$. Đây là một kết quả lý thuyết sâu sắc vì nó thiết lập sự ổn định của lời giải, nghĩa là nếu năng lượng được tăng thêm một cách vừa phải thì sự thay đổi hình dạng cũng vừa phải.

Ví dụ thứ hai về công trình của Figalli là trong một nghiên cứu chung với các đồng nghiệp, ông đưa ra những kết quả lý thuyết sâu sắc có thể áp dụng ngay lập tức để nâng cao nhận thức về một hệ thống được gọi là hệ phương trình nửa địa chất (semi-geostrophic equations). Được đưa ra lần đầu tiên bởi các nhà khí tượng học vào những năm 1990, các phương trình này mô hình hóa động học quy mô lớn trong khí quyển và đại dương. Chúng thể hiện sự hiểu biết của chúng ta về khía cạnh vật lý của các dòng quy mô lớn và bao gồm các đại lượng đặc trưng như tốc độ, áp suất và gió địa chất.

Trong khi các phương trình địa chất đường như cung cấp miêu tả chính xác các hiện tượng xảy ra trong khí quyển và đại dương, việc tìm lời giải tin cậy cho các phương trình này lại khó. Trong tình huống như vậy, có thể xảy ra rằng nghiệm không tồn tại hoặc có rất nhiều nghiệm nhưng không thể biết nghiệm nào đại diện cho hiện tượng vật lý đang xảy ra. Máy tính cũng không giúp được gì nhiều, vì những xấp xỉ không tránh khỏi có thể

dẫn đến việc đưa ra một lời giải không đúng. Điều cần đến ở đây là một hiểu biết lý thuyết sâu sắc về hệ phương trình và các kết quả chính xác về sự tồn tại và duy nhất nghiệm.

Và đó chính là những phát triển mà Figalli và các đồng nghiệp của ông đạt được. Họ xem xét một phương trình khác có tên gọi là phương trình Monge-Ampère. Phương trình này đã được nghiên cứu rất sâu trong toán, đặc biệt là trong hình học vi phân, và đã xuất hiện trong rất nhiều vấn đề của khoa học và kỹ thuật. Trong ngôn ngữ nửa-địa chất, phương trình Monge-Ampère thể hiện sự chuyển dịch tối ưu của một khối trù mật đến một khối trù mật khác, trong đó, “giá” là bình phương khoảng cách dịch chuyển (đây là một dạng của động năng). Khối trù mật có thể là những giọt nước hoặc những phần tử trong một đám mây, và chúng di chuyển một cách tối ưu. Với một khối trù mật cho trước, một nghiệm của phương trình Monge-Ampère cho ta một bản đồ vận chuyển tối ưu.

Tất cả các kết quả đã biết trong vòng 50 năm qua về phương trình Monge-Ampère đều thất bại trong việc đưa ra một cách thức rõ ràng cho phép liên kết một vận chuyển tối ưu với khung cảnh nửa-địa chất. Đó là lý do vì sao công trình nghiên cứu của Figalli và đồng tác giả Guido De Philippis gây ra nhiều phấn khích như vậy. Hai ông đã làm một bước đột phá trong hiểu biết cấu trúc nghiệm của phương trình Monge-Ampère và cho chúng ta chính xác những gì cần thiết để áp dụng lý thuyết vận chuyển tối ưu vào phương trình nửa-địa chất. Công trình này của Figalli và Guido De Philippis cân bằng một cách tinh tế sự khéo léo kỹ thuật và nhận thức sáng tạo. Sau đó, De Philippis và Figalli cùng với Luigi Ambrosio và Maria Colombo đã tấn công trực tiếp các phương trình nửa-địa chất và đưa

ra một lời giải hầu như đầy đủ trong miền lỗi ba chiều.

Ví dụ cuối cùng từ các công trình của Figalli là trong lĩnh vực các bài toán biên tự do. Những bài toán này đã được nghiên cứu rất tích cực trong toán, đặc biệt là trong hình học của các bề mặt cực tiểu, và chúng thường xuất hiện trong vật lý, sinh học, cũng như trong công nghiệp và tài chính.

