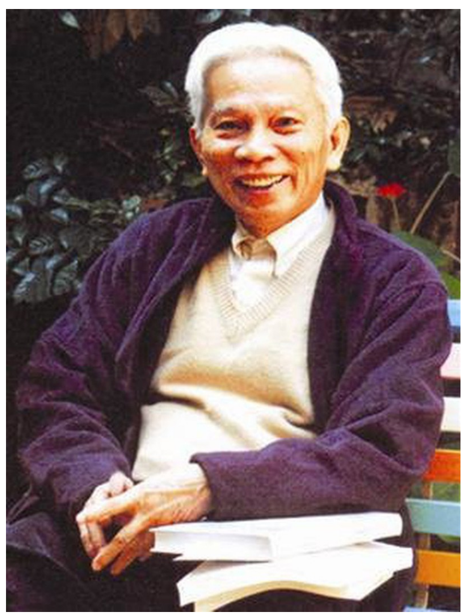
Hội Toán Học Việt Nam

THÔNG TIN TOÁN HỌC

Tháng 9 Năm 2019 Tập 23 Số 3



Thông Tin Toán Học
(Lưu hành nội bộ)

- Địa chỉ liên hệ

*Bản tin: **Thông Tin Toán Học***
Viện Toán Học
18 Hoàng Quốc Việt, 10307 Hà Nội

Email: `ttth@vms.org.vn`

Trang web:
`http://www.vms.org.vn/ttth/ttth.htm`

Ảnh bìa 1. GS. Hoàng Tụy (1927-2019).

- Bản tin **Thông Tin Toán Học** nhằm mục đích phản ánh các sinh hoạt chuyên môn trong cộng đồng toán học Việt Nam và quốc tế. Bản tin ra thường kỳ 4 số trong một năm.

- Thể lệ gửi bài: Bài viết bằng tiếng Việt. Tất cả các bài, thông tin về sinh hoạt toán học ở các khoa (bộ môn) toán, về hướng nghiên cứu hoặc trao đổi về phương pháp nghiên cứu và giảng dạy đều được hoan nghênh. Bản tin cũng nhận đăng các bài giới thiệu tiềm năng khoa học của các cơ sở cũng như các bài giới thiệu các nhà toán học. Bài viết xin gửi về tòa soạn theo email hoặc địa chỉ ở trên. Nếu bài được đánh máy tính, xin gửi kèm theo file với phông chữ unicode.

Trang web của Hội Toán học:
`http://www.vms.org.vn`

Phát triển nghiên cứu ứng dụng của Phòng Phương pháp Toán Lý, Viện Toán Học

GS. TSKH. Ngô Văn Lược[1]

Năm 1962, GS. Tạ Quang Bửu (lúc đó là Phó chủ nhiệm Ủy ban Khoa học và Kỹ thuật nhà nước) chủ trương chọn một số sinh viên tốt nghiệp xuất sắc của trường Đại học Tổng hợp Hà Nội về làm bộ khung để chuẩn bị thành lập Viện Hàn lâm Khoa học Việt Nam. Thực hiện chủ trương đó, GS. Lê Văn Thiêm đã chọn 7 người về để xây dựng Viện Toán học sau này. Những người đầu tiên được chọn về Tổ Hàm biến phức có tôi và anh Hoàng Đình Dung. Về sau có thêm các anh Lê Văn Thành, Trần Gia Lịch, Hà Huy Khoái, Nguyễn Văn Gia...

GS. Lê Văn Thiêm luôn hướng chúng tôi kết hợp nghiên cứu lý thuyết với các vấn đề ứng dụng cấp thiết đối với đất nước như: thủy lợi, phòng chống thiên tai, bão lũ. Theo định hướng đó nhóm tập trung nghiên cứu bài toán biên của hàm biến phức và ứng dụng vào bài toán thấm, tính toán dòng chảy trên hệ thống sông ngòi và lý thuyết nổ mìn.

1. Ứng dụng lý thuyết nổ mìn

Năm 1963, GS. Lê Văn Thiêm mời viện sỹ Liên Xô M.A. Lavrenchiev sang Việt Nam và báo cáo về lý thuyết nổ mìn. Với giả thiết khi nổ môi trường đất đá được xem là một chất lỏng lý tưởng và sử dụng phương pháp hàm biến phức, Viện sỹ Lavrenchiev đã giải thích được nhiều hiện tượng quan trọng trong lý thuyết nổ như: mìn lõm, nổ mìn định hướng... Sử dụng các kết quả nghiên cứu của Viện sỹ Lavrenchiev, nhóm chúng tôi đã tham gia giải quyết một số vấn đề thực tiễn của Việt Nam.

Năm 1964, phối hợp với Phòng Kỹ thuật Khu Gang thép Thái Nguyên, chúng tôi tham gia tính toán nổ mìn buồng cỡ lớn (với 5 tấn thuốc nổ là vụ nổ mìn buồng lớn nhất lúc đó) tại mỏ đá Núi Voi, để lấy đá kịp thời xây dựng Khu Gang thép Thái Nguyên.

Năm 1966, chúng tôi phối hợp với Cục Kỹ thuật Bộ Quốc phòng lập bảng tính toán nổ mìn giúp cho công binh mở đường. Trong các năm 1965, 1966, chúng tôi phối hợp với Viện Thiết kế Bộ Giao thông tham gia tính toán nổ mìn định hướng nạo vét kênh Nhà Lê để đảm bảo giao thông thời chiến đoạn từ Ninh Bình đến Hà Tĩnh.

Thời kỳ này máy bay Mỹ bắn phá ác liệt hệ thống đường sắt và đường bộ của ta, nhằm ngăn cản việc tiếp tế súng đạn, lương thực cho chiến trường miền Nam. Vùng giáp giới Thanh Hóa - Nghệ An, đường sắt, đường bộ tập trung vào một hẻm núi, lại có nhiều cầu (cầu Vằng, cầu Hổ, cầu Hoàng Mai) nên thường xuyên bị bom Mỹ cắt đứt. Vì thế cấp trên chủ trương mở thêm đường vận tải thủy theo kênh Nhà Lê, có tuổi đời cả ngàn năm đã bị bồi lấp. Nhóm chúng tôi (anh Thành, anh Lịch, anh Khoái và tôi) tính toán thiết kế mìn định hướng và cùng cán bộ kỹ thuật Viện Thiết kế giao thông ra công trường (vào ban đêm để tránh máy bay

[1]Email: ngomanhlam@gmail.com

địch), hướng dẫn thanh niên xung phong và dân công hỏa tuyến chế tạo mìn định hướng, nhằm đưa đất cát bay về một bên kênh. Phương pháp này cho phép giảm nhiều công sức nạo vét kênh, đảm bảo tiến độ thi công phục vụ chiến trường. Tham gia nhóm nổ mìn tại khúc kênh Nhà Lê ở Hoàng Mai còn có các anh Lê Hùng Sơn, Nguyễn Kim Đĩnh. Nhóm này năm 1967 tham gia áp dụng nổ mìn định hướng trong việc làm đường Hồ Chí Minh, đoạn qua rừng Hòa Bình.

Tổ Hàm phức sơ tán tại Hà Bắc, 1965-1966. Từ trái qua phải: Lê Văn Thành, Trần Gia Lịch, Ngô Văn Lược. (Ảnh: N.V. Lược.)

Năm 1972, nhóm chúng tôi tham gia tính toán nổ mìn lõm ở các mỏ đá Phủ Lý, Đồng Mỏ, phục vụ cho việc đảm bảo giao thông đường sắt thời chiến.

2. Ứng dụng lý thuyết thấm

Chúng tôi được nghe GS. Lê Văn Thiêm đọc bài giảng về ứng dụng hàm phức vào lý thuyết thấm từ khi học tại Khoa Toán trường ĐH Tổng hợp Hà Nội. Sau khi về Bộ phận nghiên cứu Toán Lý, Ủy ban Khoa học và Kỹ thuật Nhà nước, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu lý thuyết, đồng thời tìm cách ứng dụng vào thực tiễn. Ứng dụng đầu tiên của chúng tôi là tính toán thấm để thau chua, rửa mặn cải tạo thành đất trồng lúa tại nông trường Rạng Đông, Nam Hà [12].

Qua quá trình nghiên cứu ở Tổ Hàm phức cũng như Phòng Phương pháp Toán Lý (thành lập năm 1978), chúng tôi nhận thấy để có thể giải quyết các vấn đề thực tiễn cần phải phát triển các phương pháp giải gần đúng như sai phân hữu hạn, phần tử hữu hạn, biểu diễn tổng,... Đồng thời phải xây dựng các chương trình phần mềm để tìm lời giải số, tức là phải tin học hóa toán học.

GS. Lê Văn Thiêm đã cử các cán bộ chủ chốt của Phòng đến các trung tâm tính toán lớn của Liên Xô và Pháp để phát triển hướng nghiên cứu này. Nhờ đó chúng tôi đã xây dựng được bộ phần mềm tìm lời giải số cho bài toán thấm qua đập đất (bài toán có biên tự do), nhờ phương pháp phần tử hữu hạn, có thể chạy trên cả máy tính lớn cũng như trên máy tính để bàn. Nhờ có bộ phần mềm này, chúng tôi đã ký hợp đồng khoa học với Ban Sông Đà để giải quyết vấn đề thấm và ổn định của đập thủy điện Hòa Bình. Mùa lũ các năm 1981, 1982, đập thủy điện Hòa Bình đang xây dựng dở dang. Nếu không có biện pháp xử lý, lũ có thể cuốn trôi phần đập đã đắp. Dựa trên kết quả tính toán của chúng tôi, các cán bộ kỹ thuật của Ban Sông Đà chọn giải pháp dùng các cọc cừ bê tông gia cố những vùng đất yếu do thấm, nên đập đã đứng vững qua hai mùa lũ, góp phần đảm bảo đúng tiến độ thi công đập thủy điện Hòa Bình. Bộ phần mềm này đã được chúng tôi mở rộng để tính thấm qua hệ thống gồm nhiều đập đất [7].

Sau này, khi một số cán bộ Phòng Phương pháp Toán Lý chuyển đi nơi khác, ứng dụng của bài toán thấm được mở rộng sang một số lĩnh vực, trong đó có ngành dầu khí. Để nâng cao hiệu quả khai thác, phải giải một bài toán dầu khí phức tạp. Một mặt do chất lỏng không phải là nước mà là dầu thô hoặc khí đốt nên qui luật thấm tuyến tính của Darcy không còn đúng nữa, tức là phải giải bài toán thấm phi tuyến. Mặt khác môi trường thấm có tính bất đồng nhất rất cao. Chẳng hạn tại nhiều mỏ dầu khí Việt Nam (như mỏ Bạch Hổ, mỏ Rồng của Vietsovpetro), dầu không nằm trong các vỉa trầm tích thông thường mà nằm trong tầng đá móng granite nứt nẻ. Hiện chưa có bộ phần mềm nào cho mô hình thấm loại này. Chúng tôi đã cùng cán bộ địa chất của Xí nghiệp Liên doanh Vietsovpetro tìm chọn được phần mềm Imex của Canada tương đối phù hợp, để cán bộ kỹ thuật Vietsovpetro phối hợp với nhiều đơn vị trong nước (trong đó có Viện Cơ học ứng dụng thuộc Viện Khoa học Việt Nam) cải tiến thích hợp, góp phần để Vietsovpetro thiết kế phương án khai thác mỏ tối ưu, nâng cao hệ số thu hồi dầu [8, 9, 2].

3. Ứng dụng tính toán dòng chảy

Cùng với Viện Cơ học, Phòng Phương pháp Toán Lý của Viện Toán học thực hiện nhiều nghiên cứu lý thuyết cũng như xây dựng các bộ chương trình phần mềm tính dòng chảy trên hệ thống sông ngòi Việt Nam [1]. Ngay từ năm 1976, phòng chúng tôi đã xây dựng được bộ chương trình tính dòng chảy trên sông và kênh hở [4]. Phòng chúng tôi cũng xây dựng các bộ chương trình tính khuếch tán và xói mòn lòng sông do dòng chảy sau đập thủy điện Hòa Bình [3]. Bộ chương trình của phòng chúng tôi về tính lan truyền sóng gián đoạn khi vỡ đập thủy điện Hòa Bình, cho phép hình dung mức độ thiệt hại ở vùng hạ du để chuẩn bị các biện pháp phòng ngừa [5, 6]. Phòng chúng tôi cũng xây dựng bộ chương trình tính mức độ ô nhiễm nước ở hồ thủy điện Trị An và trên sông Sài Gòn sau đập thủy điện này.

4. Kết hợp nghiên cứu, ứng dụng, và đào tạo

Ngay từ khi thành lập Tổ Hàm biến phức, chúng tôi đã tham gia giảng dạy chuyên đề *Các phương pháp toán học trong lý thuyết thấm* cho các lớp nâng cao trình độ kỹ sư tại các trường ĐH Thủy lợi, ĐH Xây dựng, ĐH Giao thông, và chuyên đề này về sau đã được viết thành một cuốn sách chuyên khảo [11].

Trong quá trình hoạt động, Tổ Hàm biến phức cũng như Phòng Phương pháp Toán Lý luôn chú trọng đào tạo trình độ cao (tiến sỹ, tiến sỹ khoa học). GS. Lê Văn Thiêm đã cùng chúng tôi hướng dẫn và tiến hành bảo vệ thành công những luận án phó tiến sỹ đầu tiên tại Viện Khoa học Việt Nam năm 1978. Đó là NCS. Ngô Xuân Sơn (ĐH Sư phạm Hà Nội) với đề tài "Một số biểu diễn tích phân và nghiệm tường minh một lớp bài toán biên của hàm x^k-giải tích" và NCS. Phạm Hữu Vĩnh với đề tài "Phương pháp biểu diễn tổng và bài toán thấm đối xứng trục trong môi trường không đồng chất".

Hai cán bộ của Phòng Phương pháp Toán Lý (các anh Nguyễn Văn Ngọc và Vũ Văn Đạt), dựa trên các kết quả nghiên cứu trong thời gian làm việc tại Phòng, đã bảo vệ thành cộng luận án phó tiến sỹ tại Liên Xô (cùng với các giáo sư Liên Xô, TS. Ngô Văn Lược là người đồng hướng dẫn hai luận án này). NCS. Lê Xuân Quảng, Viện Khoa học Tính toán điều khiển, người tham gia seminar của Phòng, đã bảo vệ thành công luận án phó tiến sỹ dưới sự hướng dẫn của TSKH. Ngô Văn Lược. PGS. Nguyễn Văn Gia, một cán bộ chủ chốt của Phòng Phương pháp Toán Lý, mở rộng các kết quả nghiên cứu trong thời gian công tác tại Phòng, đã bảo vệ thành công luận án tiến sỹ khoa học tại Ba Lan. PTS. Lưu Công Đào, dựa vào các kết quả khoa học trong quá trình hợp tác nghiên cứu giữa Phòng và Ban Sông Đà, đã bảo vệ thành công luận án tiến sỹ khoa học tại Liên Xô.

Mặc dù lực lượng không đông, Phòng Phương pháp Toán Lý đã cố gắng đạt được một số thành tích trong nghiên cứu lý thuyết, ứng dụng thực tiễn, và đào tạo, góp phần vào thành tích chung của Viện Toán học.

TÀI LIỆU

[1] Nguyễn Văn Điệp, Trần Gia Lịch, Ngô Văn Lược, Nguyễn Tất Đắc, *The use of mathematical models for hydrological studies in Vietnam*, Advances in Applied Mechanics 9 (1986), N02, 83-93.

[2] Nguyễn Văn Gia và các đồng sự, *Xây dựng các modun chương trình ứng dụng trong lĩnh vực dầu khí*, Viện Cơ học ứng dụng, thành phố Hồ Chí Minh, 1998.

[3] Trần Gia Lịch, Nguyễn Công Điều, *A numerical method for solving the diffusion problem in a river or open channel system*, In: *Environmental Hydraulics*, Lee Cheung (eds) Bakema Rotterdam (1991), 1257 – 1262.

[4] Trần Gia Lịch, Bùi Thị Hoàng, Vũ Minh Đức, *Tính dòng chảy không dừng trên hệ thống sông và kênh hở*, Tập san Toán học (1976), 80 – 90.

[5] Trần Gia Lịch, Hoàng Quốc Ơn, Ngô Văn Lược, *Calculation of discontinuous waves by the method of characteristic with fixed grid points*, Zh. Vysch. Mat. i Mat . Fiz. 24 (1984), N03, 442 – 447 (In Rusian).

[6] Trần Gia Lịch, Hoàng Quốc Ơn, *Ecoulement en rivière après une rupture de barrage. Calcul pas la méthode des différence finies associées avec des caracteristiques*, La Houille Blanche 6 (1990), 433–439.

[7] Ngô Văn Lược, Lê Kim Luật, Tạ Hồng Quảng, *Thuật toán và bộ chương trình tính thấm qua hệ thống đập đất và ứng dụng*, Báo cáo Viện Toán học Hà Nội, 1985.

[8] Ngô Văn Lược, Phạm Quang Ngọc, *The model of permeability flow in the porous fractured medium*, Proceeding of the International Conference on Engineering Mechanics Today, Hanoi, 1995, 71-75.

