

Hội Toán Học Việt Nam



THÔNG TIN TOÁN HỌC

Tháng 6 Năm 2019

Tập 23 Số 2



Thông Tin Toán Học

(Lưu hành nội bộ)

- Tổng biên tập
Đoàn Trung Cường
 - Phó tổng biên tập
Nguyễn Thị Lê Hương
 - Thư ký tòa soạn
Nguyễn Đăng Hợp
 - Ban biên tập
Ngô Quốc Anh
Phan Thị Hà Dương
Nguyễn Đăng Hồ Hải
Ngô Hoàng Long
Đỗ Đức Thuận
Nguyễn Chu Gia Vượng
 - Địa chỉ liên hệ
- Bản tin **Thông Tin Toán Học** nhằm mục đích phản ánh các sinh hoạt chuyên môn trong cộng đồng toán học Việt Nam và quốc tế. Bản tin ra thường kỳ 4 số trong một năm.
 - Thể lệ gửi bài: Bài viết bằng tiếng Việt. Tất cả các bài, thông tin về sinh hoạt toán học ở các khoa (bộ môn) toán, về hướng nghiên cứu hoặc trao đổi về phương pháp nghiên cứu và giảng dạy đều được hoan nghênh. Bản tin cũng nhận đăng các bài giới thiệu tiềm năng khoa học của các cơ sở cũng như các bài giới thiệu các nhà toán học. Bài viết xin gửi về tòa soạn theo email hoặc địa chỉ ở trên. Nếu bài được đánh máy tính, xin gửi kèm theo file với phong chữ unicode.

*Bản tin: **Thông Tin Toán Học**
Viện Toán Học
18 Hoàng Quốc Việt, 10307 Hà Nội*

Email: ttth@vms.org.vn

Trang web:

<http://www.vms.org.vn/ttth/ttth.htm>

Ảnh bìa 1. Các báo cáo viên nữ tại Hội nghị Toán học Việt-Mỹ 2019 được trao bằng khen của Hội LH Phụ nữ Việt Nam. Từ trái: TS. Vũ Hoàng Linh, TS. Trương Thị Thanh Phượng, ThS. Vũ Thị Hương, và TS. Phạm Thùy Hương. Xem thêm bài trang 1.

© Hội Toán Học Việt Nam

Trang web của Hội Toán học:

<http://www.vms.org.vn>

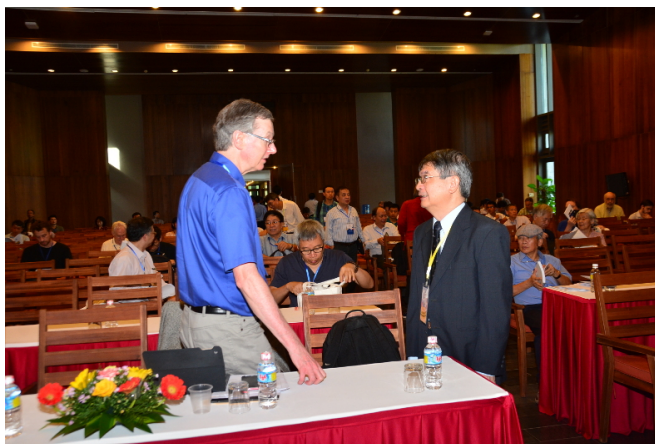
Hội nghị Toán học Việt-Mỹ 2019

Lê Thị Lan Anh⁽¹⁾, Đoàn Trung Cường⁽²⁾, Nguyễn Đăng Hợp⁽³⁾

1. HỘI NGHỊ CHUNG GIỮA HAI HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM VÀ MỸ

Trong bốn ngày từ 10-13/6/2019, có một hoạt động lớn của cộng đồng toán học diễn ra tại thành phố Quy Nhơn, tỉnh Bình Định: Hội nghị Toán học Việt-Mỹ 2019, do Hội Toán học Việt Nam và Hội Toán học Mỹ (American Mathematical Society) đồng tổ chức. Hội nghị diễn ra tại Trung tâm Quốc tế Khoa học và Giáo dục Liên ngành (ICISE) sau gần hai năm thảo luận và tích cực làm việc của

đại diện hai Hội Toán học. Hội nghị do Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán chủ trì tổ chức, đồng phối hợp với Đại học Quy Nhơn và Trung tâm ICISE. Hội nghị được tài trợ kinh phí từ Chương trình trọng điểm Quốc gia phát triển Toán học giai đoạn 2010 đến 2020. Viện Nghiên cứu Dữ liệu lớn thuộc Tập đoàn Vingroup và Trung tâm ICISE hỗ trợ để tạo điều kiện cho các nhà nghiên cứu trẻ trong và ngoài nước tham dự Hội nghị và Diễn đàn Toán trong Công nghiệp.



GS. Brian Boe, đại diện Hội Toán học Mỹ và GS. Ngô Việt Trung, Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam. Nguồn: Viện NCCC về Toán.

Từ lâu, toán học Việt Nam và toán học Mỹ đã có những hợp tác về nghiên cứu và đào tạo, ở mức độ cá nhân và các nhóm nghiên cứu. Nhiều sinh viên Việt Nam được đào tạo tại Mỹ đã trở thành những nhà nghiên cứu chuyên nghiệp và

chuyên gia trong ngành. Việc trao đổi các nhà nghiên cứu giữa hai nước đã dẫn đến những công trình khoa học chung, những hội nghị, trường chuyên biệt... Tuy nhiên, đây là lần đầu tiên một hội nghị chung được tổ chức giữa hai hội toán học, tạo

⁽¹⁾Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán. Email: ltlanh@viasm.edu.vn

⁽²⁾Viện Toán học, Viện Hàn Lâm KHCNVN. Email: dtcuong@math.ac.vn

⁽³⁾Viện Toán học, Viện Hàn Lâm KHCNVN. Email: ngdhop@gmail.com

ra một diễn đàn lớn để các nhà khoa học cùng nhau trao đổi kinh nghiệm, chia sẻ thông tin về những kết quả nghiên cứu hoặc các hướng đi mới trong các chuyên ngành khác nhau. Hội nghị Toán học Việt-Mỹ 2019 là một cơ hội quý báu để thảo luận về khả năng hợp tác chặt chẽ hơn giữa hai nền toán học, tạo sự gắn kết giữa các nhà toán học (đặc biệt là các nhà toán học trẻ) của hai bên. Hội nghị cũng là một dịp tốt để bàn về việc nâng cao vai trò của toán học trong xã hội, và tăng cường mối quan hệ của toán học với các ngành công nghiệp.

Từ 1992, hằng năm, Hội Toán học Mỹ thường tổ chức những sự kiện khoa học chung với hội toán học của một quốc gia hoặc vùng lãnh thổ khác. Ngay trước và sau hội nghị Việt-Mỹ có một số sự kiện chung như thế: Mỹ-Châu Âu-Bồ Đào Nha (Porto, Bồ Đào Nha, 2015), Các nước châu Mỹ (Montreal, Canada, 2017), Mỹ-Trung Quốc (Thượng Hải, Trung Quốc, 2018), Mỹ-Pháp-Châu Âu (Grenoble, Pháp, 2021), Mỹ-Argentina (Buenos Aires, Argentina, 2021). Về phía Hội Toán học Việt Nam, đây là hội nghị chung thứ hai với một hội toán học khác, sau hội nghị chung rất thành công với Hội Toán học Pháp (Huế, 2012).

Hội nghị Toán học Việt-Mỹ đã diễn ra với sự tham gia của khoảng 300 nhà toán học, nghiên cứu sinh, học viên cao học và sinh viên. Theo thống kê của Ban tổ chức, trong số những người tham dự hội nghị có 155 người đang làm việc ở Việt Nam, 69 đang làm việc ở Mỹ, ngoài ra có 77 làm việc ở những nước khác (20 nước) gồm Anh, Ấn Độ, Áo, Australia, Bỉ, Brasil, Canada, Đức, Hà Lan, Hàn Quốc, Hồng Kông, Hungary, Nga, Nhật Bản, Na

Uy, Pháp, Singapore, Tây Ban Nha, Trung Quốc, Các tiểu vương quốc Ả rập thống nhất (UAE). Tất cả các ban chuyên trách và các hoạt động chuyên môn của hội nghị (như Ban Chương trình, Báo cáo mời toàn thể, Đồng trưởng tiểu ban) đều có sự tham gia của những chuyên gia hàng đầu của cả hai phía Mỹ và Việt Nam, được hai bên thống nhất lựa chọn.

Trong suốt bốn ngày Hội nghị, các nhà nghiên cứu trong và ngoài nước đã có thời gian gặp gỡ trò chuyện, chia sẻ về những kiến thức chung trong từng lĩnh vực nghiên cứu cũng như những ý tưởng nghiên cứu mới xuất hiện thời gian gần đây. Hội nghị được coi như một cột mốc quan trọng thắt chặt mối quan hệ hợp tác giữa các nhà nghiên cứu Việt Nam với các đồng nghiệp Mỹ nói riêng, và với các đồng nghiệp trên thế giới nói chung.

2. CHƯƠNG TRÌNH

Chương trình của hội nghị gồm các báo cáo mời toàn thể, báo cáo tại các tiểu ban, báo cáo poster. Ngoài ra Ban tổ chức kết hợp với Đại học Quy Nhơn, Viện Nghiên cứu Dữ liệu lớn tổ chức một diễn đàn về toán công nghiệp tại Đại học Quy Nhơn vào chiều ngày 11/6.

Báo cáo mời toàn thể

Ban tổ chức Hội nghị đã mời 6 chuyên gia đọc báo cáo toàn thể, bao gồm 3 nhà toán học đến từ/đang làm việc ở Mỹ và 3 đến từ/đang làm việc ở Việt Nam.

Các tiểu ban

Hội nghị có tất cả 13 tiểu ban với 200 báo cáo, trong đó có 122 báo cáo của các nhà khoa học nước ngoài hoặc người Việt Nam ở nước ngoài và 78 báo cáo của người Việt Nam ở trong nước.



Tại một phiên báo cáo toàn thể của hội nghị. Nguồn: Viện NCCC về Toán.

Danh sách các tiểu ban với số lượng báo cáo: Nhóm, Biểu diễn và Ứng dụng (14 báo cáo); Hình học và Vật lý (20); Hình học phức và Hệ động lực (17); Hình học đại số số học và các vấn đề liên quan (11); Kỳ dị và Hình học đại số (13); Các phương pháp đồng điều trong Lý thuyết biểu diễn nhóm và Đại số (14); Đại số giao hoán và tương tác với Tổ hợp (18); Tối ưu và Giải tích biến phân (16); Toán học hình thức (8); Lý thuyết phân bố giá trị, Hình học phức, xấp xỉ $\mathbb{R}$ -phẳng và các chủ đề liên quan (11); Toán rời rạc (12); Tôpô Đại số (21); Toán ứng dụng và Toán trong Công nghiệp (25);

Phiên trình bày poster

Ban Tổ chức dành riêng một phiên trình bày poster với mục đích khuyến khích các nhà nghiên cứu trẻ tham gia gặp gỡ, trao đổi với các nhà khoa học giàu kinh nghiệm, tiếp cận các hướng nghiên cứu mới, hiện đại trên thế giới. Ban tổ chức cũng lập một ban giám khảo gồm các nhà khoa học Mỹ và Việt Nam để chấm các báo cáo poster này. Ngày 12/6, tại khu vực sảnh chính của Trung tâm ICISE đã diễn ra phiên trình bày poster với tổng cộng 23 báo cáo của các nhà khoa học trẻ trong và ngoài nước. Các

báo cáo được lựa chọn đều có chất lượng chuyên môn cao, được đầu tư nhiều công sức, thiết kế poster khoa học. Mỗi báo cáo viên có 5 phút để vừa trình bày, vừa trả lời các câu hỏi. Đây là một thử thách không nhỏ, cũng là yếu tố chính đem lại sức hấp dẫn của phiên báo cáo này.

Với tài trợ của Viện Nghiên cứu Dữ liệu lớn, Ban giám khảo đã trao giải poster hay nhất cho ThS. Nguyễn Thương Huyền, ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN. Ba giải poster xuất sắc thuộc về: ThS. Vũ Thị Hương, TS. Lê Xuân Thanh (Viện Toán học, Viện Hàn lâm KHCNVN), TS. Trịnh Duy Tiến (ĐH Sư phạm Hà Nội).

Diễn đàn Toán trong công nghiệp

Chiều ngày 11/6, đã diễn ra Diễn đàn Toán trong công nghiệp tại Trường ĐH Quy Nhơn. Đây là hoạt động do Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán, phối hợp với Trường ĐH Quy Nhơn và Viện Nghiên cứu Dữ liệu lớn thuộc tập đoàn Vingroup tổ chức. Trong nửa đầu, người tham dự được nghe bài giảng đại chúng “Một góc nhìn về Toán trong công nghiệp” của giáo sư John Birge, Trường Kinh doanh Booth, Đại học Chicago. Diễn giả đề cập đến vai trò quan trọng của toán học trong một

loạt các ngành công nghiệp, từ dịch vụ tài chính, hậu cần và vận tải, truyền thông, y tế đến sản xuất, năng lượng, thực phẩm và nông nghiệp, hóa chất, hàng không vũ trụ, xây dựng, khai thác mỏ và phương tiện truyền thông. Ông phân tích kỹ về việc mô hình hoá toán học và sử dụng các chuyên ngành toán học khác nhau

trong các lĩnh vực Tài chính, Thiết kế thử nghiệm lâm sàng về thuốc (y tế) và Thị trường năng lượng. Người tham dự diễn đàn cũng được nghe một báo cáo rất thú vị của GS. Brian Denton, trưởng khoa Kỹ thuật Công nghiệp và Vận trù, Đại học Michigan (Ann Arbor), về chủ đề “Vận trù học: Toán ứng dụng vì lợi ích chung”.



TS. Nguyễn Đặng Hồ Hải (ĐH Khoa học, ĐH Huế), báo cáo tại tiểu ban Tôpô Đại số.
Nguồn: Viện NCCC về Toán.

Phần hai của diễn đàn là thảo luận bàn tròn về những cơ hội cũng như vướng mắc trong việc ứng dụng toán trong tài chính, xây dựng, truyền thông và trong công tác đào tạo ứng dụng toán học ở Việt Nam. Người dẫn chương trình là TS. Vũ Hà Văn (ĐH Yale). Khách mời của phần thảo luận bàn tròn gồm các vị sau đây: TS. Nguyễn Hoàng Hải (ĐHQG Hà Nội), TS. Nguyễn Xuân Hùng (ĐH Công nghệ Tp. HCM), ông Nguyễn Vũ Lưu (Tập đoàn Viettel), và TS. Đỗ Ngọc Quỳnh (Ngân hàng BIDV).

Giải thưởng cho các nhà khoa học nữ

Tại Hội nghị lần này, 34 nhà khoa học nữ đã tham gia báo cáo, trong đó có 20 người Việt đang làm việc ở trong nước, 6 người Việt đang làm việc/học tập ở nước ngoài, và 8 người nước ngoài. Ban

tổ chức đã phối hợp với Hội LH Phụ nữ Việt Nam trao phần thưởng cho các nhà khoa học nữ người Việt dưới 35 tuổi đang làm việc trong nước, có thành tích nghiên cứu khoa học xuất sắc, và có báo cáo tại Hội nghị. Ba ứng cử viên được lựa chọn để Hội LH Phụ nữ Việt Nam khen thưởng là TS. Phạm Thùy Hương (Khoa Toán, ĐH Quy Nhơn), TS. Trương Thị Thanh Phượng (Khoa Kinh tế và Kế toán, ĐH Quy Nhơn), và ThS. Vũ Thị Hương (Viện Toán học).

Triển lãm sách

Song song với các hoạt động khoa học của hội nghị Việt Mỹ, Nhà xuất bản Springer, Nhà xuất bản Hội Toán học Mỹ và Công ty giáo dục Sputnik đã mang một số sách mới xuất bản đến triển lãm trong thời gian diễn ra hội nghị. Sau khi

kết thúc hội nghị, một số sách đã được tặng cho thư viện của Khoa Toán, ĐH Quy Nhơn.

3. CÁC BÁO CÁO MỜI TOÀN THỂ

Sau đây là thông tin về sáu nhà toán học đã đọc báo cáo mời toàn thể và bản dịch tiếng Việt của tóm tắt các báo cáo đó (theo thứ tự trình bày tại hội nghị).