Xét một cục băng được thả vào trong nước. Bên trong cục băng là một vùng với nhiệt độ 0 độ C, còn bên ngoài nó là một vùng với nhiệt độ cao hơn 0 độ C. Vậy biên chia tách hai vùng này có hình dạng thế nào? Một ví dụ khác được biết đến với tên gọi là bài toán chướng ngại vật. Giả sử chúng ta có một màng đàn hồi giới hạn bởi một cái dây và ở trên bàn có một chướng ngại vật, một quả bóng chướng ngại. Khi hạ thấp màng đàn hồi cho chạm vào chướng ngại vật, chúng ta sẽ thấy hai vùng riêng biệt: Vùng mà màng đàn hồi và quả bóng chạm vào nhau, và vùng mà chúng không chạm. Khi chướng ngại vật là quả bóng, biên giữa hai vùng là vòng tròn. Nếu hình dạng của chướng ngại vật là phức tạp hơn hoặc là không chính quy, sẽ rất khó để đoán trước được hình dạng của biên. Các nhà toán học nghiên cứu vấn đề này trong khuôn khổ trừu tượng với các vật chạm vào nhau có thể có số chiều bất kỳ.

Một cách trực giác, có thể chờ đợi rằng biên tự do là trơn, nhưng chứng minh điều này là rất khó. Về nguyên tắc, biên tự do có thể là một tập rất không chính quy, có khi là dạng fractal, hoặc có thể có chứa kỳ dị, như xoắn, gấp lại, hoặc tự cắt.

Trước những năm 1970, người ta hiểu rất ít về hình dạng và độ trơn của biên ngay cả trong trường hợp đơn giản nhất. Một bước tiến then chốt đến vào năm 1977, khi Luis Caffarelli chứng minh được rằng biên tự do là trơn bên ngoài một tập các điểm kỳ dị. Ông cũng đưa ra một miêu tả hình học khá chính xác dạng của tập các điểm kỳ dị này.

Trong vòng 40 năm tiếp đó, các kết quả trọn vẹn thu được chỉ giới hạn ở trường hợp các vật phẳng 2 chiều. Đây là lý do mà nghiên cứu của Figalli và đồng tác giả Joaquim Serra đã được chào đón nồng nhiệt, khi họ đưa ra vào năm 2017 một miêu tả đầy đủ và hoàn chỉnh cho biên tự do. Đặc biệt, họ chỉ ra rằng trong trường hợp 3 chiều, biên tự do là rất trơn, chỉ trừ một số điểm kỳ dị cô lập. Họ cũng đã nhận được một kết quả chính xác về tính chất của các kỳ dị trên biên tự do cho trường hợp số chiều bất kỳ.

Lĩnh vực nghiên cứu của Figalli đòi hỏi một khối lượng kỹ thuật đáng kể khiến người ngoại đạo khó có thể xâm nhập vào. Là người làm chủ được những kỹ thuật này, Figalli đã làm cho lĩnh vực nghiên cứu của ông trở nên dễ tiếp cận thông qua những kiến giải xuất chúng đi xuyên qua các chi tiết kỹ thuật và khai mở phần cấu trúc trừu tượng. Tầm ảnh hưởng của Figalli cũng được nhân rộng nhờ sự thân thiện và hào phóng của ông trong việc chia sẻ ý tưởng với sinh viên và các đồng nghiệp trẻ. Những phẩm chất cá nhân này cùng với tài năng toán học giúp Figalli trở thành một người tiên phong lý tưởng, người sẽ tiếp tục tác động lên toán học trong tương lai.

Người dịch: **Trương Xuân Đức Hà**
(Viện Toán học - Viện HLKHCN Việt Nam và Đại học Thăng Long)

Tin tức hội viên và hoạt động toán học

* Như đã đưa tin trong số trước, **Hội nghị Toán học Châu Á (Asian Mathematical Conference – AMC) năm 2020**, sẽ được tổ chức từ 28 đến 31/7/2020 tại Hạ Long, Quảng Ninh. Có bốn hội thảo vệ tinh của Hội nghị, diễn ra từ 25-27/7/2020, tại Hà Nội, Ninh Bình, và Vĩnh Phúc. Danh sách cụ thể gồm có:

- AMC-2020 Satellite Workshop on *Arithmetic of Automorphic Forms and Their Function Field Analogues*

Venue: Institute of Mathematics, Hanoi.

Organizers: Kim Wansu, Im Bo-Hae (KAIST), Ngo Dac Tuan (CNRS-Lyon), Nguyen Duy Tan (IMH Hanoi).

Email: amc2020sw2@math.ac.vn

- AMC-2020 Satellite Workshop on *Minimal Free Resolutions and Related Topics*

Venue: Institute of Mathematics, Hanoi.

Organizers: Doan Trung Cuong (IMH), Tai Huy Ha (Tulane University, USA), A.V. Jayanthan (Indian Institute of Technology Madras, India), Hop D. Nguyen (IMH), Jinyung Park (Sogang University, Korea)

Email: amc2020sw3@math.ac.vn

- AMC-2020 Satellite Workshop on *Non-linear Analysis and Optimization Theory*

Venue: Hoa Lu, Ninh Binh.

Organizers: Nguyen Quang Huy (Hanoi Pedagogical University 2), Bui Trong Kien (IMH), Vu Van Truong (Hoa Lu University), Nguyen Dong Yen (IMH)

Email: amc2020sw4@math.ac.vn

- AMC-2020 Satellite Workshop on *Differential Equations and Dynamical Systems*

Venue: Hanoi Pedagogical University 2, Xuan Hoa, Vinh Phuc.

Organizers: Tran Van Bang (Hanoi Pedagogical University 2), Tran Dinh Ke (Hanoi University of Education) and Doan Thai Son (IMH).

Email: amc2020sw5@math.ac.vn

Một số mốc thời gian quan trọng của AMC 2020:

- Đăng ký tham dự: Từ 1/10/2019 đến 30/4/2020.
- Gửi tiêu đề và tóm tắt báo cáo: Trước 30/4/2020.
- Xin tài trợ đi lại và/hoặc nơi ở: Trước 31/3/2020.

* **Hội đồng Giáo sư Nhà nước năm 2019** đã công nhận 26 ứng viên ngành Toán đạt chuẩn giáo sư và phó giáo sư. Danh sách cụ thể gồm có:

- Giáo sư (5 người): *Cung Thế Anh* (ĐH Sư phạm Hà Nội), *Nguyễn Định* (ĐH Quốc tế, ĐHQG Tp. HCM), *Đỗ Văn Lưu* (ĐH Thăng Long), *Phạm Hữu Anh Ngọc* (ĐH Quốc tế, ĐHQG Tp. HCM), và *Sĩ Đức Quang* (ĐH Sư phạm Hà Nội).
- Phó giáo sư (21 người): *Nguyễn Lê Hoàng Anh* (ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Tp. HCM), *Ngô Quốc Anh* (ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN), *Mai Hoàng Biền* (ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Tp. HCM), *Nguyễn Huy Chiêu* (ĐH Vinh), *Đoàn Trung Cường* (Viện Toán học, Viện Hàn lâm KHCNVN), *Nguyễn Thanh Diệu* (ĐH Vinh), *Nguyễn Tiến Dũng* (ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN), *Lý Kim Hà* (ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Tp. HCM), *Nguyễn Đăng Hồ Hải* (ĐH Khoa học, ĐH Huế), *Nguyễn Xuân Hồng* (ĐH Sư phạm HN), *Vũ Nhật Huy* (ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN), *Phan Quốc Hưng* (ĐH Duy Tân), *Trần Vũ Khanh* (ĐH Tân Tạo), *Nguyễn Thị Kim Sơn* (ĐH Thủ đô HN), *Tạ Quang Sơn* (ĐH Sài Gòn), *Võ Văn Tài* (ĐH Cần Thơ), *Nguyễn Duy Tân*

(Viện Toán học, Viện Hàn lâm KHCNVN), *Lê Công Trình* (ĐH Quy Nhơn), *Hoàng Lê Trường* (Viện Toán học, Viện Hàn lâm KHCNVN), *Dương Anh Tuấn* (ĐH Sư phạm HN), và *Lê Thanh Tùng* (ĐH Cần Thơ).

Thông Tin Toán Học xin chúc mừng các tân giáo sư và phó giáo sư!

* **Giải thưởng Khoa học Viện Toán học 2019** đã được trao cho TS. Lê Quý Thường (ĐHKHTN, ĐHQGHN) và TS. Nguyễn Đăng Hợp (Viện Toán học, Viện Hàn lâm KHCNVN).

* Trong đợt xét học bổng năm học 2019-2020 của **Quỹ Đổi mới sáng tạo (VinIE Tập đoàn VinGroup)**, có 19 học viên cao học và 6 nghiên cứu sinh ngành Toán đã được Quỹ trao học bổng. Trong số các học viên cao học, có 4 người của ĐH Khoa học Tự nhiên-ĐHQGHN, 6 của ĐH Quy Nhơn, và 9 của Viện Toán học và Học viện KHCN (Viện Hàn lâm KHCN Việt Nam). Sáu NCS được trao học bổng và đơn vị đào tạo họ là: Lê Phước Hải, Huỳnh Thanh Toàn, và Đỗ Ngọc Yến (ĐHKHTN, ĐHQG Tp. HCM), Ngô Tấn Phúc (Viện Toán học), Võ Phước Thịnh (ĐH Đồng Tháp), Kiều Trung Thủy (ĐH Sư phạm HN).

Mỗi học viên thạc sĩ được nhận mức học bổng 120 triệu/1 năm. Mỗi NCS được học bổng 150 triệu/1 năm.

* **NCS. Phan Thanh Hồng** là một trong 3 nghiên cứu sinh nhận được Breakout Graduate Fellowship (Học bổng Nghiên cứu sinh Bứt phá) của đợt tuyển chọn năm 2019, theo thông báo từ Liên đoàn Toán học Quốc tế (IMU). Học bổng Nghiên cứu sinh Bứt phá được thành lập dưới sự đóng góp tài chính của những người nhận được giải thưởng Breakthrough Prize danh giá với mục đích hỗ trợ các NCS xuất sắc ở các nước đang phát triển.

Phan Thanh Hồng là nghiên cứu sinh dưới sự hướng dẫn của TS. Lưu Hoàng Đức (Viện Toán học). Hướng nghiên cứu chính của cô là “Nonautonomous stochastic differential equations driven by fractional Brownian motions”.

Thông tin chi tiết xem thêm tại trang: <https://www.mathunion.org/cdc/awardees-2019>.

* **Giáo sư Hoàng Xuân Phú** đã được bầu vào Viện Hàn lâm Khoa học Kỹ thuật CHLB Đức (Deutsche Akademie der Technikwissenschaften, viết tắt là acatech) tại Đại hội toàn thể của Viện này vào ngày 15/10/2019.



GS. Hoàng Xuân Phú.

Viện Hàn lâm Khoa học Kỹ thuật Đức có sứ mệnh cung cấp cho các nhà hoạch định chính sách cũng như xã hội những tư vấn độc lập, dựa trên bằng chứng xác thực, liên quan đến nhiều lĩnh vực khác nhau và có tác động tới lợi ích của cộng đồng (trong đó có Công cuộc số hóa và Tự đào tạo, Việc làm và Giáo dục, Năng lượng và Tài nguyên, Công nghệ sinh học, Công nghệ y học, văn bản). Các thành viên của Viện là các nhà khoa học xuất sắc trong các lĩnh vực kỹ thuật, khoa học tự nhiên và y học, cũng như khoa học xã hội và nhân văn, được bầu dựa trên thành tựu và uy tín trong khoa học. Viện tổ chức cho các thành viên hoạt động cùng nhau trong các dự án thuộc các lĩnh vực đa dạng kể trên.

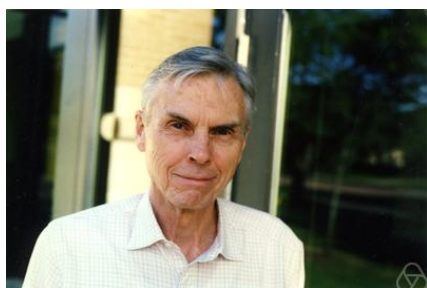
Giáo sư Hoàng Xuân Phú hiện công tác tại phòng Giải tích số và Tính toán khoa học, Viện Toán học. Chuyên ngành của ông là Tối ưu hóa và Điều khiển tối ưu, Giải tích hàm, Giải tích số, và các ứng

dụng. Ông là Tổng biên tập tạp chí Vietnam Journal of Mathematics.

(Ba tin sau cùng dựa trên tin đăng trên trang chủ của Viện Toán học.)

Tin thế giới

* **John Tate**, giáo sư danh dự của Đại học Harvard, một nhà số học nổi tiếng, đã mất ngày 16/10/2019 ở tuổi 94. Tate sinh ngày 13/3/1925 ở Minnesota. Ông lấy bằng thạc sĩ ở Harvard, và bằng tiến sĩ ở Princeton dưới sự hướng dẫn của Emil Artin. Luận án tiến sĩ hoàn thành năm 1950 về “Giải tích Fourier trong trường số và hàm zeta Hecke” của ông là một tác phẩm nổi tiếng trong cộng đồng các nhà số học. Tate được trao giải thưởng Abel năm 2010 vì những đóng góp nền tảng cho lý thuyết số đại số và hình học số học. Ảnh hưởng của Tate được phản ánh qua rất nhiều khái niệm và lý thuyết mang tên ông, như nhóm Tate-Shafarevich, mô-đun Tate, đối đồng điều Tate, giải Tate, giả thuyết Sato-Tate, lý thuyết Hodge-Tate, vân vân.



John Tate năm 1993 ở Texas.

Ảnh: George M. Bergman.

Trong bài phỏng vấn sau khi nhận giải Abel năm 2010, Tate trả lời với phong cách khiêm tốn và điềm đạm đặc trưng của ông: “Tôi nghĩ mình là một người

chuyên xây dựng lý thuyết hoặc đặt ra giả thuyết. Tôi không giỏi chứng minh các giả thuyết, tôi đoán thế. Chắc chắn là tôi không giỏi tìm lời giải cho các bài toán. Tôi sẽ không bao giờ đạt kết quả tốt ở các kỳ thi Olympic. Ở đây vẫn đề then chốt là tốc độ, trong khi tôi không phải là người mạnh về tốc độ. Đó là một điều tuyệt diệu trong toán: Cần bao nhiêu thời gian không phải là vấn đề chính, miễn là cuối cùng ta chứng minh được một định lý hay. Tốc độ là một lợi thế, nhưng không phải điều chủ yếu.” (Theo IHES và AMS)

* **Tổ chức Giáo dục, Khoa học và Văn hóa của Liên hiệp quốc (UNESCO)** đã chọn ngày 14 tháng Ba làm ngày Quốc tế về Toán học hàng năm, bắt đầu từ năm 2020. Đây là thành quả vận động của Liên đoàn Toán học Quốc tế (IMU). Để chào mừng Ngày Toán học Quốc tế (International Day of Mathematics - IDM), và do ngày 14/3/2020 rơi vào thứ Bảy, vào thứ Sáu ngày 13/3/2020, sẽ có hai sự kiện quốc tế song song được tổ chức. Thứ nhất là sự kiện ở trụ sở chính của UNESCO ở Paris, và thứ hai là một sự kiện toàn thể trong khuôn khổ *Diễn đàn Einstein Thì Tương lai* diễn ra từ 10-13/3/2020 tại Nairobi, Kenya. Độc giả quan tâm có thể xem thêm các bài viết về ngày Quốc tế Toán học ở trang mạng <https://www.idm314.org>.