[9] Ngô Văn Lược, Trương Công Tài, Phạm Quang Ngọc, Nguyễn Văn Út, *Some Imex applications in Vietsovpetro*, Report in TAC of Computer Modelling Group, Calgary (Canada) 1997.

[10] Lê Văn Thiêm, *Các công trình khoa học tiêu biểu*. Hà Huy Khoái sưu tầm và giới thiệu. NXB Giáo dục, 2010.

[11] Lê Văn Thiêm, Ngô Văn Lược, Hoàng Đình Dung, *Một số vấn đề toán học trong chuyển động nước thấm*, Trường Đại học Tổng hợp TP. Hồ Chí Minh, 1978.

[12] Lê Văn Thiêm, Ngô Văn Lược, Lê Văn Thành, *Bài toán thấm trong vấn đề rửa mặn*, Tập san toán lý, tập II, N2, 1966, 23 – 26.

Một chuyến thăm Việt Nam[1]

Peter Hilton[2]

Đầu tháng Tư năm nay[3], tôi nhận được một cú điện thoại "bí ẩn" từ TS. Judy Ladinsky, giáo sư y tế dự phòng tại Đại học Wisconsin-Madison. Hóa ra với cương vị chủ tịch Ủy ban Hoa Kỳ về Hợp tác Khoa học với Việt Nam, bà điện thoại để hỏi liệu tôi có thể thăm Đại học Tổng hợp Hà Nội sau khi dự hội nghị quốc tế về tôpô đại số tại Singapore vào giữa tháng Sáu hay không.

Các nhà tôpô ở Hà Nội, đặc biệt là TS. Huỳnh Mùi, trưởng nhóm tôpô đại số ở đó (lúc ấy đang thăm Hoa Kỳ và thật ra đang có mặt trong văn phòng TS. Ladinsky khi bà gọi cho tôi), đều biết rằng tôi sẽ ở Singapore để dự hội nghị, và cũng biết tôi đã rất nỗ lực để giúp một số nhà tôpô-học Việt Nam được mời sang dự hội nghị này. (Thật không may, những nỗ lực của tôi cuối cùng đã bị cuốn phăng vì quan hệ chính trị căng thẳng giữa Singapore và Việt Nam lúc ấy.) Tôi đã nhận lời thăm Hà Nội từ 21 đến 26 tháng 6, và biết rằng cần ghé Bangkok lấy visa rồi bay từ đó đến Hà Nội. Thực ra Bangkok là sân bay duy nhất thuộc thế giới phi-cộng-sản, từ đó có thể bay trực tiếp đến Hà Nội, và chỉ có hai chuyến một tuần theo mỗi chiều.

Tôi đến Bangkok thứ Năm ngày 20 tháng 6, và sau một vài khó khăn về visa, cũng bay được đến Hà Nội sáng sớm hôm sau trên một chuyến bay của Hàng không Việt Nam.

Đón tôi ở sân bay có Giáo sư Phạm[4], trưởng bộ môn Đại số-Hình học-Tôpô của Đại học Tổng hợp Hà Nội, và một người đại diện của Bộ Đại học[5] tên Hugh[6] (anh ấy bảo tên mình như thế, nhưng có lẽ tên anh ấy được viết khác). Tôi cũng

---

[1]Nguồn: FOCUS, The Newsletter of the Mathematical Association of America, Volume 5 Number 6, Nov-Dec 1985.

[2]Giáo sư Toán học, Đại học Bang New York, Binghamton. Hilton sinh năm 1923 tại London, Anh quốc và mất năm 2010 tại Binghamton, Hoa Kỳ.

[3]Năm 1985.

[4]GS. Phạm Ngọc Thao, theo thông tin của GS. Nguyễn Hữu Việt Hưng. Các ghi chú về các nhân vật trong bài là do GS. Hưng cung cấp. Người dịch cảm ơn GS. Hưng đã cung cấp những thông tin giá trị cũng như đã dành nhiều thời gian để hiệu đính bản dịch.

[5]Ministry of Higher Education: Hồi ấy còn Bộ Đại học và Trung học chuyên nghiệp Đến tháng 3/1990, bộ này nhập với Bộ Giáo dục thành Bộ Giáo dục và Đào tạo.

[6]Có thể là Hưng hay Hùng (hoặc cũng có thể là Hưu - TTTH). Tác giả còn kể về người này ở đoạn cuối. Ta cứ để nguyên Hugh như thế để tôn trọng tác giả. Người dịch đã hỏi GS. Nguyễn Hữu Việt Hưng liệu nhân vật này có phải là ông hay không, và được ông trả lời qua email: *"34 năm đã qua kể từ ngày ấy, 1985. Ký ức của mình có mảng tốt, có mảng không còn đủ tốt. Dù sao, mình không nghĩ rằng Hugh trong bài là mình, vì những lý do sau đây: 1) Mình không nhớ có ra sân bay đón Peter Hilton hay không. 2) Mình không bao giờ nhận rằng mình là đại diện Bộ Đại học. Có điều chắc chắn, mình là đại diện nhóm Tôpô Đại số đưa GS. Hilton, những lúc ông không giảng bài, tham quan các di tích và thắng cảnh tại Hà Nội, nói riêng là Văn Miếu - Quốc Tử Giám và Bảo tàng Mỹ thuật Việt Nam (66 Nguyễn Thái Học). Vừa tới cổng Bảo tàng Mỹ thuật Việt Nam, ông bỗng đứng sững, mắt nheo nheo ngắm toà nhà chính, rồi ông thốt lên trầm trồ: "Trời ơi, tỉ lệ vàng!". Khi đó mình mới để ý rằng quả là toà nhà này, do người Pháp xây những năm 30 của thế kỷ 20, có tỉ lệ vàng. (Mình có viết cả một bài về chuyện này.)..."*

[7]Có thể đoán tên tiếng Việt của người này là Được - TTTH.

đã làm quen với tài xế của mình. Anh ấy xưng tên là O.K.[7], và anh lái chiếc Volga cổ đưa đón tôi những ngày sau đó. Chúng tôi trở nên thân thiết chủ yếu vì sự đam mê xì-gà Thụy Sỹ của anh. (Có nhiều thuốc lá ở Việt Nam, nhưng tôi e chất lượng không được tốt lắm.)

Kể cho hết những chuyện đáng nhớ trong chuyến thăm này thì rất dài, tôi chỉ ghi lại đây những điều ấn tượng nhất.

Peter Hilton (Nguồn: Margaret Hilton.)

Trước hết, Việt Nam là một dân tộc đầy phẩm giá và tự trọng, biết chấp nhận hoàn cảnh cực kì khó khăn của mình một cách bình tĩnh ngoan cường. Mức sống rất thấp, ngay cả so với các tiêu chuẩn của thế giới thứ ba; đất nước này chắc chắn vẫn chưa hồi phục sau một cuộc chiến kéo dài hơn ba mươi năm, nếu việc hồi phục có thể xảy ra. Thứ hai, bất chấp những thiếu thốn và sự căm hờn hoàn toàn xác đáng người Việt có thể có trước những kẻ đã hủy hoại đất nước mình, người Việt quả là thân thiện, điều này tôi nhận ra ở những người bình thường cũng như những người đón tiếp tôi. Không có gì phải nghi ngờ việc người Việt Nam, đặc biệt là giới trí thức, mong muốn có nhiều liên hệ hơn với các đồng nghiệp Phương Tây.

Thật vậy, họ có rất ít những mối liên hệ như thế, kể cả trực tiếp và gián tiếp. Người ta nói rằng từ 1975 đến nay tôi là nhà toán học thứ hai từ Hoa Kỳ đến thăm Việt Nam (người thứ nhất là Neal Koblitz ở Đại học Washington[8]). Một vài nhà y tế học tận tụy đã đến Việt Nam (trong đó có TS. Ladinsky, người lãnh đạo Uỷ ban dàn xếp những chuyến đi này), đã làm những việc tuyệt vời trong cuộc chiến đấu với bệnh tật và phổ biến những thói quen tốt cho sức khỏe. Nhưng bức tranh tổng thể vẫn là một sự cô lập gần như hoàn toàn. Sự cô lập càng rõ thêm vì Đại học Tổng hợp Hà Nội không đủ khả năng mua sách cho thư viện hay đặt mua các tạp chí. Nếu có một máy copy xerox ở trường đại học thì tôi đã không nhìn thấy nó; còn

[8]Koblitz đến thăm Hà Nội vào tháng Sáu năm 1978. Xem Thông Tin Toán Học Tập 23 (2019), số 2, trang 7–15 (BBT).

máy chữ cơ học quả là một sự xa xỉ hiếm hoi!

Trong tình cảnh khó khăn như thế, chất lượng của các hoạt động toán học, gồm cả nghiên cứu lẫn giảng dạy, cao đến mức kì lạ, minh chứng cho một sự kết hợp hiếm hoi giữa tài năng đặc biệt với sự tận hiến hoàn toàn. Trong lĩnh vực chuyên môn của mình, tôi có thể khẳng định chắc chắn rằng các công trình TS. Mùi và trường phái của ông đang thực hiện đặt họ vào hàng những chuyên gia thuần thục nhất trong việc vận dụng lý thuyết đối đồng điều, đặc biệt là các toán tử đối đồng điều liên quan đến các lý thuyết đối đồng điều suy rộng, để nghiên cứu các bài toán phân loại đồng luân cho nhiều kiểu không gian khác nhau (đa tạp, không gian cấu hình,...). Từ những thảo luận dài hơi và chi tiết với các nhà toán học ở Viện Khoa học Việt Nam, tôi cũng nhận thấy rằng chuẩn mực được đặt ra trong các lĩnh vực khác, bao gồm cả toán ứng dụng, là rất cao.

Chính các nhà nghiên cứu toán học xuất sắc ở đại học đã đóng một vai trò quan trọng trong việc thiết kế và giảng dạy các giáo trình toàn diện và khó, không chỉ ở Hà Nội mà còn ở cả các tỉnh thành. Tôi chưa thấy ở nơi nào khác những bằng chứng thuyết phục hơn về sự bổ sung tự nhiên giữa nghiên cứu và giảng dạy.

Tôi đã trình bày nhiều bài giảng trong hoàn cảnh tương đối mệt mỏi (nhiệt độ 36°C, độ ẩm 85%, không có điều hòa nhiệt độ). Tôi ngạc nhiên về mức độ trọng thị dành cho những bài giảng của mình! Ngay cả ngày Chủ Nhật, chương trình của tôi cũng kéo dài đến ba tiếng rưỡi đồng hồ giảng bài (sau đó là tham quan!), với nhiều người nghe giảng điều này đồng nghĩa với việc họ phải đạp xe hai chục cây số hai lần đi và về.

Tôi cũng trình bày một bài giảng cho các giáo viên trung học có hoài bão và giảng viên đại học, trong đó tôi so sánh các nền giáo dục đại học Hoa Kỳ và Anh quốc, cả về nguyên lý lẫn thực tiễn. Tôi ái ngại khi biết rằng có người[(9)] phải đi tàu hỏa 48 tiếng để đến nghe bài giảng của tôi. Nhưng những câu hỏi được đặt ra sau bài giảng đều rất sắc sảo và thích đáng, không có dấu hiệu gì của "sự kỳ thị môn toán" ở đây!

Hôm thứ Tư, trước khi tôi trở về Mỹ, Hugh đến cùng TS. Dũng[(10)], một nhà tôpô trẻ tôi đã quen biết, để đưa tôi ra sân bay. Hugh chuyển cho vợ chồng tôi quà của ông Chủ nhiệm Khoa Toán, Đại học Tổng hợp Hà Nội (người tôi đã gặp hôm thứ Hai và đã cùng trao đổi nhiều về vai trò của toán học trong đại học)[(11)]. TS. Dũng muốn đi cùng tôi, tận dụng những phút cuối cùng để chuyện trò về tôpô. Những việc hai người bạn ấy đã làm để lại trong tôi những ấn tượng thật khó phai về con người Việt Nam: nhiệt tâm, hào phóng, với một khát khao cháy bỏng tiếp cận tri thức và giao tiếp con người.

Người dịch: Nguyễn Đặng Hồ Hải (ĐH Khoa học, ĐH Huế).

[(9)]Theo email của GS. Nguyễn Hữu Việt Hưng, *"người đó là Nguyễn Viết Đức, lúc ấy đã tốt nghiệp đại học, đang học làm Toán với GS. Huỳnh Mùi dù chưa thi vào NCS, là Giảng viên Đại học Tổng hợp Huế, nay là Giảng viên Đại học Đà Nẵng. Đức đã đi xe lửa 2 ngày từ Huế ra Hà Nội để nghe bài giảng của P. Hilton."*

[(10)]Nguyễn Việt Dũng, thành viên Viện Toán, lúc ấy đang là NCS của GS. Huỳnh Mùi ở ĐHTH Hà Nội.

[(11)]Chủ nhiệm Khoa Toán Đại học Tổng hợp Hà Nội lúc ấy là GS. Hoàng Hữu Như.

Về một số công trình của Akshay Venkatesh

Đào Phương Bắc[(1)]

1. Một thần đồng toán học

Akshay Venkatesh sinh năm 1981 ở New Delhi, Ấn Độ. Năm Akshay lên hai, gia đình anh chuyển đến Perth (Úc) và anh lớn lên ở đó. Năm 1993, khi mới 12 tuổi, anh đã giành Huy chương Đồng kỳ thi Vật lý quốc tế (IPhO), và năm sau, anh đứng thứ hai trong kỳ thi học sinh giỏi Toán Quốc gia của Úc. Sau đó anh giành huy chương Bạc kỳ thi học sinh giỏi Toán Châu Á-Thái Bình Dương (APMO) và huy chương Đồng kỳ thi Toán Quốc tế (IMO) năm 1994 ở Hồng Kông. Khác với những tài năng toán học khác, A. Venkatesh không tham dự thêm kỳ thi IMO nào mà vào học đại học ngay năm 13 tuổi, và là sinh viên trẻ nhất từ trước đến nay của Đại học Western Australia. Không lâu sau, năm 16 tuổi, anh tốt nghiệp đại học hạng xuất sắc và được trao giải sinh viên của nhóm ngành Khoa học, Kỹ thuật, Y dược có thành tích xuất sắc nhất.

Năm 1998, khi mới 17 tuổi, A. Venkatesh bắt đầu làm luận án tiến sĩ ở Đại học Princeton với một trong những chuyên gia hàng đầu về Lý thuyết số giải tích là Peter Sarnak, và anh nhận bằng tiến sĩ ở đại học danh tiếng này năm 21 tuổi. Bảo vệ xong luận án, anh nhận vị trí nghiên cứu viên sau tiến sĩ mang tên C.L.E. Moore tại Viện Công nghệ Massachusetts (MIT). Vào năm 2004, anh nhận học bổng nghiên cứu danh giá của Viện Toán Clay, và dành thêm một năm ở MIT, trước khi trở thành thành viên nghiên cứu tại Viện Nghiên cứu cao cấp (IAS) Princeton (2005-2006).

Học bổng của Viện Toán Clay hỗ trợ vị trí nghiên cứu tại các trung tâm toán học lớn trong vòng 5 năm, nhưng chỉ sau hai năm, A. Venkatesh đã có vị trí phó giáo sư ở Viện Toán Courant của Đại học New York. Sau đó vào tháng 9 năm 2008, khi mới 27 tuổi anh đã nhận vị trí giáo sư chính thức tại Đại học Stanford. A. Venkatesh làm việc liên tục ở Đại học Stanford trong nhiều năm trước khi dành một năm học (2017-2018) làm giáo sư mời đặc biệt tại IAS, Princeton. Vài ngày sau khi nhận Huy chương Fields, vào giữa tháng 8 năm 2018, anh đã trở thành giáo sư chính thức của viện nghiên cứu danh tiếng này.

Trước khi nhận Huy chương Fields năm 2018, Venkatesh đã nhận Giải thưởng Salem (2007), Học bổng nghiên cứu Packard (2007) và Giải thưởng SASTRA Ramanujan cho Lý thuyết số (2008), Giải thưởng Infosys cho nhà khoa học xuất sắc nhất Ấn Độ năm 2016, Giải thưởng Ostrowski về Toán năm 2017.

Sau đây là lời tuyên dương của Liên đoàn Toán học thế giới[(2)] dành cho Venkatesh: *"Venkatesh được trao Huy chương Fields vì công lao kết hợp Lý thuyết số giải tích, Hệ động lực thuần nhất, Tôpô, và Lý thuyết biểu diễn, để giải quyết các vấn đề đã tồn tại lâu trong những lĩnh vực như lý thuyết đẳng phân phối (equidistribution) của các đối tượng số học"*.