1. Lê Tuấn Hoa (Viện Toán học, Viện Hàn Lâm KHCNVN)

"Về độ phức tạp của các hệ đa thức"

(On the complexity of polynomial systems)

Tóm tắt: Cho một hệ các đa thức với hệ số trong một trường. Có rất nhiều bất biến đo lường độ phức tạp của một hệ như vậy. Trong bài giảng này, các bất biến sau sẽ được xét đến: chiều, độ sâu, bậc sinh cực đại, bậc cực đại của một cơ sở Gröbner, giải tự do tối thiểu và chỉ số chính quy Castelnuovo–Mumford. Tôi sẽ trình bày tóm lược các mối liên hệ giữa các bất biến nói trên, và một số chặn cũ và mới cho các bất biến đó. Một số kết quả về sự ổn định của độ sâu và chỉ số chính quy Castelnuovo–Mumford sẽ được thảo luận. Đặc biệt, bài giảng này sẽ giải thích một số liên hệ giữa đại số giao hoán với các lĩnh vực toán học khác, như tổ hợp và quy hoạch nguyên.

2. Nguyễn Tiến Dũng (Viện Toán học Toulouse, Pháp)

"Một định luật bảo toàn phổ quát của các hệ động lực"

(On a universal conservation law in dynamics)

Tóm tắt: Mặc dù các hệ động lực "tổng quát" là không khả tích và có thể hành xử nhiễu loạn, một lượng lớn các hệ động lực quan sát được trong thực tế, từ hệ mặt trời đến chuyển động bên trong các hạt

nguyên tử là (gần như) tuần hoàn. Lý do là vì chuyển động hầu tuần hoàn, khác với các loại chuyển động khác, có độ bền vững rất cao. Chính sự sống của chúng ta cũng có được do sự ổn định của tính hầu tuần hoàn. Trong toán học, sự hầu tuần hoàn của một hệ suy ra sự tồn tại của một tác động xuyên bảo toàn hệ. Các tác động xuyên tự nhiên tồn tại ngay cả khi việc quan sát chúng có vẻ không hiển nhiên. Ví dụ, phép chuẩn hóa Poincaré–Birkhoff một trường vector bất kỳ cũng tương đương với phép tuyến tính hóa một tác động xuyên liên kết nội tại của trường đó.

Trong bài giảng này, tôi muốn giải thích luật bảo toàn phổ quát sau và tính hữu dụng của nó trong nghiên cứu các hệ động lực, đặc biệt là cho các vấn đề liên quan đến việc rút gọn, chuẩn hóa, đến các biến tác động-lực: *Bất cứ thứ gì được bảo toàn bởi một hệ động lực thì cũng được bảo toàn bởi các tác động xuyên liên kết với hệ động lực đó.* Hệ động lực được xét đến ở đây có thể là cổ điển, lượng tử, hoặc ngẫu nhiên. Những thứ được bảo toàn có thể là một trường vector, một toán tử vi phân, một cấu trúc Dirac, vân vân.

3. Robert Guralnick (Đại học Nam California, Mỹ)

"Hoán vị không có điểm bất động và ứng dụng"

(Fixed point free permutations and applications)

Tóm tắt: Một hoán vị gọi là một phép xáo trộn (derangement) hay không có điểm bất động nếu hoán vị đó không cố định một phần tử nào. Một kết quả kinh điển của Jordan nói rằng trong một nhóm với tác động bắc cầu lên một tập hữu hạn có nhiều hơn một phần tử, luôn có thể tìm được một phần tử không có điểm bất động. Chúng tôi sẽ thảo luận những kết

quả gần đây về việc đếm số các phần tử không có điểm bất động như vậy, và các áp dụng trong số học, ánh xạ giữa các đường cong xạ ảnh trơn, đa thức, và các đại số chia.

4. Nguyễn Đông Yên (Viện Toán học, Viện Hàn Lâm KHCNVN)

"Tập tiếp xúc và dưới vi phân bậc hai"

(Second-order tangent sets and second-order subdifferentials)

Tóm tắt: Tập tiếp xúc cấp hai và dưới vi phân bậc hai là các khái niệm tương đối mới trong giải tích biến phân và lý thuyết tối ưu. Tôi sẽ giải thích một cách sơ cấp ý nghĩa của hai khái niệm này và ứng dụng của chúng trong: tìm điều kiện cần và đủ tối ưu cho các bài toán tối ưu tổng quát; một số kết quả về tính bền vững và độ nhạy của các bài toán tối ưu và cân bằng; đặc trưng tập lồi và hàm lồi; các định lý hội tụ của các phương pháp số. Một số bài toán mở sẽ được phát biểu.

5. Henry Cohn (Phòng nghiên cứu Microsoft, Mỹ)

"Bài toán xếp cầu, nội suy Fourier, và trạng thái cơ bản trong không gian 8 và 24 chiều"

(Sphere packing, Fourier interpolation, and ground states in 8 and 24 dimensions)

Tóm tắt: Các hạt trong không gian Euclid phải sắp xếp như thế nào để tối thiểu hóa thể năng giữa chúng? Trong trường hợp không gian có 8 hoặc 24 chiều, câu trả lời đơn giản đến mức kinh ngạc: cấu hình tối ưu không phụ thuộc vào hàm thể năng đối với một lớp rất rộng các hàm thể năng đầy. (Ngược lại, trường hợp không gian 3 chiều phức tạp hơn rất nhiều.) Hiện tượng này được gọi là *tối ưu phổ quát*, và nó khái quát hóa điều kiện tối ưu trong việc sắp xếp các khối cầu. Trong bài giảng này, chúng tôi sẽ trình bày cách

thiết lập tính chất tối ưu phổ quát, qua đó cung cấp những lời giải đầu tiên cho bài toán tìm cấu hình tối ưu phổ quát trong chiều lớn hơn một. Chúng minh sử dụng chặn quy hoạch tuyến tính chặt cho năng lượng. Để xây dựng các hàm trung gian tối ưu giúp đạt được các chặn đó, chúng tôi chứng minh một định lý nội suy mới, có thể ứng dụng được trong những hoàn cảnh khác. Định lý này khôi phục một hàm Schwartz bán kính f từ các giá trị của f , đạo hàm theo bán kính của f , và biến đổi Fourier của nó tại bán kính $\sqrt{2n}$, trong đó n nhận giá trị nguyên ít nhất 1 trong chiều 8, và ít nhất 2 trong chiều 24. Để chứng minh định lý này, chúng tôi xây dựng một cơ sở nội suy sử dụng biến đổi tích phân của các dạng hầu modular, tổng quát hóa công trình của Viazovska về sắp xếp các khối cầu, và đặt công trình đó vào bối cảnh của một lý thuyết trừu tượng hơn.

6. Zhiwei Yun (Viện Công nghệ Massachusetts, Mỹ)

"Nội soi của các phạm trù Hecke và bó đặc trưng"

(Endoscopy for Hecke categories and character sheaves)

Tóm tắt: Các phạm trù Hecke là hiện thân hình học của các đại số Hecke, và chúng có vai trò quan trọng trong việc phân loại các biểu diễn bất khả quy của các nhóm hữu hạn kiểu Lie. Chúng tôi xét một phiên bản của phạm trù Hecke cho một nhóm reductive G với đơn đạo dưới tác động trái và phải của xuyên cực đại nhận giá trị cho trước. Chúng tôi chứng minh rằng phạm trù nửa nhóm này về cơ bản có thể đồng nhất với phạm trù Hecke thông thường (với đơn đạo xuyên tâm thường) của một nhóm nội soi H của G , trong đó H là một nhóm reductive chiều nhỏ hơn G , có chung một xuyên cực đại với G , nhưng không nhất thiết phải là

một nhóm con của G . Một hệ quả là bó đặc trưng của G và H có liên hệ chặt chẽ

với nhau. Đây là công trình chung với G. Lusztig.

Một chuyến thăm toán học đến Hà Nội⁽¹⁾

Neal Koblitz

Bài báo này, được viết vào tháng 9 năm 1978, cuối cùng cũng xuất hiện sau một số trì hoãn không mong muốn. Trong khoảng thời gian đó, một chuỗi các sự kiện đã xảy ra ở Đông Nam Á – cuộc xâm lược của Trung Quốc, cuộc di dân tị nạn, chiến tranh ở Campuchia – chắc chắn sẽ ảnh hưởng đến tốc độ hồi phục kinh tế sau chiến tranh và sự phát triển công nghệ của Việt Nam. Nhưng bài báo này đương nhiên không thể bàn tới những vấn đề kinh tế hay chính trị đã trở thành tâm điểm của dư luận về Việt Nam trong năm qua.

Sau khi đi qua lăng Hồ Chủ tịch và ngôi chùa hình bông sen mang tên chùa Một Cột, tôi nhìn lại vào tấm bản đồ Hà Nội của mình và địa chỉ của Viện Toán học: 208-D Đội Cấn. Trong chốc lát, khi đã bỏ lại sau lưng những khu phố với những đại lộ, đại sứ quán, những tượng đài, tòa nhà chính phủ, tôi dừng lại trên một khu phố hẹp và nườm nượp những chiếc xe đạp, trẻ em, những con gà, vũng nước, những người tiểu thương buôn bán rau quả. Dù tấm bản đồ chỉ đường ghi rõ là phố Đội Cấn, nhưng tôi bắt đầu nghi ngờ việc có thể tìm thấy ở đây Viện Toán học – nơi mà vài chục cựu sinh viên của Nevanlinna, Grothendieck, Hatori, Babbitt, Harish-Chandra, Kirillov, Manin, Sinai, Oleinik, Markov, Fomenko, Gelfond, Sukharov, Shilov, Kurosh, Efimov, Ivanov, làm việc? Nhưng đi tiếp khoảng một cây số, tôi bước vào một lối dành cho xe vào nhà có số 208-D và nhìn

thấy một dãy các ngôi nhà một tầng xây bằng đá của Viện Toán học.

Tôi và vợ tôi, Ann, đã đến Hà Nội trước đó một ngày, ngày 28 tháng 6 năm 1978, trên chuyến bay từ Moscow của hãng Aeroflot (chuyến bay này chỉ phục vụ hai lần/tuần). Moscow là nơi chúng tôi làm việc suốt học kỳ xuân trong chương trình trao đổi giữa hai viện hàn lâm khoa học của Mỹ và Liên bang Xô viết. Chúng tôi xin được thị thực Việt Nam tại Đại sứ quán Việt Nam ở Moscow. Do một số nhầm lẫn trong thông báo về thời gian đến của chúng tôi, Viện Toán học không hề biết chúng tôi đã đến Hà Nội cho đến khi chúng tôi có mặt ở viện sáng ngày hôm sau.

Trong khi Ann và tôi đang chờ tại sân bay quốc tế Nội Bài (tại đây chỉ có một, hai chuyến bay mỗi ngày), một vị có vẻ như là quản lý sân bay đã tìm kiếm một người có thể đưa chúng tôi vào nội thành. Những khách nước ngoài khác đều đã có người đón và tất cả những sinh viên Việt Nam trên cùng chuyến bay đã lên một chiếc xe tải để vào thành phố. Cuối cùng, nhân việc một đoàn khách Thụy Sĩ của Bộ Công nghiệp nhẹ bị lỡ mất chuyến bay, một vị đại diện Bộ Công nghiệp nhẹ đã đồng ý đưa chúng tôi vào nội thành nếu chúng tôi có thể chờ lái xe của ông thay xong bánh xe. Sau khi đưa chúng tôi vào Hà Nội (chuyến đi mất hai giờ vì việc xây dựng đường xá và ùn tắc giao thông

⁽¹⁾Nguyên bản: *A mathematical visit to Hanoi*, Math. Intell., March 1979, Vol. 2, No. 1, 38–42.

trên một cây cầu dẫn vào nội thành với một làn đường duy nhất), vị viên chức của bộ đó hào phóng mời chúng tôi ở lại phòng khách sạn đã được đặt cho những

người khách Thụy Sĩ, cho đến khi liên lạc được với Viện Toán học. Chúng tôi rất đỗi ngạc nhiên trước sự tiếp đón tình cảm và không chút câu nệ thủ tục đó.



Neal Koblitz (Ảnh: Mary Levin, Đại học Washington).

Đến Viện Toán học, tôi được biết rằng viện trưởng, giáo sư Lê Văn Thiêm, người đã giúp đỡ chúng tôi rất nhiều trong việc xin thị thực vào Việt Nam, vẫn đang đi công tác ở Thành phố Hồ Chí Minh (Sài Gòn cũ). Người sẽ đón tiếp chúng tôi trong cả ba tuần ở Hà Nội là trợ lý của ông Thiêm, Vương Ngọc Châu, một người làm toán ứng dụng trẻ tuổi. Anh Châu đến cùng một người bạn, đồng nghiệp của tôi là Hà Huy Khoái, người cũng đã làm việc với Manin giống như tôi khi còn ở Moscow. Khoái vừa trở về Việt Nam sau khi hoàn thành một luận văn thú vị trong lĩnh vực của tôi, giải tích p -adic. Khoái và một cựu sinh viên của Kirillov, Đỗ Ngọc Diệp, đang lên kế hoạch tổ chức một seminar về giải tích p -adic, và đề nghị tôi giảng bài trong những buổi đầu. Tôi đã trình bày sáu báo cáo, mỗi bài ba tiếng, tập trung chủ yếu vào những nghiên cứu gần đây về L -hàm và hàm Gamma p -adic, và sau đó trình bày một bài tổng quan dài hai tiếng về một số kết quả mới trong lý thuyết số đại số. Tôi giảng bài bằng tiếng Nga, Khoái giúp tôi dịch sang tiếng Việt. (Ở Viện Toán học, các ngôn ngữ Châu

Âu có nhiều người thông thạo nhất theo thứ tự là tiếng Nga, tiếng Anh, và tiếng Pháp.)

Có khoảng bảy, tám nhà toán học trẻ đã lắng nghe toàn bộ các bài giảng 18 tiếng của tôi. Họ giúp nhau theo dõi chi tiết bài giảng và đã đặt ra một số câu hỏi có chiều sâu xoay quanh bài nói. Đáng ngạc nhiên là ở Việt Nam, không chỉ có *một ai đó*, mà có đến bảy, tám người, quan tâm đến một ngành toán học tương đối bí hiểm, chỉ có "ứng dụng" trong lý thuyết số và hình học đại số. Giải tích p -adic chưa bao giờ giúp bất cứ ai xây dựng nhà máy hay cơ giới hóa nông nghiệp!

Đúng là người Việt Nam tập trung chủ yếu vào các ngành toán có ứng dụng thực tế. Những ngành trọng điểm được nêu ra tại Hội nghị Toán học Toàn quốc năm 1971 gồm có:

- (1) khoa học máy tính, lý thuyết thông tin, giải tích số, toán rời rạc (các nhà nghiên cứu thuộc các lĩnh vực này của Việt Nam gồm có Phan Đình Diệu, Phạm Trà Ân, Tạ Văn Đĩnh, Phan Văn Hạp);

- (2) giải tích toán học, tối ưu hóa (Hoàng Tuy, Bùi Công Cường, Phạm Hữu Sách);
- (3) xác suất thống kê (Trần Vinh Hiển, Nguyễn Văn Hộ, Hoàng Hữu Như);
- (4) giải tích, phương trình đạo hàm riêng, vật lý toán (Lê Văn Thiêm, Phan Văn Chương, Đỗ Hồng Tân, Nguyễn Đình Trí, Nguyễn Thừa Hợp, Phan Đức Chính, Hoàng Hữu Đường, Đặng Đình Áng, Tôn Thất Long);
- (5) tôpô, hình học đại số (Hoàng Xuân Sinh, Đoàn Quỳnh, Lại Đức Thịnh, Nguyễn Văn Khuê, Trần Văn Hạo, Huỳnh Mùi, Phạm Ngọc Thao, Nguyễn Hữu Anh).

Tuy nhiên người ta không áp đặt máy móc các mục tiêu trọng điểm này: những hướng nghiên cứu hiện có dường như cũng phụ thuộc vào việc những nhà toán học nước ngoài nào đã đến thăm, hay những nhà toán học Xô Viết và Đông Âu nào đã hướng dẫn luận án phó tiến sĩ ⁽²⁾ cho các sinh viên được cử đi du học. Minh chứng cho điều này có các lĩnh vực như đại số, nhóm Lie, lý thuyết biểu diễn, lý thuyết số, logic hình thức, tuy không nằm trong danh sách ưu tiên kể trên nhưng xuất hiện trong các seminar và các bài báo nghiên cứu.

Một nguồn ảnh hưởng quan trọng nữa đối với sự phát triển của toán học Việt Nam là những nhà toán học người Việt làm việc ở nước ngoài nhưng thường xuyên ghé thăm Hà Nội (phần lớn ở Pháp và Canada). Lĩnh vực nghiên cứu của họ bao gồm: xác suất (Bùi Trọng Liễu, Nguyễn Xuân Lộc), hình học đại số và hình học giải tích (Lê Dũng Tráng, F. Phạm), giải tích phức (Nguyễn Thanh Vân), lý thuyết thông tin (Hoàng Hữu Tuệ), toán kinh tế (Nguyễn Mạnh Hùng, Hoàng Hải Học).

⁽²⁾Tương đương với bằng tiến sĩ ngày nay (BBT).

Sau khi thảo luận về kế hoạch giảng bài của tôi, Châu và Khoái đưa chúng tôi đến khách sạn Thắng Lợi, nơi Viện Toán đã đặt phòng cho chúng tôi. Khách sạn Thắng Lợi là một khách sạn sang trọng hiện đại, nằm ở ngoại ô của thành phố, nhô ra Hồ Tây xinh đẹp. Từ ban công và hiên tầng nắng chúng tôi có thể thấy những chiếc thuyền thúng đánh cá, làng mạc bên hồ, những thảm thực vật tươi tốt, những rừng núi đồi xa xa – tất cả tạo nên một bầu không khí yên bình cho những du khách đến để nghỉ ngơi.

Tuy nhiên, với chúng tôi khách sạn này có một nhược điểm nghiêm trọng: khách sạn bị cô lập khỏi thành phố và cuộc sống của người Việt, nó là một môi trường giả tạo dành riêng cho người ngoại quốc. Vì vậy sau vài ngày chúng tôi xin chuyển nơi ở và được chuyển đến khách sạn Hòa Bình, bình dân hơn nhưng nằm ở trung tâm thành phố. Khách sạn này tọa lạc ở một con phố tràn đầy sức sống. Chúng tôi đi ngủ khi khu phố lắng xuống, sau chín giờ tối, và thức dậy vào năm giờ sáng giống như bao người Việt khác. Một tối chúng tôi phải thức đến tận mười một giờ vì một nhóm trẻ em tràn đầy hứng khởi sau một giờ học nhạc đã hát đi hát lại bài "Guantanamo".

Cuộc sống ở khách sạn Hoà Bình cho phép chúng tôi được tiếp cận cuộc sống hàng ngày của người Hà Nội như mong đợi. Tuy nhiên, hầu hết những người nước ngoài ở Hà Nội sống trong một thế giới hoàn toàn khác với người bản địa. Không ai yêu cầu người ngoại quốc phải từ bỏ mức sống quen thuộc của mình; thức ăn và chỗ ở của họ khác xa thức ăn và chỗ ở của người Việt. Tất nhiên, người nước ngoài cũng phải chi trả cho các đặc quyền mà họ được hưởng với giá cả rất vừa phải so với các nước phương Tây, nhưng lại

cực kỳ xa xỉ đối với người Việt Nam. Ví dụ, phòng đôi máy lạnh của chúng tôi ở khách sạn Thắng Lợi giá 65 đồng (21 đô la) một đêm, tương đương với mức lương hàng tháng của một kỹ sư.

Trong thời gian ở khách sạn Hòa Bình, Ann và tôi thường hay đi bộ để khám phá những vùng lân cận khác nhau của thành phố hoặc đi quanh thành phố trên những chiếc tàu điện đẹp như trong tranh vẽ, chậm rãi, và đừng đưa nhè nhẹ (chỉ với $5 \text{ xu} = 1\frac{1}{2} \text{ cents}$). Chúng tôi không có xe đạp – phương tiện di chuyển phổ biến của người Việt (chúng tôi không bao giờ tưởng tượng được rằng xe đạp cũng có thể gây tắc đường cho đến khi đến Hà Nội!), còn nếu lúc nào cũng thuê ô tô và lái xe chúng tôi sẽ bỏ lỡ những ấn tượng căn bản nhất về thành phố này (và hiển nhiên sẽ phải trả số tiền lớn hơn 5 xu rất nhiều).

Ta có thể có ấn tượng gì về cuộc sống ở Việt Nam? Tất nhiên, Việt Nam là một nước rất nghèo. Không có gì ngạc nhiên là mức độ tiện nghi, trình độ công nghệ, sức sản xuất của thị trường quần áo, thực phẩm, hàng tiêu dùng, là rất thấp so với các nước phương Tây. Nhưng sẽ có lý hơn khi so sánh Việt Nam với các nước nghèo khác ở châu Á, châu Phi, Mỹ Latinh. Chúng tôi không thấy một bằng chứng nào về nạn đói. Không thấy những đứa trẻ chân tay teo tóp và bụng ỏng vì thiếu ăn. Không thấy người ăn xin trên đường phố, không có những kẻ sống vất vưởng hoặc người thất nghiệp. Người Việt cho ta ấn tượng về những con người bận rộn và chăm chỉ. Chúng tôi có chứng kiến một số trường hợp mắc bệnh da và mắt, nhưng đó không phải các bệnh ở quy mô lớn. Trong điều kiện của một nước nghèo với khí hậu nhiệt đới, Việt Nam có chất lượng vệ sinh khá cao, với việc tái chế chất thải hữu cơ và hệ thống cấp thoát

nước, xử lý nước thải hiệu quả. Các thông tin thiết yếu về sức khỏe và vệ sinh cá nhân được phổ biến rất tốt cho người dân. Không chỉ ở trong các khách sạn cho người nước ngoài, mà ở *khắp mọi nơi* mọi người đều biết đun sôi nước trước khi uống.

Hà Nội có một số lượng lớn các hiệu sách, sạp báo, các loại trường học khác nhau trong hầu khắp thành phố. Điều này cho thấy rằng một trình độ dân trí cao đến mức đáng ngạc nhiên. Rõ ràng là nếu sử dụng những tiêu chuẩn cơ bản về một cuộc sống chất lượng – không bị đói, không bệnh tật, biết đọc biết viết – Việt Nam có thể so sánh được với bất kỳ quốc gia nào với cùng trình độ phát triển kinh tế.

Các nhà toán học Việt Nam sống ra sao? Ở hầu hết các nước nghèo, giới trí thức thuộc về một tầng lớp có đặc quyền cao: ví dụ các nhà nghiên cứu tại Viện Tata có cuộc sống tốt hơn hẳn so với mức trung bình của người dân Ấn Độ. Tình thế hoàn toàn khác ở Việt Nam, nơi các nhà toán học sống gần giống như những người dân thường. Mức lương của một phó tiến sĩ toán là 90 đồng/tháng (30 đô la). Đó có thể là mức lương thấp nhất được trả cho một người làm toán trên thế giới.

Nhưng sự trọng thị của người Việt đối với giới trí thức quả là đáng kinh ngạc. Xác suất một người Việt bình thường biết đến Lê Văn Thiêm cũng khoảng bằng xác suất một người Mỹ bình thường biết đến những ngôi sao điện ảnh hay những vận động viên nổi tiếng. Một hôm, khi Ann đang ở trong phòng của khách sạn Thắng Lợi, một số nhân viên dọn phòng đến trò chuyện với cô, nửa bằng tiếng Anh, nửa bằng tiếng Việt (Ann và tôi có một vốn tiếng Việt sơ đẳng). Khi biết tôi là giáo sư ở Mỹ, các nhân viên đó đã ôm chầm

lấy và chúc mừng Ann vì cô có một người chồng làm một công việc cao quý đến như vậy. Do đó, dù có thể thấy rất khổ sở nếu phải sống và làm việc trong điều kiện thiếu thốn như các nhà toán học Việt Nam, các nhà toán học phương Tây có lý do để ghen tỵ với các đồng nghiệp Việt Nam vì sự tôn trọng họ nhận được từ những người dân Việt.

Viện Toán học có khoảng năm mươi nghiên cứu viên, hầu hết đều làm luận án ở nước ngoài; thực tế một phần đáng kể những người quay trở về Việt Nam sau khi có bằng phó tiến sĩ trở thành nghiên cứu viên của viện. Tuy không phải giảng dạy, mỗi năm họ phải báo cáo về tiến độ nghiên cứu của mình. Một số người tham gia giảng dạy ở đại học, và được trả lương tỷ lệ thuận với thời gian đứng lớp. (Viện Toán nhất định đề nghị trả tiền cho 20 giờ giảng bài của tôi, với mức thù lao rất hào phóng theo tiêu chuẩn Việt Nam: 150 đồng tất cả). Điều đáng nói là Việt Nam sẵn sàng tài trợ cho một viện có quy mô lớn như vậy, với nhiều nghiên cứu viên không tham gia giảng dạy, dù chỉ với mức lương thấp 90 đồng/tháng.

Việc tôn trọng giới trí thức có một phần nguyên nhân truyền thống. Một trong những điểm đến thu hút khách du lịch của Hà Nội là Văn Miếu – Quốc Tử Giám, trường đại học cổ của Việt Nam được thành lập vào năm 1076. Ở đó, chúng ta có thể thấy 82 bia đá lớn, mỗi bia có khắc tên những người đỗ đầu trong các kỳ thi do triều đình phong kiến tổ chức, từ năm 1442 đến năm 1779, để chọn ra những tiến sĩ văn chương. Bia tưởng niệm năm 1463 có tên của Lương Thế Vinh, người không chỉ nổi tiếng về tài văn thơ, mà còn là một trong những nhà hình học trứ danh của Việt Nam thời xa xưa.

Những truyền thống đó phần nào giải thích tại sao, trong số các sinh viên đến từ các nước đang phát triển đến học tập tại Moscow, sinh viên Việt Nam thường là những người chăm chỉ và thành công nhất. Một nhà toán học trẻ người Việt từ Moscow trở về sau khi hoàn thành thành luận án phó tiến sĩ có thể cảm thấy hân hoan như những tiến sĩ của các kỳ thi của triều đình trong lịch sử. (Trong thực tế, dường như rất nhiều thành viên của Viện Toán được sinh ra trong một gia đình có nhiều thế hệ trí thức, có lẽ trong vài trường hợp họ còn là con cháu của các vị tiến sĩ của các kỳ thi của triều đình ngày xưa).

Những người làm toán được coi trọng cũng còn vì một lý do thực tế hơn. Người Việt Nam đang dồn sức để phát triển khoa học và công nghệ với sự quyết tâm và nhiệt huyết họ đã dành cho ba thập kỷ chiến tranh giành độc lập. Người chỉ đạo chính cho công cuộc phát triển khoa học công nghệ này không ai khác chính là đại tướng Võ Nguyên Giáp, người đã lãnh đạo quân đội Việt Nam giành chiến thắng trước Pháp và Mỹ.

Tâm thế hiện tại là tái thiết và hòa giải. Người đón tiếp chúng tôi – Châu – kể rằng anh và Lê Văn Thiêm đã vào Sài Gòn ngay khi chiến tranh kết thúc và gặp gỡ các thành viên trong khoa toán tại một trường đại học trong đó. Những nhà toán học miền Nam Việt Nam lúc đầu rất sợ bị trừng phạt, hay chí ít là bị chỉ trích, vì họ đã làm việc cho chế độ cũ. Nhưng hai nhà toán học Hà Nội chỉ đơn thuần hỏi han về tình hình của nền toán học miền Nam. Sau khi biết được rằng thậm chí không có một buổi seminar toán học nào ở Sài Gòn, hai nhà toán học Hà Nội rất thất vọng và xác định cần phải làm

⁽³⁾Hiện nay ta biết ngay sau 1975, không phải ở lĩnh vực nào người miền Nam ở Sài Gòn cũng cần được giúp đỡ để "nâng cao trình độ". Ví dụ, về giáo dục miền Nam trước 1975, xem bài "Mấy cảm nhận

việc với những người làm toán miền Nam để nâng cao trình độ của họ lên.⁽³⁾

Tôi đã không đến thăm miền Nam. Tại thời điểm hiện tại hầu hết các công trình toán lý thuyết đều được thực hiện ở Hà Nội. Nhưng dần dần các chuyên gia đang chuyển đến các trường đại học ở thành phố Hồ Chí Minh và Huế (ví dụ, một số nhà toán học trẻ xuất thân từ các nơi đó), để phát triển chúng thành các trung tâm nghiên cứu và đào tạo.

Tình thần hoà giải không chỉ giới hạn trong mối quan hệ với miền Nam. Người Việt Nam mong muốn được cải thiện quan hệ với các nước phương Tây, đặc biệt với Hoa Kỳ. Mong muốn bình thường hoá quan hệ với Mỹ không chỉ giới hạn ở mặt ngoại giao. Ann và tôi chưa bao giờ gặp phải những phản ứng tiêu cực nào từ người Việt Nam trước việc chúng tôi là người Mỹ. Theo chỗ chúng tôi đánh giá, người Việt Nam không có bất kỳ sự thù hận *chủng tộc* nào đối với người Mỹ dù rằng Mỹ và Việt Nam đã trải qua một cuộc chiến tranh dài. (Trong một cuộc thảo luận về vấn đề này với những người đón tiếp mình, tôi đã nêu ra giả thuyết rằng phản ứng của người Việt trong Nam có thể sẽ khác, vì miền Nam từng là thuộc địa của Mỹ, có thể việc nhìn thấy một người Mỹ hoặc nghe một giọng Mỹ sẽ gọi lên những ký ức đau đớn. Nhưng những người đón tiếp chúng tôi khẳng định rằng không có chuyện đó.) Trong chuyến thăm Moscow, chúng tôi đã chứng kiến việc hơn ba mươi năm sau khi Chiến tranh Thế giới thứ hai kết thúc, nhiều người Nga vẫn còn giữ một mối ác cảm sâu sắc đối với bất cứ thứ gì liên quan tới nước Đức. Một người Đức đến thăm Moscow vào cuối những năm 1940 sẽ không cảm

thấy thoải mái và được chào đón như chúng tôi trong chuyến thăm Hà Nội.

Tình hữu nghị và sự trợ giúp từ các nguồn mới là đặc biệt quan trọng đối với Việt Nam trong lúc này vì Trung Quốc đã cắt viện trợ cho Việt Nam. Ví dụ trước đây Viện Toán học đã từng nhận được một số lượng lớn các tạp chí phương Tây (Bulletin AMS, Math Reviews, Pacific J. Math., Acta Math., J. Reine Angew. Math., Annale Inst. Fourier, J. Funct. Anal.), có thể đã được in lại một cách rẻ mạt từ Trung Quốc, bất chấp các thỏa thuận quốc tế về bản quyền. Một năm trước, Trung Quốc đã ngừng gửi tạp chí cho Việt Nam. Vì Viện Toán học không có tiền, nên nguồn duy nhất để có thể có được những tạp chí tôi cần thiết ấy là từ các nhà xuất bản và các nhà toán học giàu thiện chí ở phương Tây.

Người Việt rất lo lắng về mối quan hệ đang ngày một xấu đi với người láng giềng phương Bắc hùng mạnh. Họ có một ý thức mạnh mẽ về lịch sử, và tổ cáo người Trung Quốc đã cai trị và bóc lột họ hơn một ngàn năm (từ năm 111 trước công nguyên - năm 938). Hai Bà Trưng lãnh đạo cuộc nổi dậy chống lại quân xâm lược Trung Quốc các năm 40-43 là những vị anh hùng dân tộc: tên của họ được dùng để đặt tên cho một trong những ngôi chùa chính và một con đường ở trung tâm Hà Nội. Những thế kỷ gần đây Trung Quốc thì thoảng lại thể hiện âm mưu bành trướng của mình. Sau khi đưa Ann và tôi đến Văn Miếu, Lê Văn Thiêm và Khoái dẫn chúng tôi đến gò Đống Đa, nơi diễn ra trận đánh lịch sử năm 1789, quét sạch quân xâm lược Trung Quốc khỏi kinh thành Thăng Long.

Sự đề phòng với Trung Quốc chắc chắn là lý do chính trong việc Việt Nam thất

về sự khác biệt giữa giáo dục miền Nam và giáo dục miền Bắc" của Vương Trí Nhàn, Tạp chí Nghiên cứu và Phát triển, số 7-8 (114-115), 2014, trang 259-267. (BBT)

chặt mối quan hệ với Liên bang Xô Viết. Một hôm Châu và Khoái nói với tôi rằng Việt Nam đã gia nhập Comecon (Hội đồng Tương trợ Kinh tế của Khối Xã hội Chủ nghĩa), Việt Nam cùng với Cuba và Mông Cổ là những thành viên duy nhất không thuộc châu Âu. Châu và Khoái rất hài lòng với những tin tức này, bởi vì nó sẽ giúp thúc đẩy sự phát triển của khoa học và kinh tế Việt Nam.

Thái độ chính trị phổ biến là ủng hộ Liên Xô mạnh mẽ. Khi đi dạo quanh Hà Nội, chúng tôi làm người dân rất tò mò (vì người nước ngoài rất hiếm khi đi bộ ở Hà Nội), và có lẽ họ giả định chúng tôi là người Nga. Đặc biệt trẻ em sẽ mỉm cười khi thấy chúng tôi đến gần và chào to “Chào các Liên Xô!”.

Một hôm, khi Ann và tôi đang nghỉ ngơi trong bóng râm ở công viên sau khi đi bộ dưới cái nóng trên 32°C và độ ẩm 90% của tháng Bảy, vài em bé tiến lại gần và khoe với chúng tôi những từ tiếng Nga các em biết. Các em nói lại nhiều lần *Eto mama! Pora!* - nghĩa là “Mẹ đến rồi! Tổ phải đi đây!”. Chắc chúng đang bắt chước lời những người bạn Nga nhỏ tuổi vẫn nói mỗi khi chào tạm biệt. (Mặc dù bố mẹ của những em này và bố mẹ của những trẻ em Nga sống trong hai thế giới khác nhau, với không nhiều liên hệ, nhưng khi chơi cùng nhau trẻ em vẫn thường vượt qua những rào cản văn hóa).

Sự trợ giúp của Liên Xô, tất nhiên, có quy mô lớn. Khu tổ hợp nghiên cứu do Liên Xô xây dựng ở ngoại thành Hà Nội, gồm các viện vật lý, hóa học, sinh học, chỉ là một ví dụ. Sự viện trợ của Liên Xô là một trong những nhân tố góp phần cho sự hồi phục nhanh chóng sau chiến tranh của Hà Nội.

Một yếu tố quan trọng không kém trong công cuộc tái thiết và hiện đại hóa là tính cần mẫn và tiết kiệm của người

Việt. Không có cái gì bị dễ dàng vứt đi nếu nó có thể sửa được, nếu các phần của nó vẫn dùng được, hoặc nếu vật đó có thể tái chế được. Những máy móc tích thu được hoặc bị người Mỹ bỏ lại đều được tận dụng tối đa. Một hôm tôi được chở đến nơi giảng dạy bằng một chiếc xe Jeep cũ của hải quân Mỹ. Người lái xe hẳn phải là một thợ cơ khí lành nghề nên mới có thể làm cho chiếc xe tiếp tục hoạt động.

Những dấu tích của chiến tranh đã biến mất ở hầu khắp các nơi trong thành phố. Mặc dù không ai thúc giục chúng tôi đi tìm hiểu hay làm bất cứ điều gì mang tính chính trị trong chuyến thăm, chúng tôi vẫn chủ động đến thăm Bệnh viện Bạch Mai và phố Khâm Thiên, những nơi đã bị máy bay Mỹ phá hủy nghiêm trọng vào tháng 12 năm 1972. Cả hai địa điểm đều được xây dựng lại hoàn toàn. Chỉ có một địa điểm trên phố Khâm Thiên lưu giữ những mảng tường còn sót lại của một ngôi nhà trúng bom, như là một bia tưởng niệm.

Gần những mảng tường của ngôi nhà bị bom phá đó là một triển lãm những bức ảnh ghi lại thảm kịch xảy ra vào đêm 26 tháng 12 năm 1972. Lễ Giáng Sinh đã kết thúc, nhưng hầu hết các buổi sum họp gia đình vẫn chưa tan, mọi người chưa kịp di tản về vùng nông thôn. Người ta nghĩ để đến sáng mai vẫn chưa muộn. Nhưng đêm đó không quân Mỹ đã ném bom rải thảm xuống khu dân cư. Những bức ảnh về Khâm Thiên một ngày sau đó không khác nào khi Dresden bị dội bom trong Chiến tranh Thế giới thứ hai hay Hiroshima sau khi hứng chịu bom nguyên tử. Chỉ trên một con phố đã có 283 người đã bị chết trong đêm đó.

Nhưng các nhà toán học không muốn nhắc đi nhắc lại chuyện trong quá khứ. Họ lên kế hoạch cho tương lai. Và để đi tới tương lai, họ cần sách báo, tạp chí, tiền ấn

phẩm, và những cộng tác chuyên môn với các đồng nghiệp phương Tây. Họ không có ngoại tệ để trả cho những thứ đó, nhưng đổi lại họ có thể cung cấp quyền đặt báo dài hạn tạp chí *Acta Mathematica Vietnamica*, trong đó có các bài báo nghiên cứu tiếng Anh, tiếng Pháp và tiếng Nga. Hầu hết các tác giả là người Việt, nhưng đôi khi cũng có đóng góp của các nhà toán học nước ngoài. (Tập 2 của tạp chí xuất bản năm 1977 có đăng một bài báo quan trọng của Hironaka: “Bimeromorphic smoothing of a complex analytic space”.) Đã có khá nhiều nhà toán học phương Tây đến thăm Viện Toán học Hà Nội trong những năm vừa qua. Phần lớn là người Pháp (Grothendieck, Martineau, Chenciner, Malgrange, Krickeberg, L. Schwartz, M. H. Schwartz, Dacunha-Castelle, Cartier, Verdier, Tartar), nhưng cũng có cả những người Nga (Lavrentiev, Girsanov, Dorodnitsin), hai người Rumani (Boboc, Jon), một người Đông Đức (Matter), một người Thụy Điển (Björk), một người Canada (Chandler-Davis), và giờ là một người Mỹ.

Tài chính là một trong những nguyên nhân giải thích cho sự phân bố số lượng các nhà toán học đến thăm Hà Nội của các nước. Chỉ có duy nhất chính phủ Pháp là tài trợ cho các nhà khoa học đến thăm Việt Nam, những trường hợp khác phải lo chi trả theo cách riêng của mình. Số chuyên thăm của các nhà toán học Liên Xô ít đến mức bất ngờ như vậy là do những người này chỉ có thể đến trong khuôn khổ các hiệp định viện trợ, trong đó trọng tâm là tài trợ cho sinh viên và nghiên cứu sinh Việt Nam tại Liên bang Xô Viết. Thêm nữa, theo hiệp định đó thì Việt Nam sẽ phải trả cho những người Nga đến giảng dạy nghiên cứu một mức lương rất cao so với tiêu chuẩn của người Việt. Vì vậy, theo một nghĩa nào

đó, những chuyên thăm từ phía phương Tây là khoản lợi nhuận đối với người Việt, trong khi đó những chuyên thăm từ phía Liên Xô đòi hỏi một khoản chi phí.

Bất chấp tất cả những bất lợi về mặt vật chất – thiếu kinh phí, cô lập về thông tin – triển vọng cho sự phát triển toán học ở Việt Nam là khả quan. Các nghiên cứu viên của Viện chủ yếu là những người trẻ – hầu hết dưới 40 tuổi – và hầu hết đều được đào tạo bài bản tại Moscow hoặc thủ đô của các nước Đông Âu khác. Họ đề ra những tiêu chuẩn cao cho bản thân cũng như sinh viên của mình. Rất nhiều sự quan tâm được dành cho giáo dục toán học ở mọi cấp bậc, để một ngày nào đó sinh viên sẽ không cần phải ra nước ngoài làm nghiên cứu sinh nữa. Năm nay tại kỳ thi Olympic Toán Quốc tế diễn ra tại Bucharest, trong 20 đội tham dự (hầu hết đến từ các quốc gia phát triển), đội Việt Nam đứng ở vị trí thứ 4 toàn đoàn, với thành tích chênh lệch không đáng kể so với đội xếp vị trí thứ 3 đến từ Vương Quốc Anh.

Vào ngày 18 tháng 7, Ann và tôi dậy lúc 4 giờ sáng để bắt chuyến bay của hãng Interflug⁽⁴⁾ đến Karachi. Đêm đó chúng tôi ngủ không thẳng giấc, vì thời tiết ban đêm nóng bất thường; hơn nữa, tối hôm đó chúng tôi đã ăn rất no trong bữa tiệc chia tay tuyệt vời do Lê Văn Thiêm, Châu, và Khoái tổ chức tại khách sạn Hòa Bình. Châu và Khoái đến lúc 5 giờ sáng trên một chiếc xe Jeep để đưa chúng tôi ra sân bay Nội Bài. Khi đi qua một cây cầu dài bắc qua sông Hồng để rời khỏi thành phố, trời bắt đầu sáng, những tia chớp nóng (không kèm theo tiếng sấm) hòa quện cùng với những tia nắng ban mai tạo nên một khung cảnh huyền diệu. Cây cối dọc theo đường cao tốc ra sân bay đều được bồi những vòng trắng, Khoái giải thích đó

⁽⁴⁾Một hãng máy bay Đông Đức.

là những vết đánh dấu chỉ đường cho xe ô tô và xe tải di chuyển trong điều kiện không có đèn để tránh bị máy bay oanh kích. Chúng tôi đi qua một cây cầu tạm một lần với những tấm ván lắc lư nhẹ theo nhịp xe đi. Khoái nói trong thời chiến, mọi chiếc cầu đều như vậy cả để có thể được xây lại nhanh chóng sau mỗi lần bị phá hủy.

Mặc dù đều rất mệt, chúng tôi đã nói chuyện thật lâu. Châu và Khoái cùng vợ chồng tôi đợi tại sân bay; chuyến bay của chúng tôi bị trì hoãn vì mưa và sương mù. Khoái cảm ơn vợ chồng tôi một lần nữa về bản dịch tiếng Nga của cuốn "Winnie the Pooh" mà chúng tôi đã tặng cho cậu con trai sáu tuổi của anh. Con trai của Khoái đã rất thích thú khi nghe bố kể (bằng tiếng Việt) về những chuyến phiêu lưu của gấu Pooh. Cuối cùng, trời cũng

quang trở lại, chúng tôi lên máy bay từ già đất Việt.

Chuyến đến thăm Việt Nam cho chúng tôi một trải nghiệm, một bài học tuyệt vời. Chúng tôi giúp cho Viện Toán có được một nguồn thông tin và tài liệu toán học. Nhưng hơn thế, những chuyến thăm như thế này còn có giá trị biểu trưng, bởi vì chúng minh chứng cho tính quốc tế của hoạt động toán học. Tiếc là khó có thể kỳ vọng quan hệ ngoại giao Việt-Mỹ sẽ cải thiện nhanh chóng. Nhưng những nhà toán học Mỹ không nhất thiết phải bị hạn chế bởi những ràng buộc chính trị hiện tại. Không có gì ngăn cản chúng ta dành sự hỗ trợ và tình bạn thân thiết cho cộng đồng toán học đang lớn mạnh ở Việt Nam.

Người dịch: Đỗ Việt Cường (Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội)

Giới thiệu về mô hình Ising

Cần Văn Hảo⁽¹⁾

1. SỰ HÌNH THÀNH CỦA MÔ HÌNH ISING

Mô hình Ising là một mô hình phổ biến trong vật lý thống kê nhằm mô tả sự chuyển pha trong các hệ vật lý phân tử. Vào những năm đầu thập niên 1920, Ernst Ising được giáo sư Wilhelm Lenz hướng dẫn nghiên cứu sự chuyển pha của từ tính nam châm do Pierre Curie tìm ra năm 1895. Họ muốn xây dựng một hệ vật lý đơn giản trong đó khi một tham số (ở đây là nhiệt độ) vượt qua một ngưỡng nào đó thì tính chất của hệ (cụ thể là từ tính) sẽ thay đổi rõ rệt, xem các Hình 2 và 3.

Khái quát hóa, mô hình Ising (chính xác hơn là mô hình Ising sắt từ) được xây dựng như sau. Cho G_n là một đồ thị gồm n đỉnh $\{1, \dots, n\}$. Trong bài này, chúng ta thường xét G_n là khối d -chiều $[0, \sqrt[n]{n}]^d$, hay G_n là đồ thị đầy đủ K_n . Tại mỗi đỉnh được đặt một *spin* có thể nhận giá trị $+1$ hay -1 (tương ứng với hướng $\uparrow$ hay $\downarrow$). Khi đó không gian các trạng thái của hệ sẽ là $\Omega_n = \{\pm 1\}^n$. Năng lượng của mỗi trạng thái $\sigma \in \Omega_n$ được cho bởi Hamiltonian

$$(1) \quad H_n(\sigma) = - \sum_{i \sim j} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^n \sigma_i,$$

⁽¹⁾Viện Toán Học & Đại học Kyoto. Email: cvhao@math.ac.vn

trong đó $i \sim j$ nghĩa là i được nối với j bởi một cạnh (ta còn gọi i và j là kề nhau hoặc là hàng xóm của nhau), và $h \in \mathbb{R}$ là trường ngoài tác động vào hệ.

Như vậy Hamiltonian gồm hai phần: tương tác nội hệ và tác động ngoại hệ. Trong đó, chỉ có các spin ở các đỉnh kề nhau là tương tác với nhau. Hơn nữa, các trạng thái càng có nhiều sự đồng thuận (có nhiều cặp spin kề nhau cùng dấu) thì có năng lượng càng thấp và do đó càng bền vững.

Xác suất của mỗi trạng thái được cho bởi luật Boltzmann và được viết dưới dạng độ đo Gibbs như sau

$$(2) \quad \mu_n(\sigma) = \frac{\exp(-\beta H_n(\sigma))}{Z_n},$$

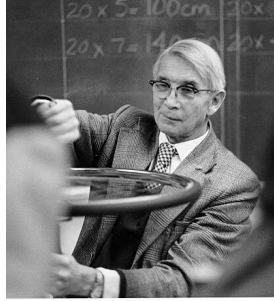
ở đó hàm phân hoạch $Z_n = \sum_{\sigma \in \Omega_n} \exp(-\beta H_n(\sigma))$ là tổng chuẩn hóa đảm bảo μ_n là một độ đo xác suất, và $\beta = 1/(\kappa T)$ với κ là hằng số Boltzmann

và T là nhiệt độ (vì vậy β được gọi là *nhiệt độ ngược*).

Các đặc trưng vật lý của hệ như độ từ hóa, hay moment từ (magnetization), độ nhạy từ (magnetic susceptibility), nhiệt dung riêng (specific heat) đều được định nghĩa như những phái sinh của *năng lượng tự do bình quân* (free energy per particle) $\varphi_n(\beta, h) = \frac{1}{n} \log Z_n$ và giới hạn của nó. Chẳng hạn, độ từ hóa được xác định bởi

$$\begin{aligned} m(\beta, h) &= \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(\beta, h) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\sigma_1 + \dots + \sigma_n}{n} \right\rangle_{\mu_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi_n(\beta, h)}{\partial h}, \end{aligned}$$

ở đó $\langle \cdot \rangle_{\mu_n}$ là kì vọng theo μ_n , tức là $\langle f \rangle_{\mu_n} = \sum_{\sigma \in \Omega_n} f(\sigma) \mu_n(\sigma)$ với $f : \Omega_n \mapsto \mathbb{R}$. Tương tự, độ nhạy từ $\chi(\beta, h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 \varphi_n(\beta, h)}{\partial \beta^2 \partial h^2}$ và nhiệt dung riêng $\mathcal{C}(\beta, h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 \varphi_n(\beta, h)}{\partial \beta^2}$.



HÌNH 1. Ernst Ising (1900–1998)

Bây giờ ta quan sát moment từ khi cho h giảm về 0 và định nghĩa điểm chuyển pha

$$(3) \quad \beta_c = \inf\{\beta : m(\beta, 0^+) > 0\}.$$

Trong các Hình 2 và 3, chúng ta có thể thấy trong pha nhiệt độ thấp $\beta > \beta_c$ (hay còn gọi *pha trật tự* (ordered phase)), các spin được sắp xếp theo tác động của

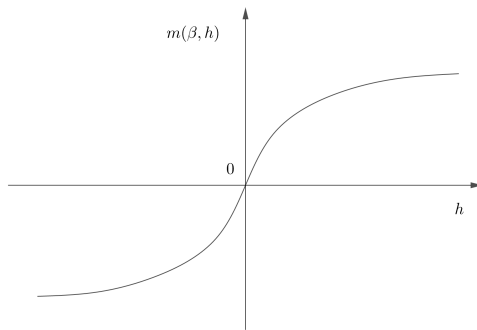
trường ngoài vì vậy moment từ thay đổi rất nhanh khi trường ngoài đổi từ $-\varepsilon$ sang ε . Ngược lại trong pha *mất trật tự* (nhiệt độ cao $\beta < \beta_c$) thì các spin chịu ít sự tác động của trường ngoài và do đó moment từ sẽ biến đổi rất chậm. Chúng minh sự chuyển pha này là mục tiêu đầu

tiên trong nghiên cứu mô hình Ising.

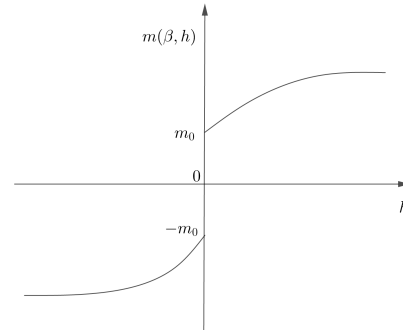
Vấn đề 1. Xác nhận sự chuyển pha (chỉ ra $\beta_c < \infty$), điểm chuyển pha (tìm ra β_c), xác định giới hạn của năng lượng tự do $\varphi(\beta, h) = \lim_{n \nearrow \infty} \varphi_n(\beta, h)$.

Trở lại với E. Ising, ông đã nghiên cứu vấn đề trên cho trường hợp đơn giản nhất $G_n = [0, n]$ -đoạn thẳng gồm n đỉnh trên $\mathbb{Z}$. Ông có thể tính chính xác $\varphi(\beta, h)$ và tìm ra rằng $\beta_c = \infty$. Dựa trên kết quả này và những phỏng đoán khác ông kết luận trong luận văn tiến sĩ của mình rằng mô hình này *không* có sự chuyển pha kể cả

ở chiều cao hơn. Sau khi tốt nghiệp, ông giảng dạy vật lý ở Đức và kết hôn với một phụ nữ người Do Thái. Gia đình ông đã trải qua nhiều biến cố trong Chiến tranh Thế giới thứ hai. Sau cùng, họ di cư tới Mỹ năm 1947. Tại đây, ông mới biết rằng mô hình của mình đã trở nên phổ biến trong cộng đồng vật lý và nhận định của ông về sự chuyển pha là không chính xác. Tuy E. Ising chỉ đóng góp vào mô hình 1 chiều (trường hợp đơn giản và không có sự chuyển pha), mô hình này vẫn được mang tên ông như một sự ghi nhận người viết lại tường minh mô hình này. Một số tác giả cũng gọi mô hình này là Lenz-Ising để ghi nhận công lao của Lenz.



(A) $\beta < \beta_c$



(B) $\beta > \beta_c$

HÌNH 2. Đồ thị của moment từ

Người đầu tiên chỉ ra sai lầm trong nhận định của E. Ising là Peierls. Năm 1936 ông đưa ra một lập luận rất sáng tạo chỉ ra sự chuyển pha tồn tại trong hai chiều mà không cần tính cụ thể $\varphi(\beta, h)$. Ngày nay, lập luận này được mở rộng trong nhiều chiều và áp dụng cho nhiều mô hình khác nhau trong vật lý thống kê như mô hình thấm thấu (percolation), các hệ phân tử có tương tác. Sau đó,

mô hình Ising hai chiều được giải tường minh. Cụ thể, Kramers và Wannier chỉ ra $\beta_c = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$ vào năm 1941, và Onsager tìm ra công thức chính xác cho $\varphi(\beta, h)$ vào năm 1944. Cho đến nay, xác định một công thức chính xác cho điểm chuyển pha (β_c) và năng lượng tự do ($\varphi(\beta, h)$) trong chiều lớn hơn 2 vẫn là một câu hỏi hóc búa chưa có lời giải.

2. NHỮNG VẤN ĐỀ CHÍNH CỦA MÔ HÌNH ISING

Ngoài vấn đề thứ nhất về điểm chuyển pha và năng lượng tự do, thì mô hình Ising có ba vấn đề lớn khác: mô tả và so sánh mô hình trong các pha trên, dưới tới hạn; mô tả mô hình trong trạng thái tới hạn; thực hiện phép sinh ngẫu nhiên độ đo Gibbs.

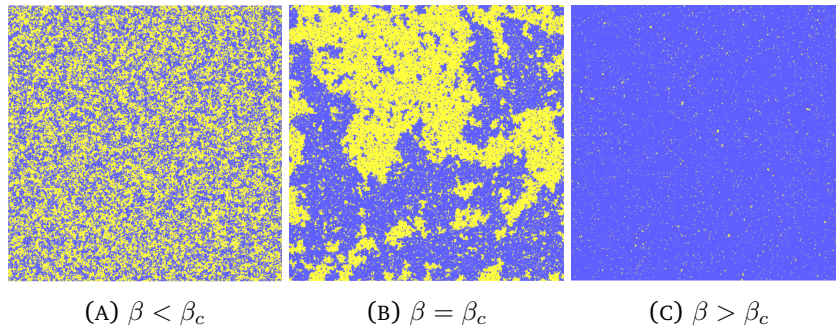
2.1. Vấn đề 2. Mô tả và so sánh các đặc trưng vật lý của hệ trong hai trạng thái trật tự ($\beta > \beta_c$) và mất trật tự ($\beta < \beta_c$).

Chẳng hạn chúng ta xem xét từ tính trung bình $M_n(\beta, h)$ của hệ. Các phỏng đoán vật lý cho thấy từ tính trung bình có dáng điệu thông thường, với độ biến động Gauss:

(i) nếu $\beta > \beta_c$ và $h \neq 0$ hoặc nếu $0 < \beta < \beta_c$ và $h = 0$ thì từ tính trung bình $M_n(\beta, h)$ thỏa mãn định lý giới hạn trung tâm dưới độ đo μ_n ;

(ii) nếu $\beta > \beta_c$ và $h = 0$ thì $M_n(\beta, h)$ sẽ không hội tụ tới một điểm mà hội tụ yếu tới $\frac{1}{2}\delta_{-m_0} + \frac{1}{2}\delta_{m_0}$ với $m_0 = m(\beta, 0^+)$. Thú vị hơn, $M_n(\beta, h)$ thỏa mãn định lý giới hạn trung tâm dưới các độ đo có điều kiện $\mu_n(\cdot \mid M_n(\beta, h) > 0)$ hay $\mu_n(\cdot \mid M_n(\beta, h) < 0)$.

Nhìn chung Vấn đề 2 được xem như khá rõ ràng, ít gây tranh cãi và đã được chứng minh cho mô hình Ising với các đồ thị khối, đồ thị dạng cây thuần nhất, hay đồ thị đầy đủ. Lưu ý, khi $G_n = K_n$ -đồ thị đầy đủ với n đỉnh, mô hình được gọi là mô hình trường trung bình (theo nghĩa tất cả các spin đều có thể tương tác với nhau) hoặc mô hình Curie-Weiss (vì các đặc trưng vật lý của mô hình này tuân theo định luật Curie-Weiss). Ngoài ra, ta cần phải thay tham số β bởi $\frac{\beta}{n}$ để cân bằng năng lượng nội hệ (có $n(n-1)/2$ tương tác) và tác động ngoài (có cỡ n). Nghiên cứu Vấn đề 2 cho các mở rộng của mô hình Ising vẫn đang được tiếp tục cho tới nay.



HÌNH 3. Một mẫu của mô hình Ising với $h = 0$, theo [5]. Các spin $+1$ tương ứng màu xanh và spin -1 là màu vàng.

2.2. Vấn đề 3. Mô tả các đặc trưng vật lý và hình học của mô hình trong trường hợp tới hạn $\beta = \beta_c$ và $h = 0$.

Đây được xem là vấn đề cốt lõi và thú vị nhất thu hút được nhiều sự quan tâm của cả cộng đồng vật lý và cộng đồng toán học. Nhìn chung các kỹ thuật và kết

quả trong pha tới hạn cho mô hình Ising được phát triển song song cùng các mô hình vật lý thống kê khác.

Vấn đề 3a. Xác định các số mũ tới hạn của các đặc trưng vật lý.

Các nhà vật lý tin rằng các hệ vật lý có thể được phân loại dựa trên các số mũ tới hạn. Những hệ có cùng số mũ sẽ có nhiều tính chất giống nhau. Các số mũ phổ biến gồm $\alpha, \beta, \delta, \gamma, \eta, \nu$ được xác định như sau. Dưới đây, ký hiệu $f(x) \asymp g(x)$ trên miền S có nghĩa là tồn tại các số dương C, D để $C|g(x)| \leq |f(x)| \leq D|g(x)|$ với mọi $x \in S$.

(i) khi $\beta = \beta_c$ và $h \downarrow 0$, $m(\beta_c, h) \asymp h^{1/\delta}$;

(ii) khi $h = 0$ và $\beta \rightarrow \beta_c$,

$$\mathcal{C}(\beta, 0^+) \asymp |\beta - \beta_c|^{-\alpha},$$

$$m(\beta, 0^+) \asymp |\beta - \beta_c|^{-\beta},$$

$$\chi(\beta, 0^+) \asymp |\beta - \beta_c|^{-\gamma};$$

(iii) khi $\beta = \beta_c$, $h = 0$ và $|x| \uparrow \infty$, $G_{\beta_c, 0^+}(x) \asymp |x|^{-(d-2+\eta)}$;

(iv) khi $h = 0$, x là một đỉnh cố định và $\beta \rightarrow \beta_c$, $-\log G_{\beta, 0^+}(x) \asymp |\beta - \beta_c|^\nu$,

ở đây độ dài tương quan (correlation length) $G_{\beta, h}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\mu_n}$ được định nghĩa trên các khối d -chiều.

Kenneth G. Wilson đã được trao giải Nobel vật lý 1982 nhờ những nghiên cứu sử dụng phương pháp nhóm tái chuẩn hóa (renormalization group) để tìm ra các số mũ tới hạn của nhiều hệ vật lý trong đó có mô hình Ising. Cụ thể số mũ tới hạn của mô hình Ising được cho ở Bảng 1.

BẢNG 1. Số mũ tới hạn của mô hình Ising

Số chiều	α	β	δ	γ	η	ν
$d = 2$	0	1/8	15	7/4	1/4	1
$d = 3$	0.11	0.3264	4.79	1.237	0.0363	0.63
$d \geq 4$ (C-W)	0	1/2	3	1	0	1/2

Từ đó, các siêu liên kết giữa các số mũ được tìm ra

$$d\nu = 2 - \alpha = \gamma + 2\beta; \quad 2 - \eta = d \frac{\delta - 1}{\delta + 1}.$$

Các số mũ trong trường hợp 3 chiều chưa được tính toán chính xác. Các nhà vật lý tin rằng khi số chiều không gian lớn hơn một giá trị tới hạn d_c thì các mô hình vật lý thống kê sẽ có tính chất giống mô hình trường trung bình. Đối với mô hình Ising, mô hình trường trung bình là mô hình Curie-Weiss (lưu ý $\gamma = 1$ chính là nội dung của định luật Curie-Weiss) và bằng các lý thuyết vật lý họ tin rằng $d_c = 4$. Các

chứng minh toán học mới chỉ ra $d_c < \infty$. Nếu như việc tính toán xấp xỉ các số mũ trong 3 chiều tiếp tục thu hút các nhà vật lý thì việc chứng minh $d_c = 4$ và các siêu liên kết vẫn đang là thách thức với các nhà xác suất.

Vấn đề 3b. Chứng minh các định lý giới hạn không chuẩn tắc.

Chúng ta kì vọng rằng ở trạng thái tới hạn thì các tính chất thống kê của hệ sẽ thay đổi. Chẳng hạn, cỡ chuẩn hóa của các đặc trưng vật lý sẽ không là tuyến

tính như thông thường mà phụ thuộc vào các số mũ tới hạn tương ứng. Ví dụ, $n^{1/(\delta+1)}M_n(\beta_c, 0)$ hội tụ yếu tới một biến ngẫu nhiên không tầm thường. Đây có thể xem như một ví dụ lí giải cho việc phân loại các hệ vật lý qua các số mũ tới hạn.

Các định lý giới hạn không chuẩn tắc thường rất khó để chứng minh chặt chẽ, và mới được kiểm chứng trên mô hình Curie-Weiss, mô hình khối hai chiều.

Vấn đề 3c. Xác định đáng điệu của đường biên giữa spin $\uparrow$ và spin $\downarrow$.

Theo Hình 3 ta thấy ở trạng thái mất trật tự, các spin $+1$ và -1 hòa vào rất nhanh, do đó không có đường biên, ở trạng thái trật tự thì hoặc spin $+1$ hoặc spin -1 chiếm đa số. Ở trạng thái tới hạn các spin hòa vào nhau khá chậm và tạo ra một đường biên. Nói rộng ra, các nhà vật lý tin rằng sau một số bước chuẩn hóa cần thiết đường biên trong các hệ vật lý thống kê hai chiều như mô hình Ising, mô hình thẩm thấu sẽ hội tụ tới những đường cong không tầm thường có tính bảo giác (conformal invariance). Vào khoảng đầu những năm 2000, Schramm đã phát hiện ra mối liên hệ chặt chẽ giữa các đường cong giới hạn này với nghiệm của một phương trình vi phân phức với điều kiện ban đầu ngẫu nhiên, được gọi là tiến hóa Schramm-Löwner. Phương trình vi phân tất định được Löwner phát biểu từ những năm 1920 trong một nghiên cứu giải tích phức thuần túy! Tiến hóa Schramm-Löwner và các ứng dụng đến nay trở thành một hướng nghiên cứu sôi động bậc nhất trong lý thuyết xác suất. Nhiều người cho rằng Schramm đáng lẽ đã được trao huy chương Fields vào năm 2002 nếu ông không bị quá 1 tháng tuổi theo qui định. Đáng tiếc hơn, ông mất

năm 2008 sau một tai nạn khi đi leo núi và không thể nhận những giải thưởng cao quý khác. Hai giải Fields của Werner năm 2002 và Smirnov năm 2010 và giải Wolf năm 2019 của Lawler đều có liên quan trực tiếp đến tiến hóa Schramm-Löwner.

2.3. Vấn đề 4. Sinh ngẫu nhiên độ đo Gibbs μ_n .

Mặc dù độ đo Gibbs μ_n là tường minh, nó phụ thuộc chặt chẽ vào hàm phân hoạch Z_n . Việc tính toán cụ thể hàm phân hoạch nhìn chung là bất khả thi (trừ trường hợp 1 và 2 chiều). Ngay cả khi biết Z_n tường minh, việc sinh một phân bố xác suất mà các thành phần nhỏ cỡ mũ là rất khó khăn. Thay vào đó, chúng ta có thể sử dụng động lực Glauber để sinh độ đo μ_n mà không cần tính Z_n . Động lực Glauber dựa trên phương pháp Monte Carlo để sinh một quá trình Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ sao cho khi $t \rightarrow \infty$ phân phối của X_t tiến tới độ đo μ_n . Phương pháp đó hoạt động như sau. Lấy giá trị ban đầu của X_0 bất kì, chẳng hạn $X_0 = (-1, \dots, -1)$. Giả sử ta đã sinh được X_t và $X_t = \sigma$, ta cần tiếp tục sinh X_{t+1} .

Bước 1: Ta lấy I là một chỉ số ngẫu nhiên chọn đều trong tập $\{1, \dots, n\}$.

Bước 2: Tính

$$p_n(\sigma, +) = \frac{\mu_n(\sigma^{I,+})}{\mu_n(\sigma^{I,+}) + \mu_n(\sigma^{I,-})},$$

$$p_n(\sigma, -) = \frac{\mu_n(\sigma^{I,-})}{\mu_n(\sigma^{I,+}) + \mu_n(\sigma^{I,-})},$$

ở đó $\sigma^{I,+}$ (và $\sigma^{I,-}$) là trạng thái của hệ nhận từ σ bằng cách thay spin ở I bởi $+1$ (tương ứng -1).

Bước 3: Sinh một biến ngẫu nhiên U có phân phối đều trên đoạn $[0, 1]$. Nếu $U < p_n(\sigma, +)$ thì ta quyết định $X_{t+1} = \sigma^{I,+}$ và ngược lại nếu $U \geq p_n(\sigma, +)$ thì $X_{t+1} = \sigma^{I,-}$.

Một cách ngắn gọn, X_{t+1} được xây dựng từ X_t bằng cách cập nhật spin ở một đỉnh được chọn ngẫu nhiên, và ta chọn spin dương cho đỉnh đó với xác suất tỉ lệ với độ đo của nó. Chú ý rằng, không khó để chỉ ra

$$p_n(\sigma, +) = \frac{\exp(2\beta[\sum_{j \sim I} \sigma_j + h])}{1 + \exp(2\beta[\sum_{j \sim I} \sigma_j + h])},$$

$$p_n(\sigma, -) = 1 - p_n(\sigma, +).$$

Rõ ràng $p_n(\sigma, \pm)$ chỉ phụ thuộc vào trạng thái của các đỉnh liền kề I , và vì vậy các bước 1, 2, 3 hoàn toàn không dùng đến Z_n và có thể tiến hành dễ dàng với các máy tính thông thường.

Quan trọng hơn, ta có thể chỉ ra $(X_t)_{t \geq 0}$ là một quá trình Markov khả nghịch (reversible) nhận μ_n là độ đo dừng và do đó phân phối của X_t sẽ hội tụ tới μ_n khi $t \rightarrow \infty$.

Câu hỏi quan trọng là khi nào luật của X_t đủ gần μ_n và ta có thể dừng quá trình sinh này?

Một lần nữa vai trò của β được thể hiện và có thêm một sự chuyển pha qua β_c . Trước hết, ta định nghĩa *thời gian trộn* (mixing time) với tham số ε như thời gian cần thiết để khoảng cách biến phân đầy đủ (total variation distance) giữa luật của X_t và μ_n nhỏ hơn ε . Cụ thể, $t_{\text{mix}}(n, \varepsilon) = \inf\{t : \|\mathcal{L}(X_t) - \mu_n\|_{\text{TV}} \leq \varepsilon\}$. Người ta tin rằng đáng điều của $t_{\text{mix}}(n, \varepsilon)$ phụ thuộc vào β . Nếu $\beta < \beta_c$ thì $t_{\text{mix}}(n, \varepsilon) = (1 + o(1))t_{\text{mix}}(n, 1 - \varepsilon) \asymp n \log n$ với mọi $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Nếu $\beta = \beta_c$ thì $t_{\text{mix}}(n, \varepsilon)/t_{\text{mix}}(n, 1 - \varepsilon) \rightarrow \infty$ và $t_{\text{mix}}(n, \varepsilon) \asymp n^\delta$ với $\delta = \delta(\varepsilon) > 1$. Nếu $\beta > \beta_c$ thì $t_{\text{mix}}(n, \varepsilon) \geq \exp(c\beta n)$ với $c = c(\varepsilon)$. Như vậy, trong pha nhiệt độ thấp thời gian trộn có cỡ mũ trong khi ở pha nhiệt độ cao, thời gian trộn chỉ có cỡ đa thức. Chứng minh chặt chẽ sự

chuyển pha của thời gian trộn nhận được nhiều sự quan tâm của các nhà xác suất. Dù vậy, các kết quả hiện nay mới chỉ tập trung vào mô hình Curie-Weiss và khối hai chiều với $h = 0$.

Một ứng dụng quan trọng của phương pháp Monte Carlo nói chung và động lực Glauber nói riêng là trong bài toán tìm điểm cực trị với dữ liệu rời rạc. Chúng ta có thể chỉ ra rằng khi $\beta \gg n$ thì độ đo Gibbs sẽ tập trung tại các điểm cực tiểu của $H_n(\sigma)$. Do đó động lực Glauber sẽ dẫn ta tới các điểm cực tiểu khi $t \rightarrow \infty$. Như ta đã chỉ ra, khi β lớn thì số bước lặp cần thiết sẽ lớn cỡ mũ theo βn nghĩa là cỡ mũ theo n^2 . Một con số cực lớn và không thực hiện được trong thực tế. Người ta đã và đang cố gắng cải tiến phương pháp này. Chẳng hạn, trong phương pháp động lực khối, ở mỗi bước spin của một khối các điểm sẽ được cập nhật đồng thời thay vì chỉ một đỉnh như động lực Glauber. Một số thực nghiệm cho thấy phương pháp này giúp rút ngắn số bước lặp và cho kết quả tương đối chính xác (lưu ý rằng độ đo Gibbs có thể không là độ đo dừng của động lực khối, do đó động lực này có thể không hội tụ về điểm cực tiểu). Dù các ứng dụng của động lực Glauber và các mở rộng được thực hiện rộng rãi trong các phòng thí nghiệm hay ở quy mô công nghiệp, các nghiên cứu chặt chẽ toán học vẫn còn khá hạn chế.

3. MỘT SỐ MỞ RỘNG CỦA MÔ HÌNH ISING

Sau khi ra đời, mô hình Ising được mở rộng theo nhiều hướng khác nhau bằng cách mở rộng các tham số trong Hamiltonian. Chúng ta sẽ đi qua một vài mở rộng nổi bật.

3.1. Mở rộng β và h . Đây là cách mở rộng đơn giản nhất và được tiến hành đầu

tiên. Ta có thể xét mô hình đối sắt từ với $\beta < 0$. Mô hình này phù hợp để mô phỏng các mối quan hệ bất hợp tác (càng ít sự đồng thuận thì càng bền vững). Ngoài ra, ta có thể xét bài toán có trường ngoài không thuần nhất. Chẳng hạn, với G_n là khối d -chiều, ta giả sử $h_i = 0$ với mọi đỉnh trong của G_n và $h_i = \pm h$ nếu i là đỉnh thuộc biên. Khi đó xem xét giới hạn các độ đo Gibbs tương ứng với các điều kiện biên khác nhau là câu hỏi nhận được nhiều quan tâm.

Thậm chí, gần đây một số nhà toán học đề xuất nghiên cứu cả trường hợp $\beta \in \mathbb{C}$. Tuy nhiên, họ vẫn chưa tìm ra một kiến giải thỏa đáng cho nhiệt độ phức!

3.2. Mở rộng hệ số tương tác và không gian trạng thái. Trong mô hình ban đầu, chúng ta giả sử các tương tác giữa các spin có cùng độ lớn bằng 1. Một cách tự nhiên ta có thể giả sử hệ số tương tác giữa hai spin ở i và j là $J_{i,j}$. Tương tự, các spin có thể nhận nhiều giá trị khác nhau trong một không gian $\mathcal{S}$, và do đó $\Omega_n = \mathcal{S}^n$. Khi đó, một dạng Hamiltonian thường được xét là

$$H_n(\sigma) = - \sum_{i,j \leq n} J_{i,j} \mathbb{I}(\sigma_i = \sigma_j) - h \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(\sigma_i = a),$$

với a là một trạng thái cố định cho trước trong $\mathcal{S}$. Mở rộng hệ số bất định thường có dạng $J_{i,j} = f(d(i,j))$ với $d(i,j)$ là khoảng cách giữa i và j trong đồ thị G_n và $|f|$ là một hàm giảm (các spin càng xa nhau thì tương tác càng yếu). Mở rộng đơn giản nhất của không gian trạng thái là khi $\mathcal{S}$ có $q \geq 3$ giá trị. Mô hình này được đặt tên theo người sáng lập là mô hình q -Potts, và nó có nhiều ứng dụng trong bài toán tô màu và dán nhãn.

Một mở rộng quan trọng khác là mô hình *spin glass*. Đây là một mô hình xuất

phát trong vật lý vật liệu đậm đặc (condensed matter physics). Trong các vật liệu đậm đặc (như kính cửa sổ chẳng hạn), các spin có thể có hướng và tương tác rất hỗn loạn (khác với các vật liệu cấu trúc tinh thể, các spin được sắp xếp theo trật tự). Để mô hình hóa sự hỗn loạn này, các nhà vật lý xem xét trường hợp $J_{i,j}$ là các biến ngẫu nhiên Gauss chuẩn tắc độc lập cùng phân phối. Tức là hệ số tương tác spin có thể trải dài từ $-\infty$ tới ∞ và không tắt định. Một mô hình spin glass phổ biến là mô hình S-K đặt theo tên hai người sáng lập là Sherrington và Kirkpatrick. Trong đó, $G_n = K_n$ và không gian trạng thái hoặc là $\Omega_n = \{\pm 1\}^n$ hoặc là $\Omega_n = \mathcal{S}_d^n$ với $\mathcal{S}_d$ là mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^d$ (khi đó độ đo Gibbs sẽ là độ đo liên tục). Các nhà vật lý đã phát triển nhiều phương pháp và phỏng đoán cho mô hình S-K. Cho tới nay chỉ có Vấn đề 1 được trả lời một cách chặt chẽ bằng các phương pháp toán học. Gần đây ngoài những ứng dụng trong vật lý, người ta đã tìm ra những ứng dụng của các mô hình spin glass trong sinh học và trí tuệ nhân tạo. Do vậy, mô hình này ngày càng hấp dẫn với cộng đồng khoa học.

Ngoài ra, mô hình Ising lượng tử cũng được phát triển, ở đó spin nhận giá trị trong không gian các toán tử (ví dụ không gian các ma trận). Các tính toán cho mô hình này rất phức tạp và kết quả mới chỉ hạn chế ở những phỏng đoán vật lý.

3.3. Mô hình Ising trên đồ thị ngẫu nhiên. Như ta đã biết, trong mô hình Ising sắt từ các trạng thái có nhiều sự đồng thuận sẽ được phân bố với xác suất cao hơn, bền vững hơn. Hiện tượng này rất phù hợp với các hành vi xã hội có hợp tác: những người bạn của nhau thường có ý kiến giống nhau. Mặt khác, các mối quan hệ xã hội rất phức tạp thường được

mô phỏng thông qua các đồ thị ngẫu nhiên cỡ lớn. Do vậy mô hình Ising trên đồ thị ngẫu nhiên cũng được nghiên cứu nhiều dưới cả khía cạnh lý thuyết và ứng dụng. Về mặt lý thuyết, mô hình Ising trên một số loại đồ thị ngẫu nhiên phổ biến với cấu trúc địa phương giống cây (locally tree-like) đã được hiểu rõ đối với các vấn đề 1, 2 và 3a. Vấn đề về biên, hay cách định nghĩa biên của spin trong các đồ thị ngẫu nhiên vẫn chưa được thống nhất.

4. KẾT LUẬN

Khởi đầu từ một mô hình đơn giản và một nhận định sai cách đây gần 100 năm, mô hình Ising đã trở thành một nhánh quan trọng trong vật lý thống kê và lý thuyết xác suất. Hằng năm, có khoảng 800 bài báo khoa học có liên quan đến mô hình Ising, từ những câu hỏi cơ bản

nhất cho mô hình 3 chiều cho đến những ứng dụng trong sinh học, trí tuệ nhân tạo.

TÀI LIỆU

- [1] B. Cipra. *An introduction to the Ising model*. American Mathematical Monthly, 94, 937–959 (1987).
- [2] G. Grimmett. *The random-cluster model*. Springer, Berlin (2006).
- [3] E. Ising. *Beitrag zur Theorie des Ferro- und Paramagnetismus*. PhD Thesis, University of Hamburg (1924).
- [4] T. Ising, R. Folk, R. Kenna, B. Berche, Y. Holovatch. *The fate of Ernst Ising and the fate of his model*, arXiv:1706.01764.
- [5] C. M. Newmann. *2D Ising model: near critical scaling limit and magnetization critical exponent*. <http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/ws/2013/mathstat/Presentation/Newman.pdf>
- [6] S. Smirnov. *The Ising model of a ferromagnet from 1920 to 2020*. <http://www.unige.ch/smirnov/slides/slides-ising-model.pdf>

Dành cho các bạn trẻ

Định lý Hall và ứng dụng (Phần 2)

Trần Minh Hiền⁽¹⁾

2. VẬN DỤNG

Ví dụ 2.1. Trong một lớp học có $n \geq 2$ học sinh, thầy giáo có n món quà muốn chia cho cả lớp. Với mỗi $1 \leq i \leq n$, học sinh thứ i thích $x_i > 0$ món quà trong các món quà đó. Giả thiết rằng $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} < \frac{n}{n-1}$. Chứng minh rằng thầy giáo có thể chia hết số quà để mỗi em đều nhận được món quà mình thích.

Chứng minh. Xây dựng đồ thị hai phía $G = (X, Y, E)$ với:

- $X = \{1, 2, \dots, n\}$ là tập hợp gồm n điểm, mỗi điểm đại diện cho một học sinh;
- Y là tập hợp gồm n điểm, mỗi điểm đại diện cho một món quà;
- Một cạnh $\{i, j\} \in E$, $i \in X$, $j \in Y$ nếu học sinh i thích món quà j .

Khi đó x_i là bậc của mỗi đỉnh i , $i \in X$, và $1 \leq x_i \leq n$ với mọi $i = 1, \dots, n$. Ta

⁽¹⁾THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước. Email: hiencqt@gmail.com

chứng minh G thỏa mãn điều kiện Hall. Giả sử phản chứng, tồn tại tập $A \subset X$ và $|A| = k$ sao cho $|N(A)| < k$. Từ giả thiết, ta có $k > 1$. Không giảm tổng quát, giả sử $A = \{1, \dots, k\}$. Khi đó với mọi $i = 1, \dots, k$, $x_i \leq |N(A)| < k$, nên $x_i \leq k - 1$. Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{n}{n-1} &> \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \\ &\geq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k} \\ &\geq \frac{k}{k-1}. \end{aligned}$$

Hàm $x/(x-1) = 1 + 1/(x-1)$ xác định trên miền $\{x > 1\}$ là giảm chặt nên các bất đẳng thức trên dẫn đến một mâu thuẫn. Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 2.2. Có 1000 hộp bi, mỗi hộp chứa đúng 10 viên bi. Biết rằng không có 11 viên bi nào cùng màu. Chứng minh rằng có thể lấy từ mỗi hộp một viên bi sao cho tất cả 1000 viên bi được lấy ra đều có màu khác nhau.

Chứng minh. Ta xây dựng đồ thị hai phía $G = (X, Y, E)$:

- X là tập hợp gồm 1000 đỉnh, mỗi đỉnh tương ứng với một hộp bi.
- Y là tập hợp các đỉnh, mỗi đỉnh tương ứng với một màu.
- Tồn tại cạnh $xy \in E$ nếu hộp $x \in X$ có chứa viên bi mang màu $y \in Y$.

Với A là tập con khác rỗng bất kỳ của X , đặt $|A| = r$. Giả sử $|N(A)| \leq r - 1$, khi đó $r \geq 2$. Vì $N(A)$ chứa tất cả $10 \times r$ viên bi, và chúng chỉ mang có $\leq r - 1$ màu, nên theo Nguyên lý Dirichlet thì có ít nhất 11 viên bi cùng màu, mâu thuẫn với giả thiết. Do đó

$$|N(A)| \geq |A|.$$

Áp dụng định lý Hall ta có điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 2.3 (Putnam 2012). Cho n là số nguyên dương. Một giải đấu bóng chuyền gồm $2n$ đội bóng, thi đấu theo thể thức vòng tròn và kéo dài $2n - 1$ ngày. Mỗi ngày, mỗi đội đấu đúng một trận với một đội khác, và kết thúc chỉ có thắng hoặc thua. Trong suốt giải đấu, hai đội bất kỳ sẽ gặp nhau đúng một lần. Chứng minh rằng trong toàn bộ $2n - 1$ ngày, có thể chọn ra được mỗi ngày một đội thắng sao cho không có đội nào được chọn nhiều hơn một lần.

Chứng minh. Xây dựng đồ thị hai phía $G = (X, Y, E)$ như sau:

- X là tập hợp $2n - 1$ điểm, mỗi điểm đại diện cho một ngày, ký hiệu là $1, 2, \dots, 2n - 1$;
- Y là tập hợp gồm $2n$ điểm, mỗi điểm đại diện cho một đội bóng, ký hiệu là $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$;
- Một cạnh $ix_k \in E$ nếu đội bóng x_k thắng trong ngày thi đấu thứ i .

Lấy A là một tập con tùy ý của X , giả sử $|A| = m$, với $1 \leq m \leq 2n - 1$. Ta sẽ chứng minh $|N(A)| \geq m$, tức là tồn tại ít nhất m đội bóng phân biệt, mỗi đội đều thắng trong một ngày thuộc m ngày trên. Giả sử ngược lại, tức $|N(A)| < m$. Khi đó tồn tại một đội bóng x_s trong Y thua tất cả các trận đấu trong m ngày trên. Nhưng điều này lại dẫn đến $|N(A)| \geq m$, vì m đội bóng đối thủ của x_s đều đã chiến thắng trong m ngày thi đấu đó, mâu thuẫn với giả sử $|N(A)| < |A|$. Do đó điều kiện Hall được thỏa mãn. Áp dụng định lý Hall ta có điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 2.4 (Việt Nam TST 2010). Trong một hội nghị có n nước tham gia, mỗi nước có k đại diện ($n > k > 1$). Người ta chia $n \cdot k$ người này thành n nhóm, mỗi nhóm có k người sao cho không có hai người nào cùng nhóm đến từ cùng một nước. Chứng minh rằng có thể chọn ra n

người sao cho họ thuộc các nhóm khác nhau và đến từ các nước khác nhau.

Chứng minh. Ta xây dựng đồ thị hai phía $G = (X, Y, E)$ với

- X là tập hợp có n phần tử, mỗi phần tử đại diện cho một nhóm, $X = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$;
- Y là tập hợp có n phần tử, mỗi phần tử đại diện cho một nước, $Y = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$;
- Một cạnh $G_i C_j \in E$ ($G_i \in X, C_j \in Y$) khi tồn tại một người thuộc nhóm G_i đến từ nước C_j .

Vì mỗi nhóm có k người đến từ các nước khác nhau, nên mỗi đỉnh của X sẽ được nối với đúng k đỉnh trong Y .

Với mọi $h \in \{1, 2, \dots, n\}$, xét tập $A = \{G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_h}\}$ là một tập con tùy ý của X . Khi đó tập hợp các đại biểu ở h nhóm này phải đến từ ít nhất h nước (vì nếu họ đến từ $\leq h - 1$ nước, dẫn đến phải có một nước mà hai người thuộc cùng một nhóm, mâu thuẫn). Do đó $|N(A)| \geq |A|$. Áp dụng định lý Hall ta có điều phải chứng minh. $\square$

Ta sẽ minh họa bài toán trên với một ví dụ cụ thể. Hội đồng Bảo an Liên Hiệp Quốc gồm 5 nước, mỗi nước có 3 người thường trực họp trong hội đồng, cụ thể

- Nước Anh gồm 3 người A_1, A_2, A_3 ;
- Nước Mỹ gồm 3 người M_1, M_2, M_3 ;
- Nước Trung Quốc gồm 3 người T_1, T_2, T_3 ;
- Nước Pháp gồm 3 người P_1, P_2, P_3 ;
- Nước Nga gồm 3 người N_1, N_2, N_3 .

15 người này được chia thành 5 nhóm, mỗi nhóm 3 người là

- Nhóm 1 gồm 3 người A_1, M_2, T_3 ;
- Nhóm 2 gồm 3 người M_1, P_1, N_3 ;

- Nhóm 3 gồm 3 người A_2, T_2, N_2 ;
- Nhóm 4 gồm 3 người A_3, P_3, N_1 ;
- Nhóm 5 gồm 3 người M_3, P_2, T_1 .

Khi đó ta có thể chọn được 5 người thuộc 5 nhóm khác nhau và 5 nước khác nhau là $(A_1, N_3, T_2, P_3, M_3)$.

Ví dụ 2.5 (Việt Nam TST 2001). Một lớp khiêu vũ có 42 thành viên, trong đó cứ 31 người bất kỳ thì có ít nhất một cặp nam nữ quen nhau. Chứng minh rằng có thể chọn được trong lớp này 12 cặp nam nữ quen nhau.

Chứng minh. Giả sử trong lớp này có a học sinh nam và b học sinh nữ. Khi đó $a \geq 12$ và $b \geq 12$ (Nếu không, giả sử $a \leq 11$, khi đó trong lớp có ít nhất 31 nữ, mâu thuẫn với giả thiết "trong đó cứ 31 người bất kỳ thì có ít nhất một cặp nam nữ quen nhau", tương tự cho số nữ). Đặt $d = a - 12 \geq 0$. Xét đồ thị hai phía $G = (X, Y, E)$ với X là tập hợp gồm a điểm, mỗi điểm đại diện cho một bạn nam; Y là tập hợp gồm b điểm, mỗi điểm đại diện cho một bạn nữ; một cạnh $xy \in E$ nếu bạn nam $x \in X$ quen với bạn nữ $y \in Y$.

Bây giờ lấy A là một tập con khác rỗng tùy ý của X . Ta chứng minh $|N(A)| \geq |A| - d$. Thật vậy, nếu ngược lại $|N(A)| \leq |A| - d - 1$. Khi đó xét nhóm người gồm: $|A|$ học sinh nam trong X và $|Y| - |N(A)|$ học sinh nữ còn lại sẽ có số lượng ≥ 31 vì

$$\begin{aligned} & |A| + |Y| - |N(A)| \\ & \geq |A| + b - (|A| - d - 1) \\ & = b + d + 1 = b + a - 12 + 1 \\ & = 42 - 12 + 1 = 31 \end{aligned}$$

nhưng không thể tìm được cặp nam nữ nào quen nhau, mâu thuẫn. Từ đây áp

⁽²⁾Xem phần một của bài viết, Thông Tin Toán Học Tập 23, Số 1, trang 19–25.

dụng Hệ quả 1.10⁽²⁾, cho $d = a - 12$ sẽ tồn tại một cách ghép cặp trong X có ít nhất $a - (a - 12) = 12$ đỉnh, tức là tồn tại 12 cặp nam nữ quen nhau. $\square$

Ví dụ 2.6 (Kazakhstan 2003). Cho hai tờ giấy hình vuông cùng có diện tích bằng 2003. Mỗi hình vuông này được chia thành 2003 đa giác, mỗi đa giác có diện tích 1 (cách chia cho hai tờ giấy này khác nhau). Người ta đặt hai tờ giấy này chồng lên nhau. Chứng minh rằng ta có thể đặt 2003 cây kim để tất cả 4006 đa giác đó đều bị đâm thủng.

Chứng minh. Xét đồ thị hai phía $G = (X, Y, E)$ với

- X là tập hợp 2003 điểm, mỗi điểm đại diện cho một đa giác có diện tích 1 của tờ giấy thứ nhất;
- Y là tập hợp 2003 điểm, mỗi điểm đại diện cho một đa giác có diện tích 1 của tờ giấy thứ hai;
- Một cạnh $xy \in E$ khi đặt hai tờ giấy chồng lên nhau thì x và y có ít nhất một điểm chung.

Lấy $A \subset X$ là tập gồm k điểm trong X , khi đó có thể hiểu A là tập gồm k đa giác của tờ giấy thứ 1, k đa giác này phủ một diện tích bằng k . Do đó k đa giác này che phủ một phần diện tích trong đó có ít nhất k đa giác của tờ giấy thứ 2. Do đó

$$|N(A)| \geq k = |A|.$$

Vì vậy điều kiện Hall được thỏa mãn, và tồn tại một cách ghép hoàn hảo. Ta chỉ cần đặt 2003 cây kim tương ứng với các cạnh trong cặp ghép hoàn hảo đó. $\square$

Cho m, n là các số nguyên dương. Một ma trận cấp $m \times n$ là một bảng chữ nhật với m hàng và n cột, trong đó mỗi phần tử là một số thực. Để nói A là một ma trận

cấp $m \times n$ với phần tử ở giao của hàng i và cột j là a_{ij} , ta viết $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Ma trận vuông là ma trận có số hàng bằng số cột.

Định nghĩa 2.7. Một ma trận vuông được gọi là **ngẫu nhiên kép** nếu các số trong ma trận đều không âm và tổng các số trên mỗi hàng và trên mỗi cột bất kỳ đều bằng 1.

Chẳng hạn, ma trận

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

là một ma trận ngẫu nhiên kép.

Định nghĩa 2.8. Một ma trận **hoán vị** là một ma trận vuông mà các số trong ma trận hoặc là 0 hoặc là 1, mỗi dòng hoặc mỗi cột chỉ có duy nhất một số 1.

Chẳng hạn, ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

là một ma trận hoán vị.

Một tổ hợp *lồi* các vector $v_1, \dots, v_n$ là một tổ hợp tuyến tính $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ sao cho mỗi α_i là số không âm và $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ (khi đó dĩ nhiên mỗi α_i lớn nhất là 1).

Với các ma trận cùng cấp $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$, ta định nghĩa tổng $A + B$ của chúng là ma trận có phần tử ở giao của hàng i và cột j là $a_{ij} + b_{ij}$. Với một số thực c , ta ký hiệu phép nhân của c với ma trận A , ký hiệu cA , là ma trận $(ca_{ij})_{m \times n}$. Ta ký hiệu $-A$ là ma trận của phép nhân $(-1)A$.

⁽³⁾G. Birkhoff, *Three observations on linear algebra*, Univ. Nac. Tucumán. Revista A 5 (1946), 147–151. (Spanish)

Ví dụ 2.9 (Định lý Birkhoff⁽³⁾). Mọi ma trận ngẫu nhiên kép là một tổ hợp lồi của các ma trận hoán vị.

Ta chứng minh định lý Birkhoff bằng cách sử dụng định lý hôn nhân Hall. Chúng ta liên kết một ma trận ngẫu nhiên bởi một đồ thị hai phía như sau: Mỗi dòng i trong ma trận là một điểm i trong tập X , mỗi cột j trong ma trận là một điểm j trong tập Y ; điểm i nối được với j nếu số giao x_{ij} của dòng i và cột j là số dương.

Phép chứng minh dựa vào bổ đề sau đây.

Bổ đề 2.10. Đồ thị hai phía liên kết với ma trận ngẫu nhiên kép có một ghép cặp hoàn hảo.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử không tồn tại một cặp ghép hoàn hảo. Khi đó theo định lý Hall, tồn tại một tập con A các đỉnh của X sao cho $|N(A)| < |A|$.

Bây giờ ta xét tổng

$$\sum_{i \in A, j \in N(A)} x_{ij}$$

nghĩa là tổng tất cả các số nằm ở giao một dòng trong A và trong một cột trong $N(A)$.

- Theo các dòng trong A , tất cả các số khác 0 đều nằm trong các cột thuộc vào $N(A)$ (theo định nghĩa của đồ thị liên kết). Do tổng tất cả các phần tử trong mỗi dòng là 1,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in A, j \in N(A)} x_{ij} &= \sum_{i \in A} \sum_{j \in N(A)} x_{ij} \\ &= \sum_{i \in A} 1 = |A|. \end{aligned}$$

- Mặt khác, tổng tất cả các phần tử trong các cột thuộc vào $N(A)$ nhỏ nhất bằng $\sum_{i \in A, j \in N(A)} x_{ij}$, do các số không thuộc

các dòng thuộc A là không âm. Vì ma trận là ngẫu nhiên kép, tổng các số trong các cột thuộc vào $N(A)$ bằng với $|N(A)|$.

Từ đó ta nhận được

$$\begin{aligned} \sum_{i \in A, j \in N(A)} x_{ij} &\leq |N(A)| < |A| \\ &= \sum_{i \in A, j \in N(A)} x_{ij}, \end{aligned}$$

vô lý! Bổ đề được chứng minh. $\square$

Chứng minh Ví dụ 2.9. Ta chứng minh bằng quy nạp theo số lượng các số khác 0 trong ma trận. Gọi M_0 là một ma trận kép ngẫu nhiên. Theo bổ đề, đồ thị hai phía liên kết với nó có một cặp ghép hoàn hảo. Gạch dưới tất cả các số liên kết với các cạnh trong ghép cặp đó. Ví dụ trong đồ thị hai phía liên kết của ma trận trước Định nghĩa 2.8, thì $(1, 3), (2, 1), (3, 2)$ là một cặp ghép hoàn hảo, khi đó ta gạch chân các số x_{13}, x_{21} và x_{32} .

Khi đó ta đã gạch chân đúng một phần tử trong mỗi dòng và mỗi cột. Gọi α_0 là số bé nhất trong các số được gạch chân và P_0 là ma trận hoán vị là mà các số 1 nằm ở vị trí các số được gạch chân. Nếu $\alpha_0 = 1$ thì tất cả các số được gạch chân đều bằng 1 (vì theo định nghĩa ma trận ngẫu nhiên kép chứa các số ≤ 1 và α_0 là số nhỏ nhất lại bằng 1). Khi đó $M_0 = P_0$ là một ma trận hoán vị.

Nếu $\alpha_0 < 1$, khi đó ma trận $M_0 - \alpha_0 P_0$ là một ma trận có các phần tử không âm, tổng các phần tử trên các dòng và trên các cột đều bằng $1 - \alpha_0$. Chia mỗi số trong ma trận này cho $1 - \alpha_0$ trong $M_0 - \alpha_0 P_0$, ta nhận được một ma trận ngẫu nhiên kép M_1 . Khi đó ta có thể viết

$$M_0 = \alpha_0 P_0 + (1 - \alpha_0) M_1$$

với M_1 không những là ma trận ngẫu nhiên kép, mà nó có các phần tử khác 0 ít hơn M_0 . Theo giả thiết quy nạp, M_1 lại có thể viết được dưới dạng

$$M_1 = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n$$

với $P_1, P_2, \dots, P_n$ là các ma trận hoán vị và $\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n$ là một tổ hợp lồi. Khi đó

$$M_0 = \alpha_0 P_0 + (1 - \alpha_0) \alpha_1 P_1 + \cdots + (1 - \alpha_0) \alpha_n P_n$$

với $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ là các ma trận hoán vị, và biểu diễn của M_0 là một tổ hợp lồi do $\alpha_0 \geq 0$, mỗi $(1 - \alpha_0) \alpha_i$ không âm và ta có

$$\begin{aligned} & \alpha_0 + (1 - \alpha_0) \alpha_1 + \cdots + (1 - \alpha_0) \alpha_n \\ &= \alpha_0 + (1 - \alpha_0) (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \\ &= \alpha_0 + 1 - \alpha_0 = 1. \end{aligned}$$

□

Ta minh họa lại thuật toán trong chứng minh trên với ví dụ trước Định nghĩa 2.8,

$$M_0 = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

Một cặp ghép hoàn hảo của đồ thị liên kết với M_0 là $\{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ với ma trận hoán vị liên kết

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có $\alpha_0 = \frac{2}{5}$, do vậy

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{1 - \alpha_0} (M_0 - \alpha_0 P_0) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Đồ thị liên kết với M_1 có một cặp ghép hoàn hảo $\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$, ma trận hoán vị liên kết

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

và $\alpha_1 = \frac{1}{2}$. Do đó ta được

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{1}{1 - \alpha_1} (M_1 - \alpha_1 P_1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Do vậy $M_2 = P_2$ là ma trận hoán vị. Làm ngược lại quy trình thì

$$\begin{aligned} M_0 &= \alpha_0 P_0 + (1 - \alpha_0) \alpha_1 P_1 + \\ &\quad (1 - \alpha_0) (1 - \alpha_1) P_2 \\ &= \frac{2}{5} P_0 + \frac{3}{10} P_1 + \frac{3}{10} P_2 \end{aligned}$$

là một biểu diễn của M_0 như tổ hợp lồi của các ma trận hoán vị.

3. LUYỆN TẬP

Bài tập 1. Một bộ bài gồm 52 lá, với số thứ tự là: 1, 2, ..., 13 và mỗi lá bài có bốn chất: cơ, rô, bích, tép. Người ta chia ngẫu nhiên 52 lá bài này thành 13 đồng, mỗi đồng 4 lá bài. Chứng minh rằng tồn tại một cách lấy ra từ mỗi đồng một lá bài sao cho cho được một tập các quân bài có các số từ 1 đến 13.

Bài tập 2 (USA TST 2014). Cho n là số nguyên dương chẵn, và G là một đồ thị đơn n đỉnh, $\frac{n^2}{4}$ cạnh, không có khuyên. Một cặp đỉnh không có thứ tự (x, y) được gọi là đẹp nếu chúng có một đỉnh kề chung (tức là tồn tại một đỉnh z để có cạnh xz, yz). Chứng minh rằng G có ít nhất $2^{\binom{n/2}{2}}$ cặp đỉnh đẹp.

Bài tập 3. Cho n là số nguyên dương. Cho một bảng kẻ ô vuông kích thước $n \times n$ mà ở mỗi ô vuông chỉ điền một trong hai số 0 hoặc 1. Giả sử điều kiện sau được thỏa mãn: với mọi tập gồm n ô vuông của bảng, trong đó không có hai ô nào nằm trong cùng một hàng hoặc cùng một cột, luôn có ít nhất một ô chứa số 1. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương i và j với $i + j \geq n + 1$, và i hàng và j cột của bảng, sao cho các số ở giao của các hàng và cột này đều là số 1.

Bài tập 4. Cho $n \in \{1, 2, \dots, 8\}$ và xét bảng vuông 8×8 . Người ta đánh dấu một

số ô vuông của bảng bởi các chữ X sao cho: trên mỗi dòng hoặc trên mỗi cột tùy ý có đúng n dấu X . Chứng minh rằng có thể chọn ra 8 dấu X sao cho không có hai dấu nào nằm trên cùng một hàng hoặc cùng một cột.

Bài tập 5. Cho A là một tập hữu hạn, $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các tập con khác rỗng của A , và $d_1, d_2, \dots, d_n$ là các số tự nhiên. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tồn tại các tập con rời nhau đôi một $D_1, \dots, D_n$ sao cho $D_i \subset A_i$, $|D_i| = d_i$ với mọi $i = 1, \dots, n$, là:

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geq \sum_{i \in I} d_i$$

với mọi tập con $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$.

Bài tập 6. Gọi M là một ma trận vuông $n \times n$ với các phần tử là các số nguyên không âm, sao cho tổng của các số trên mỗi hàng và trên mỗi cột đều bằng nhau và khác không. Chứng minh rằng luôn có thể viết M dưới dạng tổng của các ma trận hoán vị.

Tin tức hội viên và hoạt động toán học

Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên-Học sinh lần thứ 27 đã được Hội Toán học Việt Nam và Đại học Nha Trang phối hợp tổ chức trong các ngày 1-7/4/2019 tại Đại học Nha Trang, Khánh Hoà. Có 2 bảng A-B dành cho 77 đoàn sinh viên đại học và một bảng dành cho 12 trường phổ thông chuyên. Tổng cộng đã có 797 lượt thí sinh dự thi. Ban tổ chức đã quyết định trao số lượng giải thưởng như sau:

Khối sinh viên: Môn Đại số có 33 giải nhất, 51 giải nhì, 81 giải ba. Môn Giải tích có 30 giải nhất, 52 giải nhì, 75 giải ba. Có 06 giải đặc biệt cho các sinh viên

đạt thủ khoa một môn hoặc giải nhất cả hai môn. Đặc biệt năm nay bạn Vương Đình Ân (ĐH Bách Khoa Hà Nội) đạt thủ khoa cả hai môn.

Khối học sinh: Có 6 huy chương Vàng, 13 huy chương Bạc, 17 huy chương Đồng. Ban tổ chức phối hợp với Quỹ Lê Văn Thiêm trao phần thưởng của quỹ cho 9 học sinh có thành tích tốt nhất hoặc đã vượt khó đạt thành tích tốt.

Ngoài ra, 108 nữ sinh (sinh viên và học sinh) đạt giải đã được nhận phần thưởng của GS. TSKH. Phạm Thị Trân Châu, chủ tịch Hội phụ nữ trí thức Việt Nam.

Kỳ thi Tìm kiếm tài năng toán học trẻ năm 2019. Nhằm phát hiện và cổ vũ các năng khiếu toán học trong lứa tuổi học sinh, tiếp nối sự thành công của kỳ thi trong ba năm trước, Hội Toán học Việt Nam phối hợp với Trung tâm Phát triển KHCN & Tài năng trẻ, Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh và Trung tâm Hexagon of Maths & Science tiếp tục tổ chức Kỳ thi Tìm kiếm tài năng toán học trẻ năm 2019. Đây là một sân chơi bổ ích, khuyến khích học sinh yêu mến và ham thích môn Toán, thúc đẩy sự đổi mới trong giảng dạy và học tập toán trong trường phổ thông. Kỳ thi MYTS năm nay được tổ chức dành cho lứa tuổi học sinh từ lớp 3 đến lớp 9 và tại 5 điểm thi trên toàn quốc, với sự phối hợp của nhiều đơn vị: Học viện Kỹ thuật Quân sự,

ĐH Hải Phòng, ĐH Khoa học Tự nhiên-ĐHQG Tp. HCM, THPT chuyên Phan Bội Châu (Nghệ An), THPT chuyên Lam Sơn (Thanh Hóa).

Hơn 9.200 thí sinh đã tham gia vòng 1 được tổ chức vào ngày 24/3/2019. Có 30% thí sinh đạt kết quả tốt nhất trong từng khối lớp đã được lựa chọn dự thi vòng hai vào ngày 21/4/2019. Công tác ra đề và chấm thi cũng đã được Ban tổ chức đặc biệt chú ý và được dư luận đánh giá là chất lượng cao và nghiêm túc. Ban giám khảo đã trao tổng cộng 1,412 huy chương vàng, bạc, đồng theo tỷ lệ 1:2:4. Ngoài ra, Ban tổ chức cũng trao giải đặc biệt cho 50 học sinh đạt kết quả xuất sắc nhất và tuyên dương 7 thủ khoa của từng khối lớp.

Tin thể giới

Ngày "Các nhà toán học nữ" lần đầu tiên đã được tổ chức vào 12/5/2019. Ủy ban các Nhà Toán học Nữ của Liên đoàn Toán học Thế giới, theo đề nghị của TS. Ashraf Daneshkhah – thành viên Ủy ban Phụ nữ của Hội Toán học Iran – đã chọn ngày 12/5, sinh nhật của nhà toán học Maryam Mirzakhani, làm ngày "Các nhà toán học nữ". Hàng năm, cộng đồng toán học sẽ kỷ niệm ngày này để khuyến khích phụ nữ tiếp tục những hoạt động xuất sắc trong lĩnh vực toán học. (Theo Liên đoàn Toán học Thế giới)

Goro Shimura, giáo sư danh dự về toán học của Đại học Princeton, đã mất ngày 3/5/2019, ở tuổi 89.

Goro Shimura trở thành giáo sư tại Princeton vào năm 1964 và nghỉ hưu vào tháng 7/2019. Shimura có nhiều đóng góp quan trọng trong hình học đại số và lý thuyết số, đặc biệt trong lý thuyết các dạng tự đẳng cấu. Ông đã nhận được nhiều vinh dự và giải thưởng, trong đó có Học bổng Guggenheim (1970), Giải thưởng Cole (1976), và Giải thưởng Steele (1996). Shimura đã hướng dẫn hơn 28 nghiên cứu sinh ở Princeton, và nhiều người trong đó đã trở thành những chuyên gia hàng đầu. (Theo Đại học Princeton)

Thông tin hội nghị

Hội nghị Toán học Miền Trung – Tây Nguyên lần thứ ba, sẽ được tổ chức tại Trường Đại học Tây Nguyên từ 2 đến 4/8/2019. Hội nghị nhằm kết nối, thúc đẩy hoạt động nghiên cứu, trao đổi, giảng dạy và ứng dụng toán học giữa các trường đại học, cao đẳng khu vực Miền Trung – Tây Nguyên và cả nước.

CÁC TIỂU BAN CỦA HỘI NGHỊ: Đại số – Hình học – Tôpô; Giải tích toán học; Tối ưu, Tính toán khoa học và Cơ sở toán cho Tin học; Xác suất – Thống kê và Toán tài chính; Giảng dạy và Lịch sử toán học.

HÌNH THỨC ĐĂNG KÝ: Đăng ký trực tuyến tại Website Hội thảo tại

<http://hnthmttn.ddns.net/Register.aspx>

Hội nghị phí: 300.000 VNĐ (miễn hội nghị phí với học sinh, SV, NCS).

CÁC MỐC THỜI GIAN CHÍNH:

- Trước ngày 20/06/2019: Đăng ký tham gia Hội nghị và Nộp báo cáo tóm tắt.
- 30/06/2019: Ban tổ chức sẽ gửi giấy mời và Thông báo số 2.

Ban tổ chức sẽ bố trí chỗ ở miễn phí trong ký túc xá của nhà trường cho những đại biểu có nhu cầu. Hội nghị rất mong nhận được sự hợp tác, tài trợ của các cơ quan, trường, viện và sự tham gia nhiệt tình của các nhà toán học trong cả nước.

Thông tin chi tiết hơn có tại trang chủ của hội nghị: <http://hnthmttn.ddns.net>.

Thông tin luận án tiến sĩ năm 2017 và 2018 (tiếp theo và hết)

Danh sách các nghiên cứu sinh đã bảo vệ thành công luận án tiến sĩ ngành Toán và Lý luận & Phương pháp dạy học môn Toán năm 2017 và.

Trường Đại học Vinh

6. Phạm Trí Nguyên

Tên luận án: *Một số dạng luật số lớn cho dãy và mảng các biến ngẫu nhiên trong không gian tổ hợp lồi*

CN: Lý thuyết xác suất và thống kê toán học 62.46.01.06

Ngày bảo vệ: 21/12/2017

7. Trần Văn Trung

Tên luận án: *Dạy học toán trung học phổ thông chuyên theo hướng tiếp cận thuyết đa trí tuệ*

CN: Lý luận và phương pháp dạy học bộ môn toán 9.14.01.11

Ngày bảo vệ: 14/03/2018

Học viện Công nghệ bưu chính viễn thông

1. Cao Xuân Tuấn

Tên luận án: *Nghiên cứu phương pháp tìm kiếm tài liệu dựa trên công thức toán*

CN: Hệ thống thông tin 62.48.01.04

Ngày bảo vệ: 16/01/2017

Học viện Khoa học và Công nghệ

1. Nguyễn Đình Dương

Tên luận án: *Một số phương pháp tìm nghiệm bài toán cân bằng đồng thời là điểm bất động của nửa nhóm ánh xạ không giãn*

CN: Toán ứng dụng 62.46.01.12

Ngày bảo vệ: 09/01/2017

2. Lê Anh Tú

Tên luận án: *Phát triển các cấu trúc, thuật học của mạng nơron tự tổ chức*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 62.46.01.10

Ngày bảo vệ: 09/01/2017

3. Nguyễn Thị Lan Hương

Tên luận án: *Rút gọn thuộc tính trong bảng quyết định động theo tiếp cận thô*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 62.46.01.10

Ngày bảo vệ: 19/01/2017

4. Lâm Thành Hiền

Tên luận án: *Phát triển một số kỹ thuật phát hiện lái xe ngủ gật dựa trên trạng thái mắt và hành vi gạt lắc*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 62.46.01.10

Ngày bảo vệ: 17/06/2017

5. Mai Thuý Nga

Tên luận án: *Xử lý và tối ưu hoá truy vấn trong cơ sở dữ liệu hướng đối tượng phân tán*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 62.46.01.10

Ngày bảo vệ: 26/06/2017

6. Ngô Trường Giang

Tên luận án: *Nâng cao hiệu quả tra cứu ảnh dựa trên hiệu chỉnh độ đo tương tự và phản hồi liên quan*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 62.46.01.10
Ngày bảo vệ: 27/07/2017

7. Đỗ Đình Cường

Tên luận án: *Nghiên cứu cải tiến hiệu năng giao thức định tuyến AODV và AOMDV trong mạng manet*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 62.46.01.10
Ngày bảo vệ: 26/08/2017

8. Ngô Thị Kim Quy

Tên luận án: *Phương pháp lập giải bài toán biên hai điểm cho phương trình và hệ phương trình vi phân cấp bốn*

CN: Toán ứng dụng 62.46.01.12
Ngày bảo vệ: 12/01/2018

9. Hà Đại Tôn

Tên luận án: *Phân tích cấu trúc hình học trang ảnh tài liệu dựa trên phương pháp ngưỡng thích nghi*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 62.46.01.10
Ngày bảo vệ: 30/03/2018

10. Trần Văn Sự

Tên luận án: *Điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ dưới ngôn ngữ của đạo hàm tiếp liên*

CN: Toán ứng dụng 62.46.01.12
Ngày bảo vệ: 09/05/2018

11. Đào Xuân Kỳ

Tên luận án: *Ứng dụng mô hình xích Markov và chuỗi thời gian mở trong dự báo*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 9.46.01.10
Ngày bảo vệ: 31/05/2018

12. Nguyễn Dương Nguyễn

Tên luận án: *Các phương pháp hiệu chỉnh lặp Newton – Kantorovich và điểm gần kề cho phương trình toán tử không chỉnh phi tuyến đơn điệu*

CN: Toán ứng dụng 9.46.01.12
Ngày bảo vệ: 07/11/2018

13. Nguyễn Đình Dũng

Tên luận án: *Động lực học ngược và điều khiển chuyển động của robot song song delta không gian*

CN: Cơ kỹ thuật 9.52.01.01
Ngày bảo vệ: Năm 2018

Học viện Kỹ thuật Quân Sự

1. Nguyễn Thị Quyên

Tên luận án: *Nghiên cứu điểm chuyển trong mô hình hồi quy tuyến tính hai pha*

CN: Toán ứng dụng 62.46.01.12
Ngày bảo vệ: 10/02/2017

2. Trương Thị Thu Hà

Tên luận án: *Tương quan giữa các lớp phụ thuộc logic trong cơ sở dữ liệu*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 62.46.01.10
Ngày bảo vệ: 25/01/2018

3. Hoàng Văn Việt

Tên luận án: *Phát triển giao thức thiết lập khoá an toàn và ứng dụng cho mạng thông tin VSAT*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 62.46.01.10
Ngày bảo vệ: 27/01/2018

4. Đậu Hải Phong

Tên luận án: *Nghiên cứu phát triển mô hình, thuật toán khai phá tập phần tử có trọng số và lợi ích cao*

CN: Cơ sở Toán học cho tin học 9.46.01.10
Ngày bảo vệ: 10/10/2018

Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam

1. Nguyễn Đức Thành

Tên luận án: *Phát triển tư duy thuật giải và tư duy kỹ thuật cho sinh viên cao đẳng kỹ thuật trong dạy học môn Toán cao cấp*

CN: LL&PPDH bộ môn Toán 62.14.01.11
Ngày bảo vệ: 10/05/2017

Viện Khoa học và Công nghệ Quân sự

1. Nguyễn Hữu Hùng

Tên luận án: *Nghiên cứu giải pháp xây dựng hạ tầng cơ sở khoá công khai (PKI) an toàn phục vụ xác thực và bảo mật cho các cơ quan Đảng, Nhà nước, an ninh, quốc phòng*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 62.46.01.10
Ngày bảo vệ: 27/06/2017

2. Đặng Minh Tuấn

Tên luận án: *Nghiên cứu xây dựng một số dạng lược đồ mới cho chữ ký số tập thể*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 62.46.01.10
Ngày bảo vệ: 10/08/2017

3. Vũ Văn Hiệu

Tên luận án: *Nghiên cứu một số kỹ thuật phân hạng trong tra cứu ảnh dựa vào nội dung*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 62.46.01.10
Ngày bảo vệ: 21/08/2017

4. Nguyễn Văn Hùng

Tên luận án: *Nghiên cứu phương pháp xử lý ảnh trong phát hiện, bám một số chủng loại mục tiêu và áp dụng trong điều khiển vũ khí tự động*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 62.46.01.10
Ngày bảo vệ: 13/10/2017

5. Phạm Minh Tuấn

Tên luận án: *Một số phương pháp giải bài toán cân bằng và ứng dụng*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 62.46.01.10
Ngày bảo vệ: 13/03/2018

6. Phan Thanh Toàn

Tên luận án: *Các phương pháp gần đúng dựa trên tối ưu bày đàn và tiến hoá vi phân giải bài toán lập lịch luồng công việc trong môi trường điện toán đám mây*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 62.46.01.10
Ngày bảo vệ: 14/03/2018

7. Cao Thị Luyến

Tên luận án: *Nghiên cứu phát triển một số phương pháp thủy văn ứng dụng trong xác thực và bảo vệ bản quyền số*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 9.46.01.10
Ngày bảo vệ: 01/06/2018

8. Nguyễn Bùi Cương

Tên luận án: *Nghiên cứu xây dựng các thành phần mật mã cho thuật toán mã khối hạng nhẹ*

CN: Toán học 9.46.01.01
Ngày bảo vệ: 10/07/2018

9. Đào Tuấn Hùng

Tên luận án: *Nghiên cứu phát triển một số lược đồ chữ ký số hướng tới nhóm*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 9.46.01.10
Ngày bảo vệ: 25/07/2018

10. Phạm Văn Nhã

Tên luận án: *Nghiên cứu một số thuật toán đồng phân cụm mờ cải tiến trong xử lý dữ liệu ảnh*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 9.46.01.10
Ngày bảo vệ: 31/07/2018

11. Ngô Xuân Phương

Tên luận án: *Một số thuật toán tìm điểm chung của tập nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân và tập điểm bất động của ánh xạ không giãn*

CN: Toán học 9.46.01.01
Ngày bảo vệ: 03/08/2018

12. Nguyễn Đào Trường

Tên luận án: *Nghiên cứu, xây dựng giải pháp đảm bảo truyền số liệu an toàn trong mạng điều hành giám sát công nghiệp*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 9.46.01.10
Ngày bảo vệ: 31/08/2018

13. Đỗ Việt Bình

Tên luận án: *Nghiên cứu phát triển giao thức trao đổi khóa an toàn*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 9.46.01.10
Ngày bảo vệ: 01/11/2018

14. Nguyễn Trung Dũng

Tên luận án: *Một số dạng hàng đợi và các nguyên lý xử lý*

CN: Cơ sở toán học cho tin học 9.46.01.10
Ngày bảo vệ: 27/12/2018

Viện Toán học

1. Hà Thị Thu Hiền

Tên luận án: *Idêan nguyên tố liên kết của lũy thừa idêan cạnh*

CN: Đại số và lý thuyết số 62.46.01.04
Ngày bảo vệ: 07/06/2017

2. Đào Quang Khải

Tên luận án: *Một số tính chất định tính của phương trình Navier-Stokes*

CN: Phương trình vi phân và tích phân 62.46.01.03
Ngày bảo vệ: 16/6/2017.

3. Ngô Thị Ngoan

Tên luận án: *Nguyên lý Hasse cho nhóm đại số trên trường toàn cục*

CN: Đại số và lý thuyết số 62.46.01.04
Ngày bảo vệ: 26/06/2017

4. Hoàng Thế Tuấn

Tên luận án: *Về một số vấn đề định tính của hệ phương trình vi phân phân thứ*

CN: Phương trình vi phân và tích phân 62.46.01.03
Ngày bảo vệ: 17/07/2017

5. Nguyễn Thị Ngọc Oanh

Tên luận án: *Data assimilation in heat conduction*

CN: Phương trình vi phân và tích phân 62.46.01.03
Ngày bảo vệ: 24/07/2017

6. Nguyễn Hữu Sáu

Tên luận án: *Tính ổn định của hệ động lực tuyến tính suy biến có trễ*

CN: Toán ứng dụng 62.46.01.12
Ngày bảo vệ: 29/01/2018

7. Nguyễn Đại Dương

Tên luận án: *Đôi ngẫu Tanaka trên vành Dedekind và ứng dụng*

CN: Đại số và lý thuyết số 62.46.01.04
Ngày bảo vệ: 11/06/2018

8. Dương Thị Việt An

Tên luận án: *Subdifferentials of optimal value functions in parametric convex optimization problems*

CN: Toán ứng dụng 62.46.01.12
Ngày bảo vệ: 30/08/2018

9. Tạ Thị Huyền Trang

Tên luận án: *Một số bài toán điều khiển cho hệ phương trình vi phân có trễ biến thiên*

CN: Toán ứng dụng 62.46.01.12
Ngày bảo vệ: 29/10/2018.

THÔNG TIN TOÁN HỌC, Tập 23 Số 2 (2019)

Hội nghị Toán học Việt-Mỹ 2019	1
Lê Thị Lan Anh, Đoàn Trung Cường, Nguyễn Đăng Hợp	
Một chuyên thăm toán học đến Hà Nội	7
Neal Koblitz	
<i>Đỗ Việt Cường dịch</i>	
Giới thiệu về mô hình Ising	15
Cần Văn Hảo	
Định lý Hall và ứng dụng (Phần 2)	23
Trần Minh Hiền	
Tin tức hội viên và hoạt động toán học	29
Tin thể giới	30
Thông tin hội nghị	30
Thông tin luận án tiến sĩ năm 2017 và 2018 (tiếp theo và hết)	31