**Kính mời quý vị và các bạn đồng nghiệp
đăng kí tham gia Hội Toán học Việt Nam**

Hội Toán học Việt Nam được thành lập vào năm 1966. Mục đích của Hội là góp phần đẩy mạnh công tác giảng dạy, nghiên cứu, ứng dụng và phổ biến toán học. Tất cả những ai có tham gia giảng dạy, nghiên cứu, ứng dụng và phổ biến toán học đều có thể gia nhập Hội. Là hội viên, quý vị sẽ được tham gia cũng như được thông báo đầy đủ về các hoạt động của Hội, được đăng ký nhận miễn phí bản tin Thông tin Toán học, được mua một số ấn phẩm toán với giá ưu đãi. Để gia nhập Hội lần đầu tiên hoặc để đăng kí lại hội viên, quý vị cần điền và cắt gửi phiếu đăng ký dưới đây tới BCH Hội theo địa chỉ:

Chị Cao Ngọc Anh, Viện Toán Học, 18 Hoàng Quốc Việt, 10307 Hà Nội

Việc đóng hội phí có thể thực hiện theo tập thể hoặc từng cá nhân bằng một trong các hình thức sau:

1. Đóng trực tiếp hoặc gửi tiền qua bưu điện đến chị Cao Ngọc Anh theo địa chỉ trên.
2. Chuyển khoản tới tài khoản của Hội:

Tên tài khoản: Hội Toán học Việt Nam.

Số tài khoản: 0491000028899.

Ngân hàng TMCP Ngoại thương Việt Nam - Chi nhánh Thăng Long.

(Đề nghị thông báo cho chị Cao Ngọc Anh danh sách những hội viên đóng hội phí).

Thông tin về hội viên Hội Toán học Việt Nam cũng như tình hình đóng hội phí được cập nhật thường xuyên trên trang web của Hội.

BCH Hội Toán học Việt Nam

✂

Hội Toán Học Việt Nam Phiếu đăng kí hội viên	Hội phí năm 2020
1. Họ và tên:	Hội phí: 200 000 Đ ☐
2. Nam ☐ Nữ ☐	Acta Math. Vietnamica (*): 120 000 Đ ☐
3. Ngày sinh:	Vietnam J. Mathematics (*): 112 000 Đ ☐
4. Nơi sinh (huyện, tỉnh):	Tổng cộng:
5. Học vị (năm, nơi bảo vệ): Cử nhân: Thạc sỹ: Tiến sỹ: TSKH:	Hình thức đóng: ☐ Đóng tập thể theo cơ quan Tên cơ quan:
6. Học hàm (nơi được phong): PGS: GS:	☐ Đóng trực tiếp
7. Chuyên ngành:	☐ Chuyển khoản
8. Nơi công tác:	☐ Gửi bưu điện (Đề nghị gửi kèm bản chụp thư chuyển tiền)
9. Chức vụ hiện nay:	
10. Địa chỉ liên hệ:	
..... Email: Điện thoại:	(*) Việc mua các tạp chí Acta Mathematica Vietnamica và Vietnam Journal of Mathematics là tự nguyện. Trên đây là giá ưu đãi dành cho hội viên Hội Toán học (gồm 4 số, kể cả bưu phí).
Ngày: Kí tên:	

THÔNG TIN TOÁN HỌC, Tập 23 Số 4 (2019)

Lời mời gặp mặt đầu xuân Canh Tý	1
Hội Toán học Việt Nam	
Karen Uhlenbeck và giải thưởng Abel năm 2019	2
Ngô Quốc Anh	
Vai trò của Emmy Noether trong cuộc cách mạng thuyết tương đối	11
David E. Rowe	
<i>Trần Nguyễn Khánh Linh dịch</i>	
Giáo sư Phạm Hoàng Hiệp nhận giải thưởng Ramanujan 2019	25
Trần Văn Thành	
Các công trình của Alessio Figalli	26
Allyn Jackson	
<i>Trương Xuân Đức Hà dịch</i>	
Tin tức hội viên và hoạt động toán học	30
Tin thể giới	32