---

(1)Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội. Email: bacdp@vnu.edu.vn

(2)https://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal/fields-medals-2018, https://www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Prizes/Fields/2018/Venkatesh-Citation.pdf

Akshay Venkatesh (Nguồn: Facebook/CBS Science Club)

Cụ thể hơn *"Akshay Venkatesh đã có những đóng góp sâu sắc trong một phạm vi rất rộng lớn, liên kết nhiều ngành toán học như Lý thuyết số, Hệ động lực trên không gian thuần nhất, Lý thuyết biểu diễn và Hình học số học. Anh giải quyết nhiều bài toán mở có từ lâu bằng cách kết hợp phương pháp từ những lĩnh vực tưởng như không liên quan với nhau, trình bày cách tiếp cận độc đáo đối với các vấn đề cổ điển, và đặt ra những giả thuyết bao quát đến mức đáng kinh ngạc."*

2. Các công trình của Venkatesh

2.1. Tính đẳng phân phối và vấn đề dưới lồi. Mặc dù các đóng góp của Venkatesh rất rộng nhưng có thể nói một mạch tương đối xuyên suốt trong những nghiên cứu của Venkatesh là về tính đẳng phân phối (equidistribution) cho các đối tượng thuộc Lý thuyết số. Những đóng góp cho bài toán dưới lồi (subconvexity problem) và ứng dụng vào lý thuyết đẳng phân phối là điểm nổi bật đầu tiên trong công trình của Venkatesh.

Ví dụ đơn giản nhất về tính đẳng phân phối: Dãy $na \pmod 1$ phân phối đều trên đường tròn $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ khi a là một số vô tỉ. Vấn đề đẳng phân phối được Yuri Linnik đặt ra từ những năm 50 của thế kỷ trước, ảnh hưởng nhiều đến công trình của Venkatesh ở thời kỳ đầu.

Cho Q là một đa thức thuần nhất bậc m gồm n biến với hệ số nguyên. Một vấn đề cổ điển của Lý thuyết số là tìm hiểu cách biểu thị số nguyên d bởi đa thức Q khi $|d| \to \infty$. Cụ thể hơn, xét tập điểm nguyên

$$V_{Q,d}(\mathbb{Z}) = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid Q(\bar{x}) = d\},$$

câu hỏi đặt ra là tập điểm này phân bố thế nào trong trong đa tạp $V_{Q,d}(\mathbb{R}) = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid Q(\bar{x}) = d\}$? Chính xác hơn nữa, nếu xét phân phối của hình chiếu $|d|^{-\frac{1}{m}}.V_{Q,d}(\mathbb{Z})$ trong $V_{Q,\pm1}(\mathbb{R})$, Linnik dự đoán rằng khi $|d| \to \infty$ tập $|d|^{-\frac{1}{m}}.V_{Q,d}(\mathbb{Z})$ trở nên đẳng phân phối đối với một độ đo tự nhiên $\mu_{Q,\pm1}$ trên $V_{Q,\pm1}(\mathbb{R})$. Dự đoán của Linnik nghĩa là, phải chăng với hai tập con compact đủ đẹp tùy ý $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq V_{Q,\pm1}(\mathbb{R})$ ta có:

$$\frac{||d|^{-1/m}.V_{Q,d}(\mathbb{Z}) \cap \Omega_1|}{||d|^{-1/m}.V_{Q,d}(\mathbb{Z}) \cap \Omega_2|} \to \frac{\mu_{Q,\pm1}(\Omega_1)}{\mu_{Q,\pm1}(\Omega_2)}$$

khi $|d| \to \infty$.

Yuri Linnik chứng minh một phần giả thuyết trên bằng cách sử dụng lý thuyết ergodic. Sau đó W. Duke cho lời giải trọn vẹn bằng cách dùng giải tích điều hòa và dạng modular (lược đồ chứng minh được cho trong [10, §2.1]). Sau khi W. Duke giải quyết triệt để vấn đề của Linnik, một cách tiếp cận khác thông qua tính dưới lồi của L-hàm tự đẳng cấu đã được P. Michel và A. Venkatesh đề xuất.

Trong [15] và [11], A. Venkatesh đã đưa ra một kỹ thuật tổng quát và thống nhất dựa trên lý thuyết biểu diễn, hệ động lực thuần nhất cho vấn đề dưới lồi của L-hàm và, với sự cộng tác với P. Michel, anh đã sử dụng những ý tưởng này để giải quyết tất cả các trường hợp của vấn đề dưới lồi cho $\mathrm{GL}(2)$ trên trường số. Cho π là một biểu diễn tự đẳng cấu cuspidal của $\mathrm{GL}_n(F)$ bậc d (với F là trường số[3]) và

$$L(\pi, s) = \prod_p L_p(\pi, s) = \prod_p \prod_{i=1}^{dn} \left(1 - \frac{\alpha_{\pi,i}(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

là một L-hàm liên kết. Khi đó L-hàm này có thể thác triển giải tích và thỏa mãn một phương trình hàm. Một vấn đề cơ bản của lý thuyết giải tích các L-hàm là tìm chặn trên của giá trị trung tâm $L(\pi, \frac{1}{2})$, hoặc tổng quát hơn cho $L(\pi, \frac{1}{2} + it)$. Chặn trên có liên quan với một tham số tự nhiên là conductor giải tích được cho bởi

$$C(\pi) = q_\pi \prod_{i=1}^{dn} (1 + |\mu_{n,i}|),$$

trong đó q_π là conductor số học. Nguyên lý lồi của Phragmén-Lindelöf suy ra một chặn trên, được gọi là *chặn lồi*, của giá trị trung tâm

$$L(\pi, \frac{1}{2}) <<_{dn} C(\pi)^{\frac{1}{4} - \delta}$$

với mọi δ **âm**. Ký hiệu $<<_{dn}$ nghĩa là tồn tại một hằng số $C(dn)$ chỉ phụ thuộc dn sao cho giá trị tuyệt đối của vế trái nhỏ hơn $C(dn)$ lần vế phải. Vấn đề dưới lồi dự đoán việc tồn tại chặn trên đối với một số δ **dương** nào đó. Lưu ý rằng giả thuyết Riemann suy rộng (generalized Riemann hypothesis) cho $L(\pi, s)$ kéo theo chặn này được thỏa mãn với bất kỳ $\delta < \frac{1}{4}$.

Vấn đề dưới lồi được khởi đầu từ ước lượng của Weyl

$$|\zeta(1/2 + it)| <<_\varepsilon t^{1/6+\varepsilon}$$

cho ζ-hàm Riemann và đã có nhiều nhà toán học tên tuổi quan tâm, thu được kết quả trong những trường hợp riêng, như W. Duke, J. Friedlander, và H. Iwaniec. Gần đây vấn đề dưới lồi thu hút được nhiều sự chú ý vì giá trị trung tâm $L(\pi, \frac{1}{2})$ liên quan nhiều đến các chu kỳ của dạng tự đẳng cấu, và chặn dưới lồi kéo theo sự suy giảm (decay) của chu kỳ tương ứng với các dạng tự đẳng cấu của các nhóm con. Như đã nói ở trên, ta có thể phát biểu vấn đề dưới lồi dưới dạng tính đẳng phân phối trên các đa tạp thuần nhất số học (liên quan chặt chẽ đến giả thuyết của Linnik). Thêm nữa, một số chặn dưới lồi thích hợp kéo theo nguyên lý Hasse về biểu diễn các số nguyên đủ lớn bởi các dạng toàn phương nguyên 3 biến, và kéo theo giả thuyết về tính ergodic lượng tử số học (arithmetic quantum ergodicity) của Rudznik-Sarnak. (Lời giải cho một trường hợp riêng của giả thuyết Rudznik-Sarnak đã góp phần giúp Elon Lindenstrauss nhận được Huy chương Fields năm 2010.) Vì thế bài toán dưới lồi được xem như một vấn đề trung tâm của lý thuyết số giải tích.

[3]Một trường số (đại số) là một mở rộng trường hữu hạn của $\mathbb{Q}$, ví dụ $\mathbb{Q}[x]/(x^2+5)$ là một trường số, còn $\mathbb{R}$ không phải là một trường số.

Trong các công trình [15] và [11], A. Venkatesh đã giải quyết thêm nhiều trường hợp quan trọng của vấn đề dưới lồi. Đặc biệt anh đưa ra lời giải triệt để cho các biểu diễn tự đẳng cấu cuspidal của $\mathrm{GL}_2(F)$ với F là một trường số bất kỳ, trong khi các kết quả trước đó chủ yếu hạn chế trong trường hợp trường $\mathbb{Q}$ và các mở rộng bậc thấp của $\mathbb{Q}$. Thêm nữa Venkatesh đã đưa ra các phương pháp mới, tổng quát, và mạnh từ lý thuyết về dạng tự đẳng cấu và biểu diễn tự đẳng cấu adele, cũng như từ lý thuyết ergodic. Những nghiên cứu này của Venkatesh được xem như một bước ngoặt về phương pháp tiếp cận vấn đề dưới lồi[(4)]. Đáng chú ý là tiền ấn phẩm của công trình lớn [15] được viết khi Venkatesh mới 24 tuổi.

2.2. **Nguyên lý địa phương-toàn cục trong việc biểu diễn dạng toàn phương.** Biểu diễn một số nguyên dương thành tổng của các số chính phương là một vấn đề cổ điển của số học. Một hướng mở rộng vấn đề này là lý thuyết về biểu diễn các dạng và dàn toàn phương. Một dàn toàn phương (quadratic lattice) là một bộ $(\mathbb{Z}^m, Q')$, với Q' là một dạng toàn phương xác định dương hệ số nguyên với m biến (khi đó ta gọi m là hạng của Q'). Ví dụ một dàn toàn phương hạng một có dạng $(\mathbb{Z}, ax^2)$, $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, và một dàn toàn phương hạng hai có dạng $(\mathbb{Z}^2, ax^2 + bxy + cy^2)$, $a, c \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}$ và $4ac - b^2 > 0$. Với mỗi dàn $(\mathbb{Z}^m, Q')$ và $x \in \mathbb{Z}^m$, ta gọi $Q'(x)$ là chuẩn của x.

Dàn toàn phương $(\mathbb{Z}^m, Q')$ được gọi là *biểu diễn được toàn cục* bởi một dàn toàn phương $(\mathbb{Z}^n, Q)$ nếu có một đơn ánh của các $\mathbb{Z}$-môđun $\phi : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ sao cho $Q'(x) = Q(\phi(x))$ với mọi $x \in \mathbb{Z}^m$ (một ánh xạ như thế gọi là một phép nhúng đẳng cự của các dàn toàn phương). Ví dụ dàn toàn phương $(\mathbb{Z}, 13x^2)$ biểu diễn được toàn cục bởi dàn toàn phương $(\mathbb{Z}^2, y^2 + z^2)$ thông qua ánh xạ $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2, x \mapsto (2x, 3x)$. Từ định lý Lagrange về bốn bình phương, mọi dàn toàn phương hạng 1 đều biểu diễn (toàn cục) được bởi dàn toàn phương $(\mathbb{Z}^4, y^2 + z^2 + t^2 + u^2)$.

Mở rộng các định nghĩa liên quan một cách tự nhiên, ta nói dàn toàn phương $(\mathbb{Z}^m, Q')$ biểu diễn được một cách địa phương tại số nguyên tố p bởi dàn $(\mathbb{Z}^n, Q)$ nếu tồn tại một phép nhúng đẳng cự $(\mathbb{Z}_p^m, Q' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p) \hookrightarrow (\mathbb{Z}_p^n, Q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$. Ta nói dàn toàn phương $(\mathbb{Z}^m, Q')$ biểu diễn được một cách địa phương khắp nơi bởi dàn $(\mathbb{Z}^n, Q)$ nếu nó được biểu diễn tại mọi p nguyên tố và $(\mathbb{R}^m, Q' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, Q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$.

Vấn đề biểu thị dạng toàn phương bởi một dạng toàn phương khác thông qua phép thế biến hệ số nguyên đã được đề cập trong bộ sách nổi tiếng "Disquitiones Arithmeticae" của Gauss, và bài toán số 11 của Hilbert.

Trong Lý thuyết số đại số, nguyên lý Hasse-Minkowski nổi tiếng (nguyên lý địa phương-toàn cục) khẳng định rằng nếu một dạng toàn phương hệ số hữu tỷ có nghiệm trong mọi trường p-adic $\mathbb{Q}_p$ và trong $\mathbb{R}$, thì nó sẽ có nghiệm hữu tỷ. Vấn đề địa phương-toàn cục trong biểu diễn dàn toàn phương tương tự với nguyên lý Hasse-Minkowski.

Đóng góp quan trọng thứ hai của Venkatesh là tiến bộ lớn về nguyên lý địa phương-toàn cục trong việc biểu diễn dạng toàn phương. Trong công trình viết chung với Jordan Ellenberg [7], Venkatesh chỉ ra với một dạng toàn phương Q trên $\mathbb{Z}^n$, tồn tại số $c = c(Q)$

[(4)]Xem thêm bài nói của Peter Sarnak tại Đại hội Toán học Quốc tế 2018 ở trang youtube https://www.youtube.com/watch?v=v9HX2Zwz0I0 sao cho $(\mathbb{Z}^n, Q)$ sẽ biểu diễn (toàn cục) một dạng $(\mathbb{Z}^m, Q')$ nếu nó biểu diễn địa phương khắp nơi $(\mathbb{Z}^m, Q')$, $n \geq m + 5$, và biệt thức của Q' không có ước chính phương và lớn hơn hay bằng $c(Q)$.

Các kết quả trước đây (Hsia-Kitaoka-Kneser, năm 1978) chỉ mới giải quyết trường hợp $n \geq 2m + 3$. Phương pháp chứng minh của Ellenberg-Venkatesh là đưa bài toán về lý thuyết dàn, hay lý thuyết hình học của số (geometry of numbers) được xây dựng từ thời Minkowski (khoảng 1899), sau đó chỉ ra một đa tạp cụ thể có điểm nguyên bằng lý thuyết ergodic, nói riêng sử dụng định lý ergodic của M. Ratner(5) cho các nhóm p-adic.

2.3. **Tính đẳng phân phối của các quỹ đạo xuyến tuần hoàn và các quỹ đạo đóng của một số nhóm nửa đơn.** Tiếp đến, trong công trình viết chung với Einsiedler, Lindenstrauss và Michel [6], Venkatesh đã chứng minh sự đẳng phân phối của các quỹ đạo xuyến tuần hoàn trong $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ gắn với các lớp iđêan của trường số bậc ba hoàn toàn thực (totally real), khi biệt thức dần tới vô cùng. Trong [3], W. Duke chứng minh rằng các điểm Heegner với biệt thức tăng dần và các đường trắc địa đóng với độ dài tăng dần là đẳng phân phối trên mặt modular. Nói theo ngôn ngữ đại số, phép chiếu các bộ nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = m$ (m thỏa mãn một số hạn chế theo modulo 8) và $y^2 - xz = m$ là đẳng phân phối khi $m \to \infty$. Trong [6], các tác giả đã mở rộng đáng kể các kết quả trên cho trường hợp không gian thuần nhất $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ và đưa ra lời giải triệt để khi $n = 3$. Cụ thể hơn, kết quả của Einsiedler-Lindenstrauss-Michel-Venkatesh nói rằng các lớp iđêan của mở rộng bậc ba hoàn toàn thực của $\mathbb{Q}$ là đẳng phân phối trên đa tạp modular 5 chiều $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_3$. Kết quả này suy ra một giả thuyết đã có từ lâu nói rằng họ các flat(6) compact cực đại trong $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_3$ với thể tích $\leq V$ là đẳng phân phối khi $V \to \infty$. Các chứng minh đều rất khó và dùng kỹ thuật từ nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học. Một lần nữa các kỹ thuật quan trọng được sử dụng bao gồm đánh giá dưới lồi, định lý phân loại độ đo trong lý thuyết ergodic của Einsiedler-Katok-Lindenstraus.

Trong các công trình viết chung với Einsiedler, Margulis, và Mohammadi [4, 5], Venkatesh đã thiết lập các kết quả định lượng về sự đẳng phân phối của các quỹ đạo đóng của nhiều nhóm nửa đơn trong cả trường hợp địa phương lẫn toàn cục. Hiểu nôm na các kết quả này cho thông tin cụ thể hơn so với các kết quả về tính đẳng phân phối của các quỹ đạo đóng trước đó của Mozes-Shah(7). Một ứng dụng quan trọng của công trình này là nó cho một chứng minh mới của tính chất τ(8) của các nhóm số học, một kết quả được thiết lập bởi A. Selberg, D. Kazhdan, Burger-Sarnak, và L. Clozel.

(5)M. Ratner, *Raghunathan's conjectures for Cartesian products of real and p-adic Lie groups*. Duke. Math. J. 77, 275–382 (1995).

(6)Một khái niệm của hình học Riemann: Một flat là một đa tạp con đầy đủ, hoàn toàn trắc địa với độ cong nhát cắt (sectional curvature) bằng 0.

(7)S. Mozes, N. Shah, *On the space of ergodic invariant measures of unipotent flows*. Ergodic Theory Dynam. Systems 15 (1995), no. 1, 149–159.

(8)Tính chất τ, một biến thể của tính chất T, do D. Kazhdan đưa ra năm 1967 khi nghiên cứu biểu diễn unitary của nhóm Lie nửa đơn. Người đầu tiên nhận thấy tầm quan trọng của tính chất τ là G. Margulis khi xây dựng đồ thị giãn nở (expander graph) năm 1973.

2.4. **Giả thuyết Cohen-Lenstra về nhóm lớp cho trường hàm.** Đặc biệt, trong [8], cùng với Ellenberg và Westerland, Venkatesh đã giải quyết nhiều trường hợp riêng quan trọng cho các giả thuyết của H. Cohen và H. W. Lenstra liên quan đến các nhóm lớp trong trường hợp trường hàm. Trước hết ta nói về một kết quả cổ điển của Davenport-Heilbronn. Với một số nguyên không âm X cho trước, ký hiệu

$$S_X := \{n \mid 0 \le n \le X, n \text{ không có ước chính phương}, n \equiv 1 \pmod 4\},$$

và

$$\mathcal{C}_X := \{\text{lớp đẳng cấu các mở rộng bậc ba } K/\mathbb{Q} \text{ với biệt thức } \operatorname{disc}(K/\mathbb{Q}) = S_X\}.$$

Khi đó Định lý cổ điển của Davenport-Heilbronn nói rằng tỉ lệ

$$\frac{\#\mathcal{C}_X}{\#S_X} \to \frac{1}{6} \text{ khi } X \to \infty.$$

Giả thuyết của Cohen-Lenstra đề cập đến những mở rộng bậc hai ảo (imaginary). Với mỗi số X, ta ký hiệu

$$\mathcal{Q}_X := \{\text{mở rộng bậc hai ảo của } \mathbb{Q} \text{ với } \operatorname{disc}(K) \in [-X, 0]\}.$$

Với L là một trường toàn cục, A là một l-nhóm abel hữu hạn (trong đó l là số nguyên tố), ký hiệu C_L là nhóm lớp của L, và $\operatorname{Epi}(C_L, A)$ là tập các toàn cấu $C_L \to A$. Cohen và Lenstra dự đoán:

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\sum_{L\in\mathcal{Q}_X} \#\operatorname{Epi}(C_L, A)}{\#\mathcal{Q}_X} = 1.$$

Từ đó suy ra với mọi l-nhóm B cho trước, tỉ lệ số những mở rộng L trong $\mathcal{Q}_X$ có phần l-xoắn của nhóm lớp $C_L[l^\infty]$ đẳng cấu với B tiệm cận số sau:

$$\frac{\prod_{i=1}^{\infty}(1 - l^{-i})}{\#\operatorname{Aut}(B)}.$$

Điều này cũng giải thích cho quan sát ban đầu của Cohen-Lenstra: *Các mở rộng bậc hai của $\mathbb{Q}$ với nhóm lớp bằng $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ xuất hiện thường xuyên hơn các mở rộng với nhóm lớp bằng $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.* Trong [8, Theorem 1.2], các tác giả đã chứng minh phiên bản cho trường hàm của hệ quả vừa nêu. Cụ thể

Định lý 2.1. *Cho $l > 2$ là một số nguyên tố và A là một l-nhóm abel hữu hạn. Ký hiệu δ^+ (tương ứng, δ^-) là mật độ trên (tương ứng, mật độ dưới) của các mở rộng bậc hai ảo của $\mathbb{F}_q(t)$, trong đó phần xoắn của nhóm lớp đẳng cấu với A. Khi đó $\delta^+(q)$ và $\delta^-(q)$ hội tụ tới $\dfrac{\prod_{i\ge1}(1 - l^{-i})}{\#\operatorname{Aut}(A)}$, khi $q \to \infty$ thỏa mãn $q \not\equiv 1 \pmod l$.*

Một điều bất ngờ là kết quả này được suy ra từ những nghiên cứu trong một lĩnh vực dường như không liên quan: tính ổn định đồng điều của các không gian Hurwitz, một đối tượng trong lý thuyết các không gian moduli.

2.5. **Các nghiên cứu gần đây.** Một liên hệ bất ngờ khác giữa các lĩnh vực khác nhau của toán học đã được Venkatesh tìm ra khi cộng tác với Bergeron và Calegari để đếm các lớp xoắn trong đối đồng điều của các đa tạp số học. Trong [1], các tác giả nghiên cứu độ tăng của nhóm con xoắn của đồng điều của nhóm số học, nói riêng, họ đưa ra một giả thuyết về độ tăng của nhóm xoắn trong tháp các nhóm con đồng dư ở tình huống sau: Cho G là một nhóm đại số nửa đơn trên $\mathbb{Q}$, $K \le G(\mathbb{R})$ là một nhóm con compact cực đại của nhóm các điểm thực của G. Ta ký hiệu $\delta(G) = r(G) - r(K)$ là độ thiếu hụt, trong đó $r(\cdot)$ là chiều của xuyến cực đại của nhóm tương ứng. Với $\Gamma \le G(\mathbb{Q})$ là một nhóm con đồng dư đối compact (theo nghĩa $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})/K$ là compact), xét một dãy các nhóm con đồng dư

$$\cdots \subseteq \Gamma_N \subseteq \Gamma_{N-1} \subseteq \cdots \subseteq \Gamma,$$

với giao $\bigcap_{N=1}^{\infty} \Gamma_N = \{1\}$. Nếu M là một Γ-môđun với cấu trúc của một $\mathbb{Z}$-môđun tự do, ta xét các nhóm đồng điều $\mathrm{H}_j(\Gamma_N; M)$. Bergeron và Venkatesh đưa ra giả thuyết nói rằng với mọi j, tồn tại giới hạn

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log|\mathrm{H}_j(\Gamma_N; M)_{tors}|}{[\Gamma : \Gamma_N]},$$

và giới hạn đó khác 0 nếu và chỉ nếu $\delta(G) = 1$ và $j = \dfrac{\dim(G/K) - 1}{2}$. Trong [1], các tác giả chứng minh giả thuyết trên cho trường hợp M là Γ-môđun "strongly acyclic". Lưu ý rằng độ tăng mũ của phần xoắn trong đối đồng điều của các nhóm số học đã được quan tâm nghiên cứu bởi nhiều chuyên gia về nhóm số học, chẳng hạn A. Ash. Trong công trình cộng tác với F. Calegari [2], Venkatesh đã nghiên cứu sâu hơn về vai trò của phần xoắn của đồng điều nhóm số học trong chương trình Langlands. Các công trình của Ash, Scholze, Caraiani-Scholze, Boxer,... cho thấy các lớp xoắn trong đối đồng điều của nhóm số học, của không gian đối xứng địa phương, của đa tạp Shimura, có liên hệ chặt chẽ với các biểu diễn Galois.

Gần đây hơn,

(1) A. Venkatesh đã đưa ra giả thuyết về liên hệ đối đồng điều của nhóm số học, đối đồng điều motivic và chu kỳ của dạng tự đẳng cấu (xem [13]). Venkatesh và các cộng sự như K. Prasanna đã chứng minh một số kết quả theo hướng khẳng định các giả thuyết này.

(2) Trong [12], các tác giả đã thu được một công thức tiệm cận cho chu kỳ của Gan-Gross-Prasad đối với hạng bất kỳ. Lại một lần nữa, trong số rất nhiều kỹ thuật khó mà A. Venkatesh sử dụng, có định lý về phân loại độ đo của Ratner(9). Nhiều kết quả khác cho giả thuyết Gan-Gross-Prasad cũng đã được đưa ra trong [14].

(3) Trong [9], các tác giả đã cho một chứng minh khác cho giả thuyết Mordell: *Mọi đường cong trơn giống ≥ 2 trên trường số chỉ có hữu hạn điểm hữu tỷ*. Phương pháp của [9] cùng một số kết quả quan trọng khác cho phép đi xa hơn khẳng định trên trong trường hợp chiều cao hơn. Cụ thể, khi chiều và bậc đủ lớn, tập các siêu mặt trong không gian xạ ảnh, với điều kiện thu gọn tốt (good reduction), ngoài một tập hữu hạn các chốn, nằm trong một tập đóng Zariski thực sự của không gian moduli các siêu mặt. Các kết quả này đang là mối quan tâm đáng kể của nhiều chuyên gia. Chẳng hạn, tiền ấn phẩm [9] là chủ đề seminar của nhóm nghiên cứu H. Esnault ở Đại học Tự do Berlin, của nhóm nghiên cứu U. Goertz ở Đại học Duisburg-Essen vào kỳ mùa đông năm học 2018-2019, là chủ đề của một hội nghị vào đầu tháng 7/2019 do những chuyên gia về xấp xỉ Diophantine như G. Wustholz, R. Pink, P. Habegger,..., tổ chức.(10)

Thay cho lời kết, chúng tôi dẫn lại đánh giá của Liên đoàn Toán học Quốc tế về Venkatesh(11): *"Hầu hết các nhà toán học chỉ hoặc là người giải quyết các vấn đề hoặc là người xây dựng lý thuyết. Akshay Venkatesh có cả hai tố chất quý báu đó. Anh là nhà số học với một hiểu biết sâu sắc phi thường về nhiều lĩnh vực ở rất xa lý thuyết số. Khối kiến thức uyên bác này giúp anh đặt các vấn đề của lý thuyết số*

(9)M. Ratner, *On Raghunathan's measure conjecture.* Ann. of Math. (2) 134 (1991), no. 3, 545–607.

(10)Xem trang web: http://fuchsc.sbg.ac.at/AG/Alpbach2019.html

(11)https://www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Prizes/Fields/2018/venkatesh-final.pdf *vào những ngữ cảnh mới, giúp cung cấp bối cảnh đúng đắn để làm nổi bật bản chất của các vấn đề đó".*

Chú thích của tác giả. Để viết bài này, ngoài bài báo của A. Venkatesh và các cộng sự, tác giả có sử dụng tư liệu từ Mathematical Reviews, phần trích dẫn của Liên đoàn Toán học thế giới. Tác giả xin chân thành cảm ơn GS. Nguyễn Quốc Thắng đã động viên tác giả viết bài này và góp ý để bài viết được hoàn thiện hơn. Ngoài ra tác giả cũng cảm ơn Ban biên tập của Thông tin Toán học đã có những sửa đổi hợp lý về mặt trình bày.

TÀI LIỆU

[1] N. Bergeron, A. Venkatesh, *The asymptotic growth of torsion homology for arithmetic groups.* J. Inst. Math. Jussieu 12 (2013), no. 2, 391–447.

[2] F. Calegari, A. Venkatesh, *A torsion Jacquet–Langlands correspondence*, Arxiv 2012. 250 trang.

[3] W. Duke, *Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms.* Invent. Math. 92 (1988), no. 1, 73–90.

[4] M. Einsiedler, G. Margulis, A. Venkatesh, *Effective equidistribution for closed orbits of semisimple groups on homogeneous spaces.* Invent. Math. 177 (2009), no. 1, 137–212.

[5] M. Einsiedler, G. Margulis, A. Mohammadi, A. Venkatesh, *Effective equidistribution and property tau*, Arxiv 2015.

[6] M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, P. Michel, A. Venkatesh, *Distribution of periodic torus orbits and Duke's theorem for cubic fields.* Ann. of Math. (2) 173 (2011), no. 2, 815–885.

[7] J. Ellenberg, A. Venkatesh, *Local-global principles for representations of quadratic forms.* Invent. Math. 171 (2008), no. 2, 257–279.

[8] J. Ellenberg, A. Venkatesh, C. Westerland, *Homological stability for Hurwitz spaces and the Cohen-Lenstra conjecture over function fields.* Ann. of Math. (2) 183 (2016), no. 3, 729–786.

[9] B. Lawrence, A. Venkatesh, *Diophantine problems and p-adic period mappings*. ArXiv:1807.02721.

[10] P. Michel, A. Venkatesh, *Equidistribution, L-functions and ergodic theory: on some problems of Yu. Linnik*. In: International Congress of Mathematicians. Vol. II. Eur. Math. Soc., Zürich 2006, pp. 421–457.

[11] P. Michel, A. Venkatesh, *The subconvexity problem for GL(2)*. Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. No. 111 (2010), 171–271.

[12] P. Nelson, A. Venkatesh, *The orbit method and analysis of automorphic forms*. ArXiv:1805.07750. 132 trang.

[13] K. Prasanna, A. Venkatesh, *Automorphic cohomology, motivic cohomology, and the adjoint L-function*, Arxiv 2016.

[14] Y. Sakellaridis, A. Venkatesh, *Periods and harmonic analysis on spherical varieties.* Asterisque No. 396 (2017), viii+360 pp.

[15] A. Venkatesh, *Sparse equidistribution problems, period bounds and subconvexity.* Ann. of Math. (2) 172 (2010), no. 2, 989–1094.

Tiểu sử Paul Erdös (1913-1996)(1)

Tạ Ngọc Ánh(2)

Paul Erdös sinh ngày 26 tháng 3 năm 1913 tại Budapest, Hungary, mất ngày 20 tháng 09 năm 1996 tại Warsaw, Ba Lan. Với 1525 bài báo và 511 đồng tác giả, số công trình đã xuất bản và số cộng sự của Erdös nhiều hơn bất kỳ nhà toán học nào

(1)Dựa trên bài viết của J.J. O'Connor và E.F. Robertson, *Paul Erdös*, MacTutor History of Mathematics, (University of St Andrews, Scotland, January 2000), http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Erdos.html

(2)Học viện Kỹ thuật Quân sự.

khác trong lịch sử. Ông làm việc trong các lĩnh vực: Tổ hợp, Lý thuyết đồ thị, Lý thuyết số, Giải tích cổ điển, Lý thuyết xấp xỉ, Lý thuyết tập hợp, và Lý thuyết xác suất. Ông có lối sống giản dị tới mức "lập dị", dành trọn tình yêu cho toán học và sự nghiệp phát triển toán học trên thế giới.

1. Tuổi thơ và những năm học phổ thông

Paul Erdös sinh ngày 26 tháng 3 năm 1913 tại Budapest, Hungary, trong một gia đình Do Thái, mất ngày 20 tháng 9 năm 1996 tại Warsaw, Ba Lan. Trước khi sinh ra ông, cha mẹ ông (Lajos và Anna) đã có hai con gái 3 tuổi và 5 tuổi. Tuy nhiên, chỉ vài ngày trước khi Erdös ra đời, cả hai chị của ông không may qua đời vì bệnh sốt phát ban. Biến cố đó đã khiến cha mẹ Erdös chăm sóc và bảo vệ ông rất cẩn thận. Trong thời gian Chiến tranh Thế giới thứ nhất, bố ông bị quân đội Nga bắt và đày đi Siberia. Mẹ Anna bận dạy học cả ngày nên đã thuê một cô giáo người Đức trông coi Erdös. Quá sốt sắng muốn bảo vệ con, thay vì cho con đến trường, cô Anna thuê gia sư giảng dạy riêng cho con trai mình.

Lajos và Anna là giáo viên dạy toán. Vì thế, họ đã dẫn dắt cậu bé Paul Erdös đến với toán học. Niềm đam mê của cậu với toán học phát triển từ rất sớm. Mới bốn tuổi, Paul đã có thể tính số giây một người đã sống dựa trên số tuổi của họ. Năm 16 tuổi, Paul được cha giới thiệu về chủ đề mà cậu sẽ luôn yêu thích là chuỗi vô hạn và lý thuyết tập hợp. Suốt những năm học phổ thông, Paul cũng là người hăng hái giải các bài toán được đăng trong tạp chí KöMaL (Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok), một tạp chí toán lý được thành lập năm 1895, xuất bản hàng tháng dành cho các trường trung học. Những lời giải của Erdös được đăng trên tạp chí này về một góc độ nào đó có thể coi như là những công bố toán học đầu tiên của anh. Trong một dịp, chỉ có Erdös và Paul Turan (cùng tên riêng với Erdös), người anh chưa từng gặp, giải được một bài toán trên tạp chí và lời giải của họ được đăng trên tạp chí KöMaL với tên chung. Về sau, Paul Turan trở thành người bạn thân thiết và là cộng sự quan trọng của Erdös.

2. Sự nghiệp

Vào những năm 1920, tình hình chính trị ở Hungary khá phức tạp và bất lợi cho người Do Thái. Miklós Horthy, một người theo chủ nghĩa dân tộc cánh hữu, lên nắm quyền điều hành đất nước và ban hành đạo luật bài Do Thái, tương tự như việc sau này Hitler đã tiến hành vào những năm 1930. Cuối những năm 1920, người Do Thái ở Hungary bị cản trở trong việc học tập ở bậc đại học. Tuy nhiên, năm 1930, Paul Erdös đã được vào học đại học với tư cách người giành chiến thắng trong một kỳ thi học sinh giỏi quốc gia. Anh nghiên cứu và lấy bằng tiến sĩ tại Đại học Pázmány Péter ở Budapest. Năm 1934 anh nhận bằng tiến sĩ khi mới 21 tuổi. Sau đó anh xin học bổng sau tiến sĩ tại Manchester, Anh; thực chất anh bị buộc phải rời khỏi Hungary vì là người Do Thái. Trong thời gian đó, Erdös đã đi khắp nước Anh và gặp nhiều nhà toán học sau này trở thành những cộng sự và những người bạn thân thiết, chẳng hạn như Ulam và Hardy. Trong khoảng thời gian nhận học bổng ở Manchester, bất chấp những nguy hiểm với người Do Thái do tình hình chính trị ở Hungary, Erdös vẫn thường xuyên về thăm Budapest. Sau khi kết thúc học bổng tại Anh, anh sang Mỹ làm việc tại nhiều trường đại học khác nhau. Quãng thời gian ở Manchester có lẽ là quãng thời gian dài nhất anh lưu lại một nơi, vì sau này anh liên tục di chuyển giữa các trung tâm toán học và không gắn bó lâu dài với một cơ quan, địa điểm nào.

Paul Erdös có những đóng góp đa dạng cho toán học trên nhiều lĩnh vực khác nhau. Ông là một trong những nhà toán học có nhiều công trình nhất từ trước tới nay. Ông đã viết ít nhất 1525 bài báo ở nhiều các lĩnh vực khác nhau như: Lý thuyết số, Lý thuyết đồ thị, Hình học, Lý thuyết tập hợp, Lý thuyết tổ hợp,... Ông cũng có đến 511 cộng tác viên. Tuy nhiên, về cơ bản Erdös là một người chuyên giải quyết các bài toán chứ không phải người xây dựng lý thuyết. Các vấn đề thu hút ông nhất là các vấn đề trong Tổ hợp, Lý thuyết đồ thị và Lý thuyết số. Cần phải nói thêm rằng không chỉ giới hạn trong việc giải quyết các bài toán, Erdös còn muốn những lời giải đưa ra phải tinh tế và sơ cấp. Đối với ông, các chứng minh phải cho một cái nhìn sâu sắc và lý giải tại sao kết quả đó là đúng chứ không phải chỉ cung cấp một chuỗi các bước biến đổi phức tạp không đem lại nhận thức nào.

Một số kết quả gần gũi nhất với Paul Erdös đã được chứng minh trước khi ông sinh ra. Năm 1845 Bertrand phỏng đoán rằng luôn luôn có ít nhất một số nguyên tố giữa n và $2n$ với mọi số nguyên dương $n > 1$. Chebyshev đã chứng minh giả thuyết của Bertrand năm 1850. Tuy nhiên, khi mới chỉ là một sinh viên mười tám tuổi, Erdös đã tìm ra một chứng minh trong sáng và sơ cấp của kết quả này. Một kết quả khác về số nguyên tố liên quan tới Erdös là Định lý số nguyên tố, phát biểu như sau: Số lượng số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng n và $n/\ln n$ tiến tới vô cùng với tốc độ như nhau. Nói cách khác,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{(n/\ln n)} = 1,$$

trong đó $\pi(n)$ là số lượng số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng n. Định lý này là một giả thuyết trong thế kỷ 18, Chebyshev đã cố gắng và đạt đến khá gần với chứng minh. Tuy nhiên, vấn đề này vẫn là một thách thức cho đến tận năm 1896, khi Hadamard và de la Vallée Poussin độc lập với nhau đưa ra chứng minh bằng giải tích phức. Năm 1949, Paul Erdös và Atle Selberg tìm ra một chứng minh sơ cấp cho Định lý số nguyên tố.

Đây là một câu chuyện khác về Paul Erdös, theo tường thuật của tờ The Times, London, số ngày 25 tháng 9 năm 1996. *Selberg và Erdös đã đồng ý công bố các công trình của họ trong các bài báo liên tiếp trong cùng một tạp chí, giải thích từng công trình đã thực hiện và cùng chia sẻ lợi ích. Nhưng ở phút cuối cùng, Selberg chạy đua vượt lên và công bố các kết quả trước. Năm sau Selberg giành Huy chương Fields cho công trình này. Erdös không quan tâm nhiều đến khía cạnh cạnh tranh trong nghiên cứu toán học, ông chỉ nhắc lại chuyện đó với thái độ bình thản.*

Chứng minh sơ cấp cho định lý số nguyên tố là một kết quả điển hình cho phong cách toán học của Erdös. Ông đặt ra và giải quyết những vấn đề đẹp đẽ, dễ hiểu, nhưng rất hóc búa. Về góc độ hợp tác nghiên cứu, Erdös và Selberg là hai cực đối lập. Phần lớn các công trình của Erdös được công bố chung với các cộng sự, trong khi đó Selberg rất ít khi công bố chung.

Paul Erdös được biết đến như một nhà toán học kiệt xuất với trái tim nhân hậu. Ông dành trọn tình yêu cho toán học và ông là người có ảnh hưởng lớn tới sự phát triển của nhiều nhà toán học trên thế giới. Ông có lối sống giản dị một cách lạ thường, phần lớn tiền bạc kiếm được ông đều dành cho công tác từ thiện, giúp đỡ sinh viên và thưởng cho những ai giải quyết được các bài toán do ông đặt ra.

3. Gia đình và cuộc sống

Giống như phần lớn những người Do Thái trong Chiến tranh Thế giới thứ hai, gia đình Erdös cũng chịu nhiều đau thương. Từ năm 1944, phong trào bài Do Thái ở Hungary lên đến mức cao độ với nhiều người bị sát hại, bị trục xuất đến trại tập trung Auschwitz của Đức Quốc xã ở Ba Lan. Trong khoảng thời gian này, ông làm việc tại Mỹ, mặc dù rất lo lắng về gia đình nhưng ông gần như không nhận được bất cứ thông tin gì từ Hungary. Tháng 8 năm 1945, khi Budapest đã được giải phóng, Erdös nhận được một bức điện cho biết thông tin chi tiết về gia đình ông. Cha ông đã qua đời vì một cơn đau tim vào năm 1942. Mẹ ông đã may mắn sống sót, người anh em họ của ông là Magda Fredro đã bị trục xuất đến Auschwitz nhưng sống sót. Tuy nhiên, bốn cô dì chú bác của Erdös đã bị sát hại.

Gần cuối năm 1948 Erdös trở lại thăm Hungary và được đoàn tụ với gia đình, bạn bè còn sống sót sau chiến tranh. Trong ba năm sau đó ông đi lại thường xuyên giữa Anh và Mỹ trước khi chấp nhận một vị trí làm việc tạm thời tại Đại học Notre Dame vào năm 1952. Sự tự do đi lại đã tạo điều kiện và động lực để Erdös nhanh chóng tiến hành các hợp tác nghiên cứu. Bản thân Erdös cũng không muốn chấp nhận lời đề nghị làm việc lâu dài mặc dù Đại học Notre Dame và bạn bè đã cố gắng hết sức trong việc thuyết phục ông.

Cuộc sống riêng của ông cũng gặp nhiều trắc trở. Một sự việc xảy ra vào tháng 8 năm 1941 đã gây ra nhiều rắc rối cho ông sau này. Ông và hai nhà toán học đồng nghiệp đã bị cảnh sát bắt khi đang ở gần một máy phát vô tuyến quân sự ở Long Island. Đó chỉ là một sự việc tình cờ xảy ra khi ba nhà toán học này đã mải mê thảo luận toán học đến mức không để ý đến biển báo “Khu vực cấm”. Sau một phiên làm việc thân thiện, cảnh sát nhận ra rằng các nhà toán học này không có ý định gì mờ ám. Sẽ chẳng có gì đáng nói nếu mọi việc sau đó diễn ra bình thường. Tuy nhiên, sự kiện này lại làm cho Erdös bị FBI lập hồ sơ theo dõi, sau này hồ sơ đó được sử dụng để gây khó khăn cho ông.

Đầu những năm 1950, thượng nghị sĩ của Đảng Cộng hòa là Joseph R. McCarthy đã thúc đẩy mạnh mẽ tư tưởng chống chủ nghĩa cộng sản tại Mỹ. Erdös bắt đầu bị cục quản lý xuất nhập cảnh nghi ngờ. Khi ông quay trở lại Mỹ, sau một hội nghị tại Amsterdam vào năm 1954, cục quản lý xuất nhập cảnh Mỹ hỏi ông rằng ông nghĩ gì về Marx (Các Mác). Erdös đã trả lời rất thiếu suy tính: “*Tôi không có thẩm quyền để phán xét, nhưng tôi chắc ông ấy là một người vĩ đại*”. Tiếp đó họ hỏi rằng liệu ông có bao giờ trở về Hungary nữa không (nhớ rằng khi đó Hungary đang nghiêng về khối xã hội chủ nghĩa do Liên Xô đứng đầu). Erdös nói: “*Tôi không có kế hoạch về Hungary ngay bây giờ bởi vì tôi không biết liệu khi về họ có cho tôi quay trở lại Mỹ không. Tôi đang lập kế hoạch để đi Anh và Hà Lan*”. Câu hỏi tiếp theo là như vậy, phải chăng chỉ vì nỗi sợ không được rời Hungary mà Erdös không muốn đến đó. Erdös ngây thơ trả lời: “*Tất nhiên, tôi còn có mẹ và rất nhiều bạn bè ở đó*”. Sau việc này, Erdös không được phép quay trở lại Mỹ nhưng ông cũng không được biết lý do. Về sau này người ta mới biết việc ông không được quay lại Mỹ không phải do các câu trả lời trên, mà do bộ hồ sơ FBI về ông năm 1941 và việc ông trao đổi thư từ với một nhà toán học người Trung Quốc đã rời Mỹ về nước.

Mười năm tiếp theo, ông chủ yếu làm việc ở Israel. Trong đầu thập niên 1960, sau rất nhiều lần đề nghị, cuối cùng ông cũng được phép quay lại Mỹ vào tháng 11 năm 1963. Tuy nhiên, trong thời gian trở lại Mỹ này, Erdös như một khách du lịch đi từ trường đại học này đến trường đại học khác, và từ gia đình nhà toán học này đến gia đình nhà toán học khác. Ông cũng có một nơi làm việc cùng với một người bạn của ông là Ronald Graham. Erdös và Graham đã gặp nhau tại một hội nghị lý thuyết số vào năm 1963 và nhanh chóng trở thành cộng sự. Graham đã dành riêng một phòng trong nhà mình làm nơi ở và làm việc cho Erdös. Graham cũng lưu giữ các bài báo của Erdös ở đó, và theo nhiều cách, ông làm việc như một thư ký của Erdös.

Erdös yêu thích sự tự do và dành hoàn toàn sự tập trung cho niềm đam mê toán học. Ông tham dự hết hội thảo này đến hội thảo khác, hành lý cá nhân chỉ là chiếc va li. Ông không có vợ con và cũng chẳng sở hữu tài sản vật chất gì đáng kể. Cuộc sống của ông nương nhờ nhiều vào lòng tốt của các đồng nghiệp. Khi tham dự các hội nghị, ông thường ở cùng các nhà toán học nơi mình đến. Những đồng nghiệp đó chăm sóc, nuôi dưỡng, mua quần áo, cho ông vay tiền, thậm chí cả đóng thuế cho ông. Đổi lại ông cho họ đầy rẫy những ý tưởng và những thách thức toán học, những vấn đề mở và các con đường thông minh để giải quyết chúng.

Paul Erdös cùng vợ chồng Ronald Graham - Fan Chung
tại Nhật Bản năm 1986 (Ảnh: Che Graham).

4. Giải thưởng

Ông nhận được giải thưởng Cole của Hội Toán học Mỹ năm 1951. Giải thưởng được trao do những đóng góp của ông trong lý thuyết số, và đặc biệt cho bài báo "*Về một phương pháp mới trong lý thuyết số sơ cấp, dẫn đến một chứng minh sơ cấp của Định lý số nguyên tố*".

Giải thưởng Wolf năm 1983 được trao cho Erdös vì những đóng góp đa dạng của ông cho lý thuyết số, tổ hợp, xác suất, lý thuyết tập hợp, giải tích toán học, đồng thời cho những đóng góp của ông trong việc kích thích sự phát triển của các nhà toán học trên toàn thế giới.

Năm 1973 Hội Toán học London đã trao cho ông giải thưởng Thành viên xuất sắc. Ông còn được vinh danh, tặng nhiều giải thưởng và là diễn giả chính tại nhiều đại hội toán học, hội nghị, hội thảo. Ông là chủ tịch danh dự của Hội János Bolyai, thành viên của Viện hàn lâm quốc gia Mỹ, Hiệp hội Hoàng gia London, Viện hàn lâm Nghệ thuật và Khoa học Mỹ, Viện Khoa học Úc, Viện Khoa học Hoàng gia Hà Lan, Viện Khoa học Hungary và Viện Khoa học Ấn Độ. Liên đoàn thế giới các cuộc thi Toán quốc gia (The World Federation of National Mathematics Competitions) đã thành lập giải thưởng quốc tế David Hilbert vào năm 1991 và giải thưởng quốc tế Paul Erdös năm 1992. Cả hai giải thưởng công nhận đóng góp của các nhà toán học, những người đã đóng một vai trò quan trọng trong sự phát triển của các vấn đề toán học.

5. Erdös qua lời của các đồng nghiệp

Khi Paul Erdös mất đi vào ngày 24 tháng 9 năm 1996, tờ The New York Times đã có bài đăng tải nhận định của các nhà toán học về ông. Theo đó, khó có thể có được một cá nhân khác như Paul Erdös. Ông là một trong những nhà toán học vĩ đại nhất của thế kỷ 20, người đặt ra và giải quyết các vấn đề gai góc trong lý thuyết số và các lĩnh vực khác, và đã đặt nền tảng cho toán học rời rạc, ngành có ứng dụng quan trọng trong khoa học máy tính. Ông cũng là một trong những nhà toán học giàu sức sáng tạo nhất trong lịch sử, với hơn 1500 bài báo. Sự nghiệp trứ tác của ông có thể so sánh được với sự nghiệp của Euler. Ông công bố nhiều bài báo hơn Euler nhưng viết ít trang hơn.

Năm 1976, Ulam đã mô tả Erdös như sau: "*Ông là một thần đồng thực sự, mới mười tám tuổi ông đã công bố kết quả đầu tay trong lý thuyết số và trong giải tích tổ hợp. Là người Do Thái, ông đã phải rời Hungary, và tình cờ chính chuyến đi đó đã cứu sống ông. Đó là năm 1941, Erdös 27 tuổi, nhớ nhà, buồn bã, và luôn lo nghĩ về người mẹ vẫn còn kẹt lại ở Hungary... Erdös có vóc người hơi thấp, tính tình bất an và dễ bị kích thích... Đôi mắt tiết lộ rằng ông luôn luôn suy nghĩ về toán học, một quá trình suy nghĩ chỉ bị gián đoạn bởi những tuyên bố khá bi quan về tình hình thế giới, chính trị, hoặc những vấn đề xã hội nói chung, mà ông luôn nhìn thấy khía cạnh u tối... Ông có nhiều điểm khác người đến mức không thể liệt kê hết... Đang ở tuổi sáu mươi, ông đã viết hơn 700 bài báo*."

Fan Chung, vợ của Ronald Graham, và là người cũng có 14 bài báo chung với Erdös, nói về tinh thần làm việc của ông như sau: "*Làm việc với Paul Erdös giống như đi dạo trên những ngọn đồi. Mỗi khi tôi nghĩ rằng chúng tôi đã đến nơi và có thể dừng lại nghỉ ngơi, Paul lại trỏ lên một đỉnh đồi khác và thế là chuyến đi lại tiếp tục*."

Để ghi nhớ và tôn vinh những đóng góp của Erdös đối với cộng đồng toán học, người ta đã đưa ra *số Erdös* để đo "khoảng cách hợp tác" giữa một nhà toán học và ông. Cụ thể, Paul Erdös có số Erdös bằng 0, những cộng sự trực tiếp của ông (bao gồm 511 người) có số Erdös bằng 1, những người cộng tác với những cộng sự trực tiếp đó sẽ có số Erdös bằng 2, và cứ tiếp tục như thế. Danh sách một số nhà toán học người Việt có số Erdös thấp gồm có: Vũ Hà Văn (2); Ngô Bảo Châu, Phan Thị Hà Dương, Hà Huy Khoái, Ngô Việt Trung (3), vân vân.

Paul Erdös trút hơi thở cuối cùng sau một cơn đau tim vào ngày 20 tháng 9 năm 1996, khi ông đang tham dự một hội nghị ở Trung tâm Banach tại Warsaw, Ba Lan, hưởng thọ 83 tuổi. Ông là nhà toán học kiệt xuất, luôn hết mình theo đuổi đam mê toán học, mặc dù dưới con mắt ông cuộc đời bị bủa vây bởi những vấn đề không mấy tích cực. Như một người hành hương khắp các trung tâm toán học thế giới, ông luôn mang bên mình những ý tưởng và những vấn đề muốn chia sẻ cùng với mọi người. Đã hơn 20 năm trôi qua kể từ ngày Erdös đi xa, nhưng những công trình của ông và nguồn cảm hứng mà chúng để lại có lẽ sẽ còn trường tồn.

Tài liệu

[1] N. Alon, J.H. Spencer, *The Probabilistic Method*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ (2008).

[2] B. Bollobás, *Paul Erdös - Life and Work*, trong: *The mathematics of Paul Erdős, I*, trang 1–41, Algorithms Combin., **13**, Springer, Berlin (1997).

[3] J.J. O'Connor, E.F. Robertson, *Paul Erdös*, MacTutor History of Mathematics, (University of St Andrews, Scotland, January 2000), http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Erdos.html

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Erdos

[5] http://www.nytimes.com/1996/09/24/us/paul-erdos-83-a-wayfarer-in-math-s-vanguard-is-dead.html

[6] http://www.nytimes.com/books/98/09/27/reviews/980927.27alexant.html

[7] https://wwwp.oakland.edu/enp/

Dành cho các bạn trẻ

Hai phiên bản rời rạc của Định lý giá trị trung gian

Nguyễn Duy Thái Sơn(1)

Theo sách giáo khoa hiện hành ở nước ta, học sinh THPT được thừa nhận (không chứng minh) Định lý giá trị trung gian cho các hàm số liên tục. Định lý này nói rằng nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục, nhận các giá trị m, M ($m, M \in \mathbb{R}$; $m < M$) thì f nhận mọi số thực t nằm giữa m và M ($m < t < M$) làm một trong các giá trị của mình. (Định lý này là hệ quả của một mệnh đề mạnh và trừu tượng hơn, được giảng dạy ở bậc đại học: Ánh xạ liên tục thì biến tập liên thông thành tập liên thông.)

Trong bài này, ta tìm hiểu hai kết quả *tương tự* như định lý giá trị trung gian cho các hàm số f chỉ nhận giá trị nguyên, trong hai trường hợp:

1/ f là hàm của biến số nguyên (trường hợp dãy số nguyên)

2/ f là hàm của biến số thực.

Bạn đọc có thể tìm thấy nhiều phiên bản rời rạc khác nhau của định lý giá trị trung gian cho hàm số liên tục và các ứng dụng của chúng, chẳng hạn, trong [1, 2, 3].

1. Phiên bản thứ nhất

Với mọi $a, b \in \mathbb{Z}$ mà $a \leq b$, ta dùng ký hiệu $I_{a,b} := [a, b] \cap \mathbb{Z}$. Trong phiên bản này ta xét các hàm số $f : I_{a,b} \to \mathbb{Z}$.

(1)Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng.

Định nghĩa 1.1. Hàm f được gọi là $\mathbb{Z}-$liên tục trên $I_{a,b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$; $a < b$) nếu với mọi $n \in I_{a,b} \setminus \{a\}$,

$$|f(n) - f(n-1)| \leq 1.$$

Mệnh đề dưới đây nói rằng các hàm số $\mathbb{Z}-$liên tục thì thỏa mãn định lý giá trị trung gian.

Mệnh đề 1.2. *Cho $a, b \in \mathbb{Z}$; $a \leq b$, và cho hàm số $f : I_{a,b} \to \mathbb{Z}$. Đặt*

$$m := \min_{I_{a,b}} f, M := \max_{I_{a,b}} f.$$

Khi đó, nếu f là một hàm số $\mathbb{Z}-$liên tục trên $I_{a,b}$ thì

$$f(I_{a,b}) = I_{m,M};$$

tức là, hàm f nhận mọi số nguyên t nằm giữa m và M làm một trong các giá trị của mình.

Chứng minh. Giả sử $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$ với $\alpha, \beta \in I_{a,b}$ nào đó; và cho $t \in \mathbb{Z}$, mà $m < t < M$. Giả sử phản chứng rằng

(1) Không tồn tại $n \in I_{a,b}$ để $f(n) = t$.

Nếu cần, thay f bởi hàm g được cho bởi công thức

$$g(n) := f(a + b - n) \quad \forall n \in I_{a,b}$$

(mà không làm thay đổi tính $\mathbb{Z}-$liên tục và tập giá trị của hàm số), ta có thể xem rằng $\alpha < \beta$. Lúc này, xét tập hợp

(2)

$$A := \{n \in I_{\alpha,\beta} \mid f(n) > t\} \subset I_{\alpha,\beta} \subset I_{a,b}.$$

Ta thấy $f(\beta) = M > t \overset{(2)}{\Rightarrow} \beta \in A$. Tập A hữu hạn và không rỗng nên chứa phần tử $k := \min A$. Ta có

$$k \in I_{\alpha,\beta}, f(k) > t > m = f(\alpha) \Rightarrow k \neq \alpha.$$

Suy ra $k - 1 \in I_{\alpha,\beta}$; và do f chỉ nhận giá trị nguyên, từ tính $\mathbb{Z}-$liên tục của nó ta cũng thấy

$$f(k-1) \geq f(k) - 1 > t - 1.$$

Từ (1) suy ra $f(k-1) > t$, do đó $k-1 \in A$. Điều này mâu thuẫn với tính bé nhất của k. Mệnh đề đã được chứng minh. □

Nhận xét 1.3. Phép chứng minh (của Phiên bản thứ nhất) nói trên đã dùng các kỹ thuật *thuần túy đại số, chỉ dựa trên giải tích về ý tưởng*: tiến trình thực hiện là khá giống tiến trình chứng minh định lý giá trị trung gian cho các hàm số liên tục, nhưng trong suốt tiến trình đó ta không dùng một kết quả giải tích nào.

Lời giải 2 của Bài toán P55 trên Tạp chí Pi Tập 1 số 8 [4] đã đi theo tiến trình đó. Dưới đây là một tình huống tương tự:

Bài toán 1.4. *Cho $a_n := 28 + 7[\ln n] + [n^{2018/2019}]$ với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, và cho $d \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện $\dfrac{n}{a_n} = d$.*

Lời giải. Đặt $b_n := n - da_n$ với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta thu được một dãy $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ các số nguyên. Giả sử phản chứng rằng kết luận của bài toán là sai. Khi đó,

(1) Không tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ để $b_n = 0$.

Dễ thấy $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$, nên

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{n} = 1 > 0.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Vì thế,

$$A := \{n \in \mathbb{N}^* \mid b_n > 0\}$$

là một tập con không rỗng của $\mathbb{N}^*$. Do $\mathbb{N}^*$ được sắp thứ tự tốt, tồn tại $k := \min A$.

Ta có $k \in \mathbb{N}^*$, $b_k > 0$. Nhưng

$$b_1 = 1 - da_1 = 1 - 29d < 0,$$

nên $k \geq 2$.

Để ý thêm rằng dãy số $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ đơn điệu không giảm, ta suy ra

$$b_k - b_{k-1} = 1 - d(a_k - a_{k-1}) \leq 1.$$

Do đó

$$b_{k-1} \geq b_k - 1 > -1.$$

Vậy $b_{k-1} \geq 0$, và do (1), $b_{k-1} > 0$, tức là $k-1 \in A$. Điều này mâu thuẫn với tính bé nhất của k. Từ đó, ta có điều phải chứng minh. $\square$

2. Phiên bản thứ hai

Trong phiên bản này ta xét các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

Định nghĩa 2.1. Hàm f được gọi là $\mathbb{Z}-$liên tục tại điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ nếu tồn tại các giới hạn một phía $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ và các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\left| \lim_{x \to x_0^-} f(x) - f(x_0) \right| \leq 1,$$

$$\left| \lim_{x \to x_0^+} f(x) - f(x_0) \right| \leq 1.$$

Ta nói $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ là một hàm số $\mathbb{Z}-$liên tục nếu nó $\mathbb{Z}-$liên tục tại mọi điểm của $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2.2. Với mỗi số thực α, hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ được cho bởi $f(x) := [\alpha x]$ là một hàm $\mathbb{Z}-$liên tục.

Nhận xét 2.3. Hàm số f là $\mathbb{Z}-$liên tục tại điểm x_0 nếu và chỉ nếu, tại mỗi phía (trái hoặc phải) của điểm này, hoặc là f liên tục (một phía), hoặc là f chỉ có gián đoạn (một phía) loại bước nhảy, với bước nhảy bằng ± 1.

Chú ý rằng, với các gián đoạn một phía loại bước nhảy, hiệu số $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) - f(x_0)$ (tương ứng, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) - f(x_0)$) thường được gọi là bước nhảy *trái* (tương ứng, *phải*) của hàm f tại điểm x_0. Khi đã rõ phía, ta sẽ gọi tắt là bước nhảy, thay cho bước nhảy *trái* hay bước nhảy *phải*.

Mệnh đề dưới đây nói rằng các hàm số $\mathbb{Z}-$liên tục thì thỏa mãn định lý giá trị trung gian.

Mệnh đề 2.4. *Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ là một hàm số $\mathbb{Z}-$liên tục. Khi đó, nếu f nhận các giá trị m, M thì f nhận mọi số nguyên t nằm giữa m và M làm một trong các giá trị của mình.*

Chứng minh. Giả sử $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nào đó; và cho $t \in \mathbb{Z}$, mà $m < t < M$. Giả sử phản chứng rằng

(1) Không tồn tại $x \in \mathbb{R}$ để $f(x) = t$.

Nếu cần, thay f bởi hàm g được cho bởi công thức

$$g(x) := f(\alpha + \beta - x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(mà không làm thay đổi tính $\mathbb{Z}-$liên tục và tập giá trị của hàm số), ta có thể xem rằng $\alpha < \beta$. Lúc này, xét tập hợp

(2)
$$A := \{x \in [\alpha, \beta] \mid f(x) > t\} \subset [\alpha, \beta].$$

Vì $f(\beta) = M > t$, nên $\beta \in A$.

Đặt $a_1 := \alpha$, $b_1 := \beta$, ta có

(3) $b_1 \in A$ và A bị chặn dưới bởi a_1.

Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại $a_2, b_2 \in [a_1, b_1]$ với

(4) $0 \leq b_2 - a_2 \leq (b_1 - a_1)/2$

sao cho

(5) $b_2 \in A$ và A bị chặn dưới bởi a_2.

Thật vậy, nếu A bị chặn dưới bởi $(a_1 + b_1)/2$ thì chỉ cần chọn $a_2 := (a_1 + b_1)/2$, $b_2 := b_1$, ta sẽ có ngay (4)-(5). Trong trường hợp còn lại, tồn tại $b_2 \in A$ sao cho $b_2 < (a_1 + b_1)/2$; lúc này, chỉ cần chọn $a_2 := a_1$, ta cũng có ngay (4)-(5).

Tiếp tục mãi quá trình đi từ (3) đến (4)-(5), ta xây dựng được một dãy số $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ đơn điệu không giảm và một dãy số $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ đơn điệu không tăng sao cho

(6) $$0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}};$$

đồng thời,

(7) $\quad b_n \in A$ và A bị chặn dưới bởi a_n

với mọi $n \geq 1$. Theo Định lý dãy đơn điệu, tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n =: a \in [\alpha, \beta]$; hơn nữa, dùng (6) và Định lý về giới hạn kẹp, ta cũng có

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = a.$$

[Từ đây, (7) cho thấy a là *cận dưới lớn nhất của* A (một khái niệm giải tích không có trong chương trình toán THPT); và như vậy, ta vừa dùng kiến thức giải tích được thừa nhận ở THPT (Định lý dãy đơn điệu, Định lý về giới hạn kẹp) để chứng minh sự tồn tại của $a = \inf A$.]

Tiếp theo, nếu $a \notin A$, thì theo (1), (2), (7) (chú ý f chỉ nhận giá trị nguyên) ta có $a < b_n$ $(\forall n \geq 1)$ và

$$f(a) \leq t - 1;\ \ f(b_n) \geq t + 1\ (\forall n \geq 1);$$

suy ra

$$\left|\lim_{x\to a^+} f(x) - f(a)\right| = \left|\lim_{n\to+\infty} f(b_n) - f(a)\right| \geq 2.$$

Điều này mâu thuẫn với tính $\mathbb{Z}-$liên tục của f. Vậy, cùng với (2),

(8) $\qquad a \in A, f(a) \geq t + 1.$

Hơn nữa, do $f(\alpha) = m < t$, suy ra $\alpha \notin A$, nên $\alpha < a$. Theo tính $\mathbb{Z}-$liên tục của f tại a, tồn tại giới hạn hữu hạn $l := \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ thỏa mãn bất đẳng thức $|l - f(a)| \leq 1$. Từ đây, dùng (8), trước tiên ta thấy $l \geq t$. Hơn nữa, vì f chỉ nhận giá trị nguyên nên $l = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \in \mathbb{Z}$. Dùng định nghĩa của giới hạn trái, ta còn suy ra: tồn tại $c \in (\alpha, a)$ để với mọi $x \in (c, a)$, ta có $|f(x) - l| < 1/2$. Suy ra: với mọi $x \in (c, a)$, xảy ra đẳng thức $f(x) = l (\geq t)$. Vậy, sử dụng giả thiết (1) và định nghĩa (2) thì $(c, a) \subset A$, nên theo (7), khoảng (c, a) bị chặn dưới bởi mọi a_n. Điều này là không thể, vì $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Mệnh đề đã được chứng minh. $\square$

Nhận xét 2.5. Phép chứng minh (của Phiên bản thứ hai) nói trên đã *thực sự dùng các kỹ thuật giải tích*.

Dưới đây là một số bài toán áp dụng:

Bài toán 2.6. *Cho f là hàm trên tập số thực được xác định bởi công thức*

$$f(x) := \left[x - \frac{1}{2}\right] + \left[x \cdot \sqrt[3]{4}\right].$$

Chứng minh rằng f là một toàn ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{Z}$.

Lời giải. Xét các hàm số $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ được cho bởi

$$g(x) := \left[x - \frac{1}{2}\right],\ \ h(x) := \left[x \cdot \sqrt[3]{4}\right].$$

Dễ dàng kiểm chứng các nhận xét:

(i) g và h liên tục phải tại *mọi* điểm (của $\mathbb{R}$).

(ii) g *chỉ* gián đoạn trái tại các điểm của $A := \left\{\frac{1}{2} + p \mid p \in \mathbb{Z}\right\}$; hơn nữa, các gián đoạn này đều là gián đoạn loại bước nhảy, với bước nhảy bằng -1.

(iii) h *chỉ* gián đoạn trái tại các điểm của $B := \left\{\frac{q}{\sqrt[3]{4}} \mid q \in \mathbb{Z}\right\}$; hơn nữa, các gián đoạn này đều là gián đoạn loại bước nhảy, với bước nhảy bằng -1.

Do $\sqrt[3]{4} \notin \mathbb{Q}$ nên $A \cap B = \emptyset$. Vì vậy, từ các nhận xét trên suy ra: $f = g + h$ *chỉ* gián đoạn trái tại các điểm của $A \cup B$; hơn nữa, các gián đoạn này đều là gián đoạn loại bước nhảy, với bước nhảy bằng -1. Ngoài ra, f liên tục phải tại *mọi* điểm. Do đó, f là một hàm số $\mathbb{Z}-$liên tục (xem Nhận xét 2.3). Mà $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ nên, theo Mệnh đề 2.4, f là một toàn ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{Z}$. $\square$

Bài toán 2.7. *Tìm tất cả các cặp số thực a, b sao cho hàm số $f_{a,b}$ được xác định bởi công thức*

$$f_{a,b}(x) := [ax] - [bx] \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}$$

là một toàn ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{Z}$.

Lời giải. Với mỗi $c \in \mathbb{R}$, xét hàm số $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ được xác định bởi công thức

$$f_c(x) := [cx].$$

Ta dễ dàng kiểm chứng:

Nhận xét.

(1) $f_0(x) \equiv 0$ (nên f_0 là một hàm số liên tục trên khắp $\mathbb{R}$).

(2) Nếu $c > 0$, thì

+ f_c liên tục *phải* tại *mọi* điểm

+ f_c *chỉ* gián đoạn *trái* tại các điểm của $D_c := \left\{ \frac{k}{c} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$; hơn nữa, các gián đoạn này đều là gián đoạn loại bước nhảy, với bước nhảy bằng -1.

(3) Nếu $c < 0$, thì

+ f_c liên tục *trái* tại *mọi* điểm

+ f_c *chỉ* gián đoạn *phải* tại các điểm của D_c $\left(:= \left\{ \frac{k}{c} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$; hơn nữa, các gián đoạn này đều là gián đoạn loại bước nhảy, với bước nhảy bằng -1.

Trở lại bài toán, dùng Nhận xét trên, ta chứng minh được tính $\mathbb{Z}-$liên tục của $f_{a,b}$. Thật vậy, với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, các hàm số $f_{a,0} = f_a$, $f_{0,b} = -f_b$ rõ ràng là $\mathbb{Z}-$liên tục. Chỉ còn bốn trường hợp phải xét:

(i) $a > 0, b > 0$. Theo Nhận xét trên, dễ thấy:

+ $f_{a,b}$ liên tục *phải* tại mọi điểm

+ $f_{a,b}$ *chỉ* gián đoạn *trái* tại các điểm của $(D_a \setminus D_b) \cup (D_b \setminus D_a)$; hơn nữa, các gián đoạn này đều là gián đoạn loại bước nhảy, với bước nhảy bằng -1 tại các điểm của $D_a \setminus D_b$ và bằng 1 tại các điểm của $D_b \setminus D_a$.

(Tại các điểm của $(D_a \cap D_b) \cup [\mathbb{R} \setminus (D_a \cup D_b)]$ hàm số $f_{a,b}$ liên tục trái.)

(ii) $a < 0, b < 0$. Lúc này, kết quả sẽ như kết quả ở trường hợp (i); trong đó, các từ "trái" và "phải" đổi vị trí cho nhau.

(iii) $a > 0, b < 0$. Lúc này,

+ $f_{a,b}$ *chỉ* gián đoạn *trái* tại các điểm của D_a; hơn nữa, các gián đoạn này đều là gián đoạn loại bước nhảy, với bước nhảy bằng -1.

+ $f_{a,b}$ *chỉ* gián đoạn *phải* tại các điểm của D_b; hơn nữa, các gián đoạn này đều là gián đoạn loại bước nhảy, với bước nhảy bằng 1.

(iv) $a < 0, b > 0$. Lúc này, kết quả sẽ như kết quả ở trường hợp (iii); trong đó, các từ "trái" và "phải" đổi vị trí cho nhau.

Trong cả bốn trường hợp nói trên, $f_{a,b}$ đều là một hàm số $\mathbb{Z}-$liên tục.

Cuối cùng, vì

$$\begin{aligned} f_{a,b}(x) &= (ax - \{ax\}) - (bx - \{bx\}) \\ &= (a-b)x + u(x), \end{aligned}$$

trong đó $-1 < u(x) < 1$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, nên dùng Mệnh đề 2.4, ta thấy: $f_{a,b}$ là một toàn ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $a \neq b$. □

Bài toán 2.8 (Chọn đội tuyển PTNK HCM 1999)**.** *Tìm tất cả các cặp số thực a, b sao cho hàm số $f_{a,b}$ được xác định bởi công thức*

$$f_{a,b}(x) := [ax] + [bx] \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}$$

là một toàn ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{Z}$.

Lời giải. Chỉ có ba trường hợp có thể xảy ra:

(i) $ab > 0$. Nếu a và b cùng dương, dễ thấy: $f_{a,b}$ đơn điệu không giảm; $f_{a,b}(0) = 0$; $f_{a,b}(x) = -2$ khi $\max\left\{ \frac{-1}{a}; \frac{-1}{b} \right\} < x < 0$. Vì thế, $f_{a,b}$ không nhận giá trị -1, nên nó không phải là một toàn ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{Z}$. Còn nếu a và b cùng âm, thì $f_{a,b}$ đơn điệu không tăng; $f_{a,b}(0) = 0$; $f_{a,b}(x) = -2$ khi $0 < x < \min\left\{\dfrac{-1}{a}; \dfrac{-1}{b}\right\}$. Vì thế, $f_{a,b}$ cũng không nhận giá trị -1, nên cũng không thể là một toàn ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{Z}$.

(ii) $ab < 0$. Vai trò của a và b là như nhau, nên trong trường hợp này, có thể xem rằng $a > 0$, $b < 0$. Ta tiếp tục sử dụng các hàm f_c cùng Nhận xét đã có trong lời giải của Bài toán 2.7. Từ Nhận xét đó, suy ra:

+ $f_{a,b} = f_a + f_b$ *chỉ* gián đoạn *trái* tại các điểm của D_a; hơn nữa, các gián đoạn này đều là gián đoạn loại bước nhảy, với bước nhảy bằng -1.

+ $f_{a,b}$ *chỉ* gián đoạn *phải* tại các điểm của D_b; hơn nữa, các gián đoạn này đều là gián đoạn loại bước nhảy, với bước nhảy bằng -1.

Vậy, $f_{a,b}$ là một hàm số $\mathbb{Z}-$liên tục. Mà

$$\begin{aligned} f_{a,b}(x) &= ax - \{ax\} + bx - \{bx\} \\ &= (a+b)x - v(x), \end{aligned}$$

trong đó $0 \le v(x) < 2$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, nên dùng Mệnh đề 2.4, ta thấy: $f_{a,b}$ là một toàn ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $a + b \neq 0$.

(iii) $a = 0$ hoặc $b = 0$. Kiểm tra trực tiếp, ta thấy: $f_{a,b}$ là một toàn ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $a + b \neq 0$.

Kết luận: $f_{a,b}$ là một toàn ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{Z}$ khi và chỉ khi a, b thỏa mãn đồng thời các điều kiện $ab \le 0, a + b \neq 0$. □

TÀI LIỆU

[1] Mark Burgin, *Continuity in discrete sets*, Tiền ấn phẩm arXiv (2010), địa chỉ: https://arxiv.org/pdf/1002.0036.pdf.

[2] Richard Johnsonbaugh, *A discrete intermediate value theorem*, The College Mathematics Journal (January, 1998), xem một bản copy tại https://www.maa.org/sites/default/files/0746834259610.di020780.02p0372v.pdf.

[3] Antonella Perucca, *An intermediate value theorem for $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{Z}$*, Tiền ấn phẩm, http://www.antonellaperucca.net/perucca-intermediate-value.pdf).

[4] Tạp chí Pi, Hội Toán học Việt Nam, Tập 1 số 8 (2017).

Tiểu phẩm

Cơn sốt vàng[1]

Colin Adams[2]

LTS. Bất kỳ ý kiến hay phát biểu nào có trong tiểu phẩm này đều không nhất thiết phản ánh quan điểm của Ban biên tập Thông Tin Toán Học, hay của Hội Toán học Việt Nam.

Tôi đang uống trà đá ở trong Quán Phôi Pha, cốc trà đá cuối cùng trước khi tạm biệt thị trấn Kiệt tàn tạ heo hút này, thì Chí Phèo bước vào.

"Vàng!", gã kêu toáng lên. "Người ta tìm thấy vàng trên ngọn đồi đó". Gã trỏ về phía đèo Tọa Độ.

(1) Nguyên bản "Gold rush", đăng trên The Mathematical Intelligencer Vol. 40, No 2 (2018), 30–32. Chúng tôi thay đổi một số chi tiết cho câu chuyện gần gũi hơn với độc giả của Thông Tin Toán Học. (ND)

(2) Williams College, Williamstown, MA 01267, USA. Colin Adams là một chuyên gia về tôpô số chiều thấp, cụ thể là lý thuyết nút và đa tạp 3 chiều hyperbolic. Ông được bầu là Fellow of the American Mathematical Society từ năm 2013. Địa chỉ email: cadam@williams.edu; colin.c.adams@williams.edu. (ND)

Đang lau dọn quán, Hải Xồm ngước con mắt sáng duy nhất lên nhìn Chí gầm gừ: "Lảm nhảm gì thế anh Chí?"

"Tôi nói là có vàng! Ở khoảng không gian ngay phía trên con đèo."

"Đâu? Khoảng không gian nào?"

"Không gian vectơ."

Hải Xồm phá lên cười rồi quay lại lau chùi. "Bới đâu ra vàng ở không gian vectơ. Rõ là ngớ ngẩn."

"Tôi nhắc lại, người ta đã tìm thấy vàng, vàng thật một trăm phần trăm!", Chí Phèo hét lên. "Người phát hiện ra là một cô bé nghiên cứu sinh. Cô bé này lang thang ở chỗ không gian vectơ, kiến thức cô ta còn quá non nót để có thể tin rằng chẳng thể tìm được vàng ở những không gian vectơ. Rồi cô bé thấy một cái gì đó phát sáng khác thường. Cô lấy sức để đào nó lên và có ai tưởng tượng được không, cô ấy tóm được một định lý hoành tráng, lớn không tưởng tượng nổi. Định lý đó làm bằng vàng nguyên chất, Q1 trên Scopus là chuyện nhỏ! Nó cứ nằm im đó chờ người đến nhấc nó lên."

Tiếng xì xào rộ lên trong quán. Tôi đứng dậy, đi nhanh về phía Chí. Một loạt những cái lưng nhỏm dậy, một loạt những con mắt dõi theo từng bước chân tôi.

"Anh Chí, ai cũng biết là anh toàn kể những chuyện tào lao để kiếm vài ly", tôi nói với Chí Phèo.

Gã cau mày nhìn tôi.

"Hừ, điều đó không sai, nhưng hôm nay là chuyện khác."

Dung còi bước tới vỗ vai Chí.

"Vậy anh hãy nói xem, cô bé đó tìm ra định lý gì?"

Cả phòng nín lặng chờ đợi.

"Cô ấy chứng minh là với mọi $n \geq 2$ và mọi số nguyên tố p, tồn tại một cơ sở chuẩn tắc siêu thuần túy của F_{p^n}, xem như là một không gian vectơ trên F_p. Mà đó mới chỉ là khởi đầu của câu chuyện thôi."

"Chỉ là khởi đầu?"

"Cô ấy còn phát hiện được một loạt các kết quả khác. Có đủ bài báo ISI cho mọi người tha hồ viết. Nếu nhanh chân tất cả chúng ta rồi sẽ tìm được ghế giáo sư ở những đại học danh tiếng nhất. Với văn phòng rộng rãi, với hàng đống học trò, trợ giảng trong nhóm làm việc. Đại Việt Uni, Viện Đa Trí Tuệ Nhân Tạo đang chờ. Tương lai chính là... Ối!"

Chí chưa dứt lời, người ta đã chen nhau, đạp bàn ghế, đẩy cả Chí, ào ào lao ra khỏi quán. Khi bàn ghế trong quán được trở lại nằm im một chỗ (Chí đã kịp nép vào một xó), chỉ còn lại vài cậu sinh viên đại học ngơ ngác đi tìm lời giải bài tập về nhà, và Dũng râu, giáo sư Đại Việt Uni, người đam mê cờ bạc. Lão ta đến thị trấn Kiệt để trình bày một seminar về xác suất. Lão cầm bộ bài Tây trên chiếc bàn trước mặt lên tay và bắt đầu trộn bài.

"Chuyện này vui đây", lão lẩm bẩm một mình.

Cuộc đổ xô đi đào vàng bắt đầu. Chỉ trong một tháng, dân cư thị trấn Kiệt tăng gấp năm. Dân làm toán từ khắp nơi trên thế giới ùa đến đây. Từ nghiên cứu sinh Nam Phi, Trung Quốc, đến cả một số *world leaders* ngự ở Princeton, Harvard, Berkeley. Đủ mọi loại người. Có những kẻ vững như nồi đồng cối đá, cả đời nghiến răng giành giật từng miếng bánh khoa học. Dạy ba trăm sinh viên một lúc và hùng hục làm nghiên cứu. Cũng có những kẻ như từ trên trời rơi xuống. Mù tịt về tìm vàng. Cả đời ru rú trong những tháp ngà khoa học an toàn nơi thầy hướng dẫn giao tận tay cả vấn đề nghiên cứu lẫn cách giải. Những kẻ tay ngang này bận rộn với việc ăn bánh, uống cà phê, và tìm chỗ cắm laptop. Miễn bình luận.

Còn tôi, may mắn chụp được một mệnh đề lẻ ở phía trên đèo Tọa Độ, trong lĩnh vực nghiên cứu ngũ thức bất khả quy trên F_2. Tôi đoán rằng nếu cô bé kia tìm ra được định lý ở gần con đèo, nó hẳn phải rớt từ đâu đó bên trên xuống. Tôi tìm đường đi lên tận cao phía trên và nhờ thế tóm được cái mệnh đề. Dung còi tóm được một mệnh đề khác nằm cạnh đó. Chị ta nghiên cứu tam thức trên F_3.

Vài tháng sau đó, thi thoảng lại nghe đồn có kẻ lần ra một cái mỏ, và viết bài gửi cho Annals hoặc Invent. Bản thân tôi, làm việc với cái mệnh đề của mình ba tháng, tôi bắt đầu hoang mang. Một hôm, tôi tìm Dung còi để hỏi về mệnh đề của chị ta. Chị ta đang cầm xẻng mải miết đào, mồ hôi nhễ nhại.

"Chị Dung này", tôi hỏi, "cái mệnh đề của chị có ăn nhằm gì không?"

"Cái mệnh đề ấy à?", chị ta tì vào cán xẻng, vẻ mặt rầu rĩ. "Tiền làm ra đủ để đổ xăng xe. Nhưng còn khuya mới mong xin được một chân giảng viên hợp đồng Đại Việt Uni."

"Tôi cũng chẳng khá hơn, ngày bán cháo phổi, tối đào vàng. Có thể chúng ta đi nhầm đường trong vụ này rồi."

"Ý anh là gì?"

"Sao chúng ta không thử hợp tác?" Tôi đề nghị. "Chị mạnh về kỹ thuật đào bới, tôi thì cũng biết đánh hơi ra chỗ có tiềm năng. Sao không thử cùng tìm kiếm, biết đâu chẳng thành công hơn bây giờ?"

Dung còi đồng ý và từ đó chúng tôi hợp tác. Dung còi làm việc không biết mệt, công việc tốn bao nhiêu sức, nhiều hôm phải thức thâu đêm cũng không ngán. Ba ngày sau, lúc đang đào bới, chị ta thốt lên. "Pha ơi, lại đây xem tôi tìm được cái gì này!"

Tôi ném xẻng xuống và chạy đến nhìn.

"Thấy mấy bổ đề này hay không?", Dung còi nói, "có thể chúng là đầu mối dẫn đến cái gì đó."

Tôi nhìn xuống cái hố, nhưng mấy cái bổ đề trông hoàn toàn cơ bản, thậm chí vô thưởng vô phạt. Dung còi tiếp tục ấn xẻng xuống thật mạnh, thì bỗng "cục" một tiếng, cái xẻng gẫy đôi, gập lại ở gần đầu.

"Giời đất ạ", Dung tức tối. "Báo hại cái xẻng này lại ngốn của tôi một tháng tiền ăn." Rồi chị ta dừng lại nhìn xem mình vừa bổ phải cái gì.

"Pha! Lại đây!", chị ta nói, "tôi tìm được cái gì hay lắm."

Chúng tôi hăng hái đào, nhiều lúc lấy cả tay không mà dọn mà xới chỗ Dung vừa chạm xẻng đến. Dần dần chúng tôi loại bỏ đi được đất cát ở ngoài rìa. Càng đào bới, chúng tôi càng có linh cảm mình đang đứng trước một thứ phi thường.

"Ôi trời", tôi kêu lên khi các đường viền bắt đầu rõ nét, "tôi nghĩ đây chính là giả thuyết số nguyên tố sinh đôi trên F_2".

"Anh không đùa đấy chứ?"

"Không! Không còn nghi ngờ gì nữa!"

Dung còi reo lên phấn khích. "Chúng ta sẽ nổi tiếng. Tiền tài trợ chúng ta nhận được sẽ ào ào như nước sông Đà!" Chúng tôi nhảy múa hò hét như điên bên cạnh cái định lý.

"Giàu to rồi! Annals đây rồi!", Dung còi hớn hở hét lên.

Sau khi bình tĩnh lại, chúng tôi lôi định lý lên khỏi mặt đất, và đầy khó nhọc, chúng tôi mới đặt được nó lên lưng một con trâu, bọc một mảnh vải dù lên trên. Sau đó chúng tôi xuống núi trở về thị trấn, cả hai cười hớn hở như nghiên cứu sinh mới bảo vệ xong.

Nhưng khi đến một khúc rẽ trên núi, xuất hiện một bóng áo đen cưỡi ngựa tiến về phía chúng tôi. Khi người đó đến gần, tôi nhận ra Dũng râu.

"Đừng kể gì với hắn", tôi nói nhỏ với Dung còi.

"Chào mọi người", Dũng râu cười nói, tay vung vẩy cái mũ Đại Việt Uni.

"Tôi tưởng ông rời thị trấn lâu rồi chứ Dũng râu", tôi nói. "Chẳng phải ông là nhân vật chính của Ngày hội Xác Suất miền Đông Bắc Bộ sao?"

"Tôi để Mr. Đàm thế chân mình rồi", lão ta trả lời. "Trông con trâu của các bạn kìa, sao nó có vẻ nặng nhọc thế? Các bạn có gì trên đó vậy?"

Một tay của lão lần đến khẩu súng lục giắt bên hông.

"À, cái đó hả? Chẳng qua là mấy bổ đề nhỏ chúng tôi kiếm được. May ra thì đủ tiền cho mấy cốc nhân trần."

"Nếu thế sao không cho tôi xem thử. Biết đâu tôi có thể áp dụng được chúng. Có thiệt thòi gì đâu nếu tên tôi xuất hiện trong danh sách đồng tác giả."

Dung còi bước tới đứng trước ngựa của Dũng râu.

"Chúng tôi không có nhu cầu đứng cạnh tên ông trong một bài báo."

"Thật thế sao?", lão ta nói rồi chầm chậm rút khẩu súng lục ra khỏi bao và nhắm vào Dung còi. "Vậy các người muốn tôi đứng tên tác giả bài báo một mình chăng?"

"Dừng lại", tôi ngắt lời lão. "Chúng tôi hoàn toàn tự lực tìm ra định lý này. Trong lúc đó, ông ngồi vểnh râu trong quán uống rượu và bóc lột những kẻ ngây thơ với những mánh khóe xác suất của ông. Ông đừng hòng chạm tay vào định lý này. Nó thuộc về chúng tôi."

"Vậy các người sẽ mất trắng nó", Dũng râu nói. "Chẳng ai biết các người đã tìm ra nó. Khi mang định lý này trở lại thị trấn, mọi người đều sẽ tin là ta, chính ta đã tìm ra nó. Lý lịch khoa học của ta hoàn toàn áp đảo so với các người. Và các người sẽ vĩnh viễn biến mất. Sẽ chẳng ai nhớ nổi các người là ai."

Mặt của Dung còi sa sầm, như mặt trời sắp lặn.

"Trông mặt cô hay đấy", Dũng râu vừa nói vừa cười khẩy. Mặt của Dung còi bây giờ tím tái. Cô bước tới và vung tay đấm vào mũi con ngựa của Dũng râu.

Tôi muốn giải thích cho rõ. Dung còi vốn là người yêu động vật. Chị ta đã từng tham gia tổ chức trường hè về Giải tích 1/2 cho chó. Nhưng lúc này, lửa giận bốc lên quá cao khiến chị đấm vào mũi con ngựa. Cú đấm rất mạnh. Con ngựa hoảng hồn bỏ chạy. Dũng râu lấy súng bắn về phía chúng tôi hòng hạ sát cả hai, nhưng vì con ngựa hoảng loạn, lão ta bắn không trúng. Tôi túm lấy tay kéo Dung còi theo, cả hai lao ra phía bờ dốc. Chúng tôi lăn đại xuống phía dưới trong lúc Dũng râu bắn với theo truy sát.

Chúng tôi trượt xuống một bụi rậm và trườn vào sau một phiến đá.

"Chị không sao chứ?" tôi hỏi.

Dung còi kiểm tra người mình và gật đầu.

"Thế là chúng ta để mất định lý rồi", tôi than.

"Đừng vội đầu hàng", Dung còi nói, trong lúc chúng tôi tìm đường về thị trấn.

Khi về đến nơi, chúng tôi gặp một đám đông bên ngoài văn phòng trọng tài. Chúng tôi lách được vào bên trong vừa đúng lúc viên trọng tài đang cân nhắc định lý mà Dũng râu công bố với mọi người.

"Tôi chưa bao giờ thấy một định lý lớn như thế này", viên trọng tài nói, mắt mở to kinh ngạc. "Diễm phúc cho ai tìm ra nó!"

"Dừng lại", tôi lên tiếng, "định lý đó không phải của Dũng râu. Nó là kết quả của tôi và Dung còi. Chính chúng tôi lần ra manh mối và đào nó lên."

Dũng râu cười xảo trá. "Thôi nào", lão nói. "Chẳng khoe khoang gì tôi cũng là Maxan Chinxu Professor of Mathematics của Đại Việt Uni, Viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa học New York. Ngoài tôi ra còn ai có thể phát hiện ra một định lý lớn như thế này? Một đám vô danh tiểu tốt như chúng hay một chuyên gia nổi danh hàng đầu châu Á như tôi? Chẳng có ai tin vào câu chuyện nhảm nhí của các người đâu."

"Người ta sẽ phải tin nếu họ thấy những bổ đề sau đây", Dung còi bình thản nói và lôi ra từ túi quần jean một nhúm bổ đề lấm lem. Chị ta giơ cao các bổ đề đó lên cho mọi người thấy. Chính tôi cũng kinh ngạc như toàn bộ đám đông.

"Định lý kia sẽ không thể hiểu được nếu không dùng những bổ đề này để chứng minh nó. Không có những bổ đề này, định lý đó chỉ là một tập hợp hỗn loạn những mảnh vụn. Nhưng Dũng râu không biết các bổ đề này. Vì lão ta không tự tay đào định lý lên. Chúng tôi khác lão, vì tôi đã đào các bổ đề này lên cùng với định lý đó."

"À, giỏi lắm, các người sẽ biết tay ta", Dũng râu hét lên và rút súng ra. Nhưng đám đông đã túm lấy và vật lão xuống đất.

Viên trọng tài quay về phía Dung còi và tôi. "Có vẻ như đây chính là định lý của ông bà. Tôi tuyên bố rằng một định lý lớn thế này sẽ đảm bảo cho ông bà một chân giảng viên ở những đại học danh giá và trả lương hậu hĩnh như New Rich Elite Uni hay Đại Tư Sản College."

"Tôi thì vào đâu cũng được", tôi nói. "Miễn là không phải suốt ngày bán cháo phổi giá rẻ."

"Tôi cũng thế", Dung còi nói. "Miễn là không phải giật mình mỗi lần đến kỳ nộp học phí cho con". Rồi chị quay sang nháy mắt với tôi.

"Toán học thật tuyệt vời!", chị nói.

Chí Phèo không bỏ lỡ cơ hội chêm vào:

"Ai, ai giúp anh chị trở thành triệu phú? Các anh chị đừng quên nhé!"

Dũng râu không bị sa thải khỏi Đại Việt Uni, vì cái gọi là biên chế ở đó. Nhưng lão ta không bao giờ dám xuất hiện giữa những cộng đồng làm nghiên cứu nữa. Lão ta bị buộc phải dạy những giảng đường khổng lồ chật ních những sinh viên không mặn mà gì với môn toán.

Khi hay tin về định lý của chúng tôi, các nhà toán học tứ phương kéo đến chật ních thị trấn Kiệt, và lần mò từng mét vuông hòng tìm kiếm những kết quả mới. Nhưng cuối cùng, không ai còn tìm ra nổi một định lý lớn nào khác trong toàn bộ khu vực đó. Tháng Một năm sau đó, có một phát hiện mới ở cách thị trấn Kiệt 200 km về phía Tây, trong vùng đại số đồng điều. Những kẻ đào vàng ở Kiệt biến mất trong chớp nhoáng, nhanh như cách họ từng xuất hiện. Phố Chính trở lại thành một ví dụ điển hình của tập rỗng. Và Kiệt trở lại là một thị trấn hoang vu như trong quá khứ và tương lai mãi mãi về sau.

Người dịch: Nguyễn Đăng Hợp (Viện Toán học, Email: ngdhop@gmail.com).

Hội nghị Toán học Châu Á (Asian Mathematical Conference - AMC) sẽ được Việt Nam đăng cai tổ chức từ 28-31/7/2020 tại Hạ Long, Quảng Ninh. Kể từ hội nghị đầu tiên tại Hồng Kông năm 1990, đây là đại hội thứ 8 và lần đầu tiên được tổ chức ở Việt Nam. Dự kiến sẽ có các báo cáo mời toàn thể, báo cáo mời và một số báo cáo ngắn tại 10 tiểu ban. Danh sách các tiểu ban như sau

- Discrete Mathematics (including logic, complexity theory)

- Algebra (including representation theory)

- Algebraic Geometry and Number Theory

- Geometry and Topology

- ODE and PDE

- Mathematical Analysis (real, complex, functional analysis)

- Probability and Statistics

- Control Theory and Optimizations

- Numerical Analysis and Scientific Computing

- History of Math and Mathematical Education

Dự kiến, các nhà toán học sau đây sẽ đọc báo cáo mời toàn thể tại hội nghị:

- DINH TIEN CUONG (NUS, Singapore)
- JUN-MUK HWANG (KIAS, Seoul)
- MASAKI KASHIWARA (Kyoto Uni.)
- ELON LINDENSTRAUSS (Hebrew Uni., Jerusalem)
- VOLKER MEHRMANN (TU Berlin)
- GANG TIAN (Peking Uni.)

Ngoài ra, từ 25 đến 27/7/2020, có bốn hội thảo vệ tinh sẽ được tổ chức trước thềm hội nghị Toán học châu Á, về các chủ đề sau:

(1) Arithmetic of Automorphic Forms and Their Function Field Analogues,
(2) Minimal Free Resolution and Related Topics,
(3) Nonlinear Analysis and Optimization Theory,
(4) Differential Equations and Dynamical Systems.

Đăng ký tham dự bắt đầu từ 1/10/2019. Thông tin chi tiết có trên trang web: https://amc2020.viasm.edu.vn.

Thành lập Chi hội toán học Đồng bằng Sông Cửu Long

Sáng 21/7/2019, tại ĐH Sư phạm kỹ thuật (SPKT) Vĩnh Long, Hội Toán học Việt Nam tổ chức Hội nghị thành lập Chi hội toán học Đồng bằng Sông Cửu Long.

Tham dự có GS. Ngô Việt Trung – Chủ tịch Hội; GS. Phùng Hồ Hải – Viện trưởng Viện toán học, Phó Chủ tịch Hội; PGS. TS. Cao Hùng Phi – Hiệu trưởng ĐH SPKT Vĩnh Long; lãnh đạo Sở GDĐT các tỉnh; các nhà khoa học và đại diện giảng viên, giáo viên phụ trách môn toán tại các trường ĐH, CĐ, THPT khu vực Đồng bằng Sông Cửu Long.

Hội nghị đã ra Nghị quyết thành lập Chi hội Toán học Đồng bằng Sông Cửu Long nhiệm kỳ 2019 – 2023, và bầu Ban chấp hành với 23 thành viên.

(1) Chi hội trưởng: PGS. TS Lâm Quốc Anh (Ủy viên BCH Hội Toán học Việt Nam);
(2) Phó Chi hội trưởng: TS. Trần Hoài Ngọc Nhân (ĐH SPKT Vĩnh Long), và thầy Huỳnh Chí Hào (THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp);
(3) Chánh văn phòng: ThS. Võ Phước Hậu (ĐH SPKT Vĩnh Long);

(4) Thư ký: ThS. Bùi Anh Tuấn (ĐH Cần Thơ).

Theo Nghị quyết, Chi hội sẽ có trách nhiệm tập trung nguồn lực, nghiên cứu, phổ biến toán học, nâng cao chất lượng giảng dạy và bồi dưỡng các tài năng toán học góp phần xây dựng nền toán học tiên tiến và khoa học kỹ thuật của vùng ĐBSCL. Hàng năm, Chi hội tổ chức cuộc thi Olympic Toán ứng dụng cho sinh viên các trường Đại học, Cao đẳng, Học viện và tiến tới tổ chức các cuộc thi toán cho học sinh THPT.

Ban Chấp hành Hội Toán học đã họp thảo luận về một số công việc quan trọng trong thời gian tới của Hội như việc triển khai xây dựng trụ sở, kiện toàn tổ chức tạp chí Pi và tạp chí Ứng dụng Toán học, tổ chức các hội nghị lớn do Hội Toán học chủ trì như Hội nghị Toán học Châu Á (2020)... Do yêu cầu của thực tế và căn cứ theo điều lệ Hội, Ban Chấp hành đã thảo luận và biểu quyết bầu bổ sung thành viên Ban chấp hành Hội Toán học Việt Nam nhiệm kỳ 2018-2023. Với đa số phiếu tán thành, hai hội viên được bầu bổ sung vào Ban Chấp hành khoá này là

- PGS. TS. Phạm Hoàng Quân, Hiệu trưởng ĐH Sài Gòn, tham gia tổ chức các hoạt động ở phía Nam,

- PGS. TS. Trịnh Tuân, ĐH Điện lực, thay mặt Hội làm việc với các công ty xây dựng và cơ quan nhà nước để giải quyết các vấn đề liên quan đến việc xây dựng Trụ sở Hội.

Sau khi bổ sung, Ban Chấp hành hiện nay có 21 thành viên.

Giải thưởng Phan Đức Chính năm 2019 đã được trao cho 2 giáo viên và 1 học sinh chuyên toán-tin xuất sắc của THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, ĐH KHTN, ĐHQG HN, vào sáng 5/9/2019. Những người đoạt giải gồm có: (1) Thầy **Nguyễn Vũ Lương**, SN 1952, PGS.TS., NGND, nguyên hiệu trưởng Trường THPT chuyên KHTN, chủ tịch Hội đồng KH-ĐT của trường chuyên; (2) Thầy **Hồ Đắc Phương**, SN 1976, nguyên học sinh Khối chuyên toán, chủ nhiệm Bộ môn chuyên tin học; (3) Học sinh **Nguyễn Minh Tùng**, SN 2001, nguyên học sinh lớp 12A1 toán của Khối, đã đạt 2 HCB Olympic Tin học Châu Á – Thái Bình Dương, 1 HCĐ Olympic Tin học quốc tế 2019.

GS. Hoàng Tụy đã từ trần ngày 14/07/2019 ở tuổi 92. GS. Hoàng Tụy là một nhà toán học có uy tín lớn, một chuyên gia hàng đầu thế giới về Tối ưu toàn cục. Ông có những đóng góp to lớn vào sự phát triển của Toán học Việt Nam. Ông nguyên là Chủ nhiệm Khoa Toán của Đại học Tổng hợp Hà Nội (1961-1968), Tổng thư ký đầu tiên của Hội Toán học (1967-1988) (thời gian này, GS. Lê Văn Thiêm giữ chức Chủ tịch Hội), Viện trưởng Viện Toán học (1980-1989). Từ 1980 đến 1990, ông là Tổng biên tập tạp chí Acta Mathematica Vietnamica. Ông được trao Giải thưởng Hồ Chí Minh về Khoa học và Công nghệ năm 1996. Xuất thân từ một đất nước chịu nhiều hy sinh để có được độc lập và bị cô lập lâu dài trong chiến tranh, ông vươn lên trở thành một trí thức có viễn kiến, công tác khoa học lâu dài và bền bỉ với những chuyến đi đến nhiều nước như Pháp, Thụy Điển, Mỹ, Nhật Bản, Canada, Nga, Đông Đức, Tây Đức. Với kinh nghiệm sống phong phú, Hoàng Tụy luôn nói bằng ngòi bút đầy tự tin của chính mình, từ chối sáo ngữ, và không ngại đi ngược lại với kỳ vọng của số đông. Những mối quan tâm lớn có thể dễ dàng nhận thấy qua những bài viết, phỏng vấn, kiến nghị, hoạt động xã hội của con người gốc Quảng Nam này: giáo dục, cuộc sống theo đúng lương tri cho nhà khoa học và nhà giáo, sự phát triển ổn định của cộng đồng khoa học, chế độ chính trị lành mạnh, không có tham nhũng.

PGS.TSKH. Đỗ Hồng Tân, sinh năm 1937, đã từ trần tại nhà riêng vào lúc ngày 11/08/2019, hưởng thọ 83 tuổi. Ông nguyên là cán bộ Phòng Giải tích Toán học, Viện Toán học. Một trong những hướng nghiên cứu chính của ông là giải tích hàm, cụ thể là lý thuyết điểm bất động.

Tin thế giới

Alex Eskin, Đại học Chicago, đã được trao Giải thưởng Đột phá về Toán học 2020. Lời tuyên dương của Hội đồng giải thưởng nói Eskin được trao giải "Vì những phát kiến cách mạng về động lực học và hình học của các không gian moduli của các vi phân abel, bao gồm chứng minh viết chung với Maryam Mirzakhani của "định lý cây đũa thần". Chi tiết hơn: Eskin đã cộng tác cùng với nhà toán học gốc Iran nổi tiếng Maryam Mirzakhani (người được trao thưởng huy chương Fields năm 2014), để chứng minh một định lý về động lực học trên các không gian moduli. Công trình *tour de force* của họ, kết quả của năm năm lao động cật lực, được xuất bản năm 2013, kéo theo rất nhiều hệ quả khác nhau. (Theo https://breakthroughprize.org)

Thông tin hội nghị

Hội nghị Đại số-Lý thuyết số-Hình học và Tô pô 2019 sẽ được tổ chức từ ngày 4 đến 8/12/2019 tại Trường Cao đẳng Sư phạm Bà Rịa-Vũng Tàu. Đây là sự kiện được tổ chức hai năm một lần với mục đích giới thiệu tổng quan các thành tựu nghiên cứu mới ở trong nước và quốc tế trong các lĩnh vực Đại số, Lý thuyết số, Hình học và Tô pô.

CƠ QUAN TỔ CHỨC:

- Viện Toán học, Viện Hàn lâm KHCN VN,
- Trường Cao đẳng Sư phạm Bà Rịa-Vũng Tàu.

BÁO CÁO: Báo cáo mời 45 phút sẽ do Ban tổ chức mời theo đề xuất của Ban chương trình. Danh sách báo cáo mời sẽ được thông báo trên Thông báo số 2. Ban tổ chức kính mời các thành viên tham dự đăng ký báo cáo 15 phút.

ĐĂNG KÝ THAM DỰ và báo cáo trước ngày 15/10/2019 bằng email tới địa chỉ

dahito2019@gmail.com (theo mẫu đăng ký có trên trang web hội nghị; xem thông tin dưới đây).

HỘI NGHỊ PHÍ: 200.000đ/thành viên. Các thành viên tham dự tự túc kinh phí đi lại và ăn ở. Hội nghị sẽ tài trợ cho một số cán bộ nghiên cứu trẻ và nghiên cứu sinh một phần kinh phí đi lại và hỗ trợ chỗ ở miễn phí trong nhà khách trường Cao đẳng Sư phạm Bà Rịa–Vũng Tàu (xem mẫu đăng ký kèm theo).

LIÊN HỆ: Phùng Hồ Hải (phung@math.ac.vn, về thông tin chung), và,

Phan Thế Hải (phanthehai1973@gmail.com, về thông tin địa phương).

TRANG WEB HỘI NGHỊ: `http://math.ac.vn/conference/DAHITO2019`.

THÔNG TIN TOÁN HỌC, Tập 23 Số 3 (2019)