Hội Toán Học Việt Nam

THÔNG TIN TOÁN HỌC

Tháng 9 Năm 2016 Tập 20 Số 3

Thông Tin Toán Học
(Lưu hành nội bộ)

- Địa chỉ liên hệ

*Bản tin: **Thông Tin Toán Học***
Viện Toán Học
18 Hoàng Quốc Việt, 10307 Hà Nội

Email: ttth@vms.org.vn

Trang web:
http://www.vms.org.vn/ttth/ttth.htm

Ảnh bìa 1. Nhà toán học người Pháp Jean-Christophe Yoccoz (1957 - 2016), huy chương Fields 1994. *Nguồn: Internet*

- Bản tin **Thông Tin Toán Học** nhằm mục đích phản ánh các sinh hoạt chuyên môn trong cộng đồng toán học Việt Nam và quốc tế. Bản tin ra thường kỳ 4 số trong một năm.

- Thể lệ gửi bài: Bài viết bằng tiếng Việt. Tất cả các bài, thông tin về sinh hoạt toán học ở các khoa (bộ môn) toán, về hướng nghiên cứu hoặc trao đổi về phương pháp nghiên cứu và giảng dạy đều được hoan nghênh. Bản tin cũng nhận đăng các bài giới thiệu tiềm năng khoa học của các cơ sở cũng như các bài giới thiệu các nhà toán học. Bài viết xin gửi về tòa soạn theo email hoặc địa chỉ ở trên. Nếu bài được đánh máy tính, xin gửi kèm theo file với phông chữ unicode.

Trang web của Hội Toán học:
http://www.vms.org.vn

KIẾN NGHỊ CỦA HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM
Về Dự thảo phương án thi trắc nghiệm môn Toán, kỳ thi THPT 2017

Ngày 23/9/2016, Ban chấp hành Hội Toán học Việt Nam đã có ý kiến chính thức gửi Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo về việc triển khai hình thức thi trắc nghiệm đối với môn Toán trong kỳ thi THPT 2017. Dưới đây là nội dung bản kiến nghị.

Kính gửi: Ông Phùng Xuân Nhạ, Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo

Ngày 8/9/2016 Bộ Giáo dục và Đào tạo đã công bố "Dự thảo phương án thi, xét tốt nghiệp Trung học phổ thông và tuyển sinh đại học, cao đẳng năm 2017".

Nhận thấy đây là một vấn đề hệ trọng của nền giáo dục nước nhà, không chỉ trước mắt mà còn lâu dài, Ban chấp hành (BCH) Hội Toán học Việt Nam trình bày một số ý kiến như sau:

1. Đối với môn Toán, thi tự luận có ưu điểm vượt trội trong đánh giá tư duy và năng lực giải quyết vấn đề của học sinh, mặc dù kết quả thi có thể phụ thuộc ít nhiều vào chủ quan người chấm. Thi theo hình thức trắc nghiệm khách quan tránh được yếu tố này, nhưng lại có nhiều hạn chế trong việc đánh giá tư duy và năng lực tổng hợp, phân tích, sáng tạo của thí sinh. Đặc biệt, thi theo hình thức trắc nghiệm có tính phân loại không cao, nhất là khi ngân hàng đề thi chưa đảm bảo chất lượng, chưa được thử nghiệm trên số mẫu đủ lớn, trong một thời gian đủ dài, nhằm hình thành một hệ thống câu hỏi tốt, có khả năng phân loại thí sinh.

2. Để có đủ cơ sở khoa học và sức thuyết phục, các kỳ thi trắc nghiệm Toán đã được thực hiện ở một vài nơi của Việt Nam cần được đánh giá công bằng về tính khoa học và hiệu quả thực tiễn, phân tích lý do vì sao phải chuyển đổi từ thi tự luận sang thi trắc nghiệm môn Toán... Các nghiên cứu đánh giá khoa học, hệ thống, chính thức về thi tự luận và thi trắc nghiệm cần được công bố rộng rãi để nhân dân biết, hiểu, và hy vọng được họ ủng hộ. Việc chuyển đổi ngay khi chưa có các thông tin cần thiết này, chưa có sự chuẩn bị về tâm lý, cũng như chưa dành một thời gian đủ lớn để xử lý các vấn đề tồn đọng sẽ tạo thành mối quan ngại lớn, gây xáo trộn trong việc học tập của học sinh, trong tâm lý của phụ huynh học sinh, và có thể gây hoang mang trong toàn xã hội.

3. Năm 2017, nhiều khả năng hầu hết các trường đại học (trừ số ít các trường năng khiếu như nghệ thuật, thể thao...) sẽ vẫn sử dụng kết quả kì thi tốt nghiệp THPT Quốc gia để tuyển sinh vào đại học và cao đẳng, mà không tổ chức kỳ thi tuyển sinh riêng. Thi trắc nghiệm (môn Toán), đặc biệt ở đặc thù hiện nay của Việt Nam, chưa có khả năng phân loại cao. Việc sử dụng kết quả của nó để tuyển sinh vào đại

học, cao đẳng là một điều đáng lo ngại, có nhiều khả năng gây mất công bằng cho thí sinh.

Từ những phân tích nêu trên, BCH Hội Toán học Việt Nam kính đề nghị xem xét một số điểm sau đây:

a) Hoãn việc áp dụng hình thức thi trắc nghiệm khách quan, tiếp tục thi tự luận đối với môn Toán trong kì thi xét tốt nghiệp THPT và tuyển sinh Đại học và Cao đẳng năm 2017.

b) Tiến hành những nghiên cứu hệ thống, khoa học; bao gồm:

- Tổ chức các Hội thảo quốc gia nhằm phân tích những luận cứ khoa học của việc nên hay không nên thi trắc nghiệm môn Toán; đánh giá hiệu quả thực tiễn của kì thi trắc nghiệm Toán tại một vài nơi của Việt Nam trong những năm qua.

- Trên cơ sở kết quả các Hội thảo quốc gia, sẽ quyết định có nên chuyển đổi thi môn toán từ tự luận sang trắc nghiệm hay không. Trong trường hợp giả định có chuyển đổi, cần một thời gian chuẩn bị hợp lý.

BCH Hội Toán học Việt Nam trân trọng đề nghị có cuộc đối thoại giữa các cấp lãnh đạo có quyền ra quyết sách và BCH Hội nhằm mục tiêu cao nhất là các đổi mới trong kì thi tốt nghiệp THPT Quốc gia nói riêng, và trong giáo dục Việt Nam nói chung, luôn đạt được sự đồng thuận xã hội, và hứa hẹn thành công, đáp ứng mục tiêu giáo dục và nguyện vọng của tất cả học sinh, của mỗi gia đình, nhà trường, và của toàn xã hội.

TM. BAN CHẤP HÀNH
Tổng thư ký
Phùng Hồ Hải

THÔNG BÁO CỦA BAN CHẤP HÀNH HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Ngày 27/9/2016, theo lời mời của Bộ Giáo dục và Đào tạo (GD-ĐT), Ban chấp hành (BCH) Hội Toán học Việt Nam đã cử đại diện tới trao đổi về việc triển khai hình thức thi trắc nghiệm môn Toán tại kỳ thi THPT năm 2017. Đoàn đại biểu của BCH Hội Toán học bao gồm GS. TSKH. Phùng Hồ Hải (Phó chủ tịch-Tổng thư ký), GS. TSKH. Nguyễn Hữu Việt Hưng (Phó chủ tịch), GS. TSKH. Phan Quốc Khánh (Phó chủ tịch), và PGS. TSKH. Vũ Hoàng Linh (Phó tổng thư ký).

Về phía Bộ GD-ĐT, GS. TSKH. Bùi Văn Ga - Thứ trưởng, PGS. TS. Mai Văn Trinh - Cục trưởng Cục Khảo thí & Kiểm định chất lượng giáo dục, TS. Vũ Đình Chuẩn, Vụ trưởng Vụ Trung học phổ thông cùng một số cán bộ chuyên môn khác đã có mặt. Ngoài ra Bộ GD-ĐT còn mời PGS.TS Hoàng Minh Sơn, Hiệu trưởng trường ĐHBK Hà Nội và TS. Sái Công Hồng, Giám đốc Trung tâm Khảo thí & KĐCLGD, Đại học Quốc gia Hà Nội.

Đại diện BCH đã phân tích kỹ hơn những luận điểm đã nêu ra trong kiến nghị số 76-16/HTH để thuyết phục Bộ GD-ĐT thấy rõ những cơ sở khoa học và căn cứ khoa học của những đề xuất của BCH Hội. Đặc biệt, đại diện BCH đã phân tích về sự khác nhau giữa mô hình giáo dục Việt Nam và mô hình giáo dục phổ thông và đại học tại Hoa Kỳ, nơi không có kỳ thi tốt nghiệp phổ thông (chỉ có học bạ xác nhận học đủ 12 năm), những học sinh muốn học tiếp ở các trường đại học, cao đẳng, từ năm lớp 10, 11, thường tự lấy chứng chỉ tại một số kỳ thi trắc nghiệm hoặc kết hợp trắc nghiệm-tự luận được tổ chức bởi các tổ chức tư nhân như SAT, ACT, AP, để có một trong nhiều chứng chỉ cho hồ sơ xét tuyển vào đại học, cao đẳng; nêu việc chuyển đổi hình thức thi cử và xây dựng ngân hàng đề thi được thực hiện với lộ trình cẩn thận, có thẩm định, phản biện độc lập, trong nhiều năm trước khi áp dụng trong toàn quốc tại Trung Quốc hay Nhật Bản. Đại diện của BCH cũng chất vấn việc đề xuất thay đổi hình thức thi môn Toán của Bộ trước khi đưa ra đã tham khảo ý kiến những nhà toán học có uy tín nào trong nước chưa, và đã được ai trong số đó ủng hộ? Nếu coi việc thực hiện thi trắc nghiệm ở ĐHQG Hà Nội trong tuyển sinh như một bước thử nghiệm, vì sao Khoa Toán - Cơ - Tin học, đơn vị duy nhất nghiên cứu và giảng dạy Toán ở ĐHQG Hà Nội không được tham vấn về vấn đề này?

Đại diện Bộ GD-ĐT đã cung cấp cho đại diện BCH một số thông tin liên quan tới quyết định triển khai hình thức thi trắc nghiệm môn Toán cũng như giải thích quyết định của Bộ.

Tuy nhiên với những câu hỏi và đề xuất sau từ phía BCH Hội:

- Tại sao nhất định phải triển khai hình thức thi trắc nghiệm môn Toán ngay trong năm 2017, khi mà kỳ thì này rất quan trọng, với kết quả không chỉ dùng để đánh giá tốt nghiệp mà còn dùng để xét tuyển cho đa số các trường đại học và cao đẳng;

- Việc chuẩn bị cho hình thức thi trắc nghiệm vào năm 2017 tới giờ mới bắt đầu có quá vội vàng không, đặc biệt là về ngân hàng đề thi, vì Bộ chỉ khẳng định sẽ xong trước khi thi mà không đề cập đến quá trình thẩm định và phản biện độc lập;

- Do hệ lụy có thể nhìn thấy được của hình thức thi trắc nghiêm môn Toán tới việc học toán và dạy toán tại cấp THPT trong đặc trưng của môi trường giáo dục Việt Nam, đặc biệt là tới khả năng suy luận, đặt và giải quyết vấn đề (không chỉ của những học sinh chuyên biệt theo hướng toán học) cần tổ chức hội thảo khoa học toàn quốc để cân nhắc việc có nên hay không nên tổ chức thi THPT môn toán theo hình thức trắc nghiệm năm 2017 và những năm sau.

Đại diện của Bộ GD-ĐT đã không đưa ra được câu trả lời thỏa đáng cũng như không đáp ứng đề xuất của đại diện BCH Hội Toán học. Cuộc họp kết thúc mà không có sự đồng thuận nào.

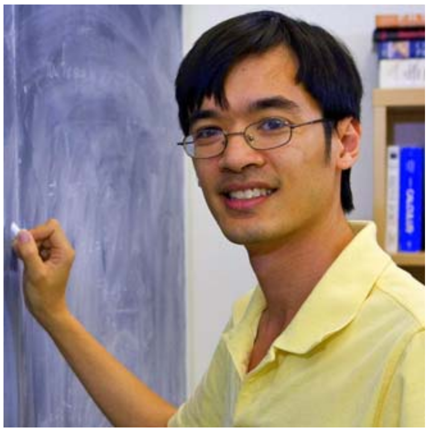
BAN CHẤP HÀNH HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Về câu hỏi trắc nghiệm trong toán học[1]

Terence Tao
(Đại học California tại Los Angeles, Mỹ)

Lời người dịch: Terence Tao là một thần đồng toán học khi còn bé, và là một nhà toán học xuất sắc hiện nay, ông đã được trao giải thưởng Fields năm 2006 (khi 31 tuổi) cùng rất nhiều giải thưởng khác. Ông học phổ thông và đại học ở Úc và làm nghiên cứu sinh tại Đại học Princeton, Mỹ, nay là giáo sư của Đại học California tại Los Angeles (UCLA). Ngoài nghiên cứu toán học, Tao còn quan tâm nhiều tới toán học phổ thông và giảng dạy toán học.

Là một người có nhiều kinh nghiệm với trắc nghiệm trong toán học, những ý kiến của Tao dưới đây chắc sẽ có ích cho việc tổ chức thi trắc nghiệm nói riêng cũng như công tác đánh giá trong môn Toán nói chung.



Terrence Tao. *Nguồn: Internet*

Tôi đang xây dựng một trang web giúp sinh viên tự kiểm tra với các câu hỏi trắc nghiệm. Trong khi trang web đang được nâng cấp, đây là một thời điểm tốt để tổng hợp những ý kiến và suy nghĩ của tôi về việc sử dụng câu hỏi trắc nghiệm trong giảng dạy toán học, và về những khả năng chúng có thể được sử dụng trong tương lai. Một cách ngắn gọn, quan điểm của tôi là, câu hỏi trắc nghiệm có những hạn chế đáng kể khi sử dụng trong lớp học với mô hình truyền thống, nhưng có rất nhiều tiềm năng thú vị và chưa được khai thác khi được sử dụng như một công cụ tự đánh giá.

1. Câu hỏi trắc nghiệm trên lớp

Nói chung có vẻ rằng tính rõ ràng và chính xác của các mệnh đề toán học sẽ phù hợp với phương thức trắc nghiệm; ngược với một số lĩnh vực tri thức khác, nhiều câu hỏi trong toán học *có* chỉ một câu trả lời đúng và khách quan, và tất cả các câu trả lời khác đều được công nhận là không chính xác. Với một bài kiểm tra trắc nghiệm, học sinh có thể được kiểm tra với các câu hỏi như vậy một cách khách quan; thực vậy, việc chấm điểm cho các câu hỏi đó thậm chí có thể được làm tự động bởi một máy tính hoặc máy quét. Miễn là câu hỏi được phát biểu một cách rõ ràng (và đáp án là chính xác), việc chấm điểm ít vướng những nhầm lẫn chủ quan hơn các phương tiện kiểm tra

[1]Bản gốc xem tại https://terrytao.wordpress.com/2008/12/14/on-multiple-choice-questions-in-mathematics/

khác. Điểm mạnh cuối cùng là, hình thức thi trắc nghiệm rất quen thuộc với hầu như tất cả các sinh viên đại học (những người đã có thể phải vượt qua kỳ thi trắc nghiệm để nhập học) và như vậy không cần giải thích nhiều khi kiểm tra.

Mặt khác, hình thức trắc nghiệm, như nó hiện đang được sử dụng trong các kỳ thi toán, có một số điểm yếu nghiêm trọng, theo ý kiến của tôi, làm cho nó kém hiệu quả hơn so với các hình thức kiểm tra khác đối với khóa học toán ở những năm cuối đại học, mặc dù có một số cách loại bỏ các khiếm khuyết rõ ràng nhất của hình thức thi này. Có lẽ vấn đề rõ ràng nhất là cách tiếp cận cứng nhắc với những sai lầm, làm lệch lạc các mối tương quan giữa năng lực và kết quả đánh giá: một học sinh đã có cách tiếp cận đúng cho một câu hỏi, nhưng bị nhầm dấu hoặc hiểu hơi nhầm câu hỏi, có thể mất toàn bộ điểm câu hỏi đó, trong khi một học sinh không hề biết phải làm gì, và chỉ đơn giản là đoán ngẫu nhiên, có thể được điểm cho một câu hỏi trắc nghiệm thuần túy nhờ may mắn, trong các hình thức kiểm tra khác điều này khó xảy ra hơn nhiều. (Tất nhiên, ta có thể giảm thiểu vấn đề này bằng cách xây dựng các câu hỏi đơn giản và rõ ràng, và đảm bảo rằng các câu trả lời không chính xác sinh ra bởi những lỗi nhỏ không được đưa ra như là một trong những lựa chọn.) Một vấn đề nữa của câu hỏi trắc nghiệm là dễ bị một số loại gian lận và tiêu cực hơn các định dạng kiểm tra khác, vì đáp án dễ dàng được sao chép và sử dụng, thậm chí bởi những học sinh không thực sự hiểu kiến thức. (Vấn đề cụ thể này có thể phần nào được bảo vệ bằng cách xáo trộn các câu hỏi riêng cho từng học sinh, mặc dù điều này tất nhiên làm việc chấm bài cũng như việc cung cấp đáp án khó khăn hơn.) Một vấn đề thứ ba là khi học sinh thu được câu trả lời không nằm trong số các lựa chọn được liệt kê thì sẽ có khuynh hướng làm bừa, nhiều khi lý luận phi logic để đi đến một trong những câu trả lời được liệt kê, đó không phải là một thói quen tốt cho một người làm toán.

Tuy nhiên, một vấn đề sâu sắc hơn, là những câu trắc nghiệm này cho một ấn tượng sai lệch về việc thế nào là giải một bài toán, và làm thế nào để thực hiện điều đó. Trong nghiên cứu toán học, các câu hỏi không thường đi kèm với một danh sách của năm phương án với một phương án chính xác; thông thường, việc hình dung ra những câu trả lời tiềm năng, hợp lý, hoặc có nhiều khả năng đúng, hoặc thậm chí kiểu câu trả lời có thể đúng hay thậm chí có nên đặt câu hỏi như vậy không, cũng quan trọng không kém việc xác định câu trả lời đúng. Câu hỏi trắc nghiệm có xu hướng khuyến khích cho các cách tiếp cận dùng tiểu xảo hoặc cẩu thả để giải quyết vấn đề, thay vì tiếp cận thận trọng, có cân nhắc và tinh tế; đặc biệt, kiểu hỏi như vậy khuyến khích xu hướng áp dụng thiếu suy nghĩ những quy tắc hình thức để đi đến câu trả lời, thiếu suy nghĩ kỹ lưỡng liệu việc áp dụng có được phép đối với câu hỏi đó hay không. (Thực sự, việc phân tích quá chi ly một đề trắc nghiệm, tìm kiếm những mẹo mực, những chỗ thiếu chặt chẽ, hoặc đặc biệt trong cách diễn đạt câu hỏi, hoặc cố gắng áp dụng một số loại "siêu quy tắc" nhằm đoán mò ra ý của người ra đề [xem cảnh này từ vở "The Princess Bride"(2) cho một ví dụ cực đoan kiểu này], có thể làm cho những sinh viên khá hơn, hiểu nội dung kiến thức, lại có kết quả kém hơn so với những người chỉ đơn giản là áp dụng các quy tắc mà họ được dạy mà không có sự hiểu nội dung kiến thức. Ngược lại,

(2) https://www.youtube.com/watch?v=9s0UURBihH8

một đề bài quá mẹo, được thiết kế để bẫy những học sinh áp dụng máy móc các quy tắc, không xem các điều kiện cho phép việc áp dụng, thường sẽ được đánh giá (khá hợp lý) là không công bằng với học sinh.) Trong khi việc luyện tập các quy tắc cơ bản (ví dụ như các quy tắc và quy trình trong môn Giải tích) chắc chắn là cần thiết, đặc biệt là ở cấp trung học phổ thông và giai đoạn đầu đại học môn toán, tại thời điểm chuyển lên giai đoạn cao hơn trong bậc đại học sinh viên cần bắt đầu hiểu các cơ sở lý thuyết và những giải thích cho những quy tắc đó, như là một phần của việc phát triển tư duy căn bản đối với môn học. (Ngoài ra, khi học những môn nâng cao, các quy tắc sẽ có nhiều ngoại lệ và điểm yếu, khiến việc áp dụng chúng một cách thiếu suy nghĩ trở nên nguy hiểm. Ví dụ, tính toán một tích phân đường bằng cách tịnh tiến đồng thời các chu trình rất dễ cho một câu trả lời sai nếu không có một cảm giác tốt khi nào một tích phân đường sẽ hội tụ tới 0 khi chuyển qua một giới hạn nào đó, và khi nào thì không. Cách học thuộc một số quy tắc đơn giản để biết khi nào có thể tích phân an toàn và khi nào không, sẽ không cho kết quả tốt vì có rất nhiều biến thể khác nhau (của bài toán), đặc biệt là trong các ứng dụng thực tế; cách duy nhất đáng tin cậy để tiến hành là thực sự hiểu cách ước lượng tích phân và tính toán giới hạn).

Nhưng có lẽ hơn tất cả, câu hỏi trắc nghiệm tạo ý tưởng rằng câu trả lời cho một câu hỏi toán học là quan trọng hơn so với *quá trình* đi đến câu trả lời đó (cả những hiểu biết thu được trong quá trình đó, cả cách trao đổi việc đó một cách hiệu quả với người khác). Thật sự, bản thân *quá trình* giải bài toán quan trọng hơn nhiều so với câu trả lời, đặc biệt đối với những câu hỏi nhân tạo, chẳng hạn như là một câu hỏi thiết kế nhằm mục đích kiểm tra. Biết được quá trình suy luận của sinh viên để đi đến một câu trả lời - thậm chí cả một trả lời sai - sẽ cung cấp cho ta một bức tranh chi tiết về khả năng của học sinh khi xử lý những câu hỏi tương tự (hoặc phức tạp hơn) trong tương lai, trong khi việc học sinh lựa chọn một câu trả lời đúng trong số năm giải pháp cho ta ít thông tin hơn nhiều. Việc xác định điểm mạnh và điểm yếu cụ thể trong lý luận của học sinh cho nhiều thông tin có giá trị hơn trong quá trình chấm điểm so với việc chỉ đơn giản biết xem một câu hỏi được đưa ra đã được trả lời một cách chính xác hoặc không chính xác.

2. Trắc nghiệm như hình thức tự kiểm tra

Tôi đã thảo luận những hạn của việc sử câu hỏi trắc nghiệm trong kỳ thi trên lớp, đặc biệt là trong các khóa học toán học tại những năm cuối đại học. Mặt khác, tôi cảm thấy rằng các câu hỏi như vậy có thể đóng một vai trò hỗ trợ rất hữu ích trong việc tự kiểm tra cho các khóa học này, đặc biệt là liên quan đến các nội dung kiến thức cơ bản (ví dụ định nghĩa hoặc các quy tắc cơ bản của tính toán). Tôi sẽ chứng minh điều này với một khóa học giả định về đại số ở trung học phổ thông, mặc dù điều này chắc chắn áp dụng được cho nhiều khóa học toán học ở cấp cao hơn.

Giả sử học phần đại số này nhằm dạy cho học sinh cách giải các phương trình đại số. Tất nhiên có nhiều bẫy thông thường mà học sinh gặp phải khi giải các phương trình đó; một trong những ví dụ phổ biến là, từ phương trình như $x^2 = y$ kết luận sai rằng $x = \sqrt{y}$, thay vì nói là $x = \sqrt{y}$ hoặc $x = -\sqrt{y}$. Bây giờ, ta có thể cảnh báo lỗi này trong các lớp học, và học sinh thậm chí có thể ghi chú cảnh báo này, nhưng nó vẫn lặp lại quá thường xuyên trong khi giải quyết bài toán đại số phức tạp hơn trong một bài thi (hoặc tệ hơn, trong một ứng dụng thực tế của đại số). Khi đó, các sinh viên cũng có thể nhận ra nguyên nhân của lỗi - nhưng phản hồi này có thể đến sau nhiều ngày hoặc nhiều tuần từ lần đầu tiên; nếu không được nhắc đi nhắc lại, các lỗi tương tự thì có thể tái phát sau này trong khóa học, hoặc trong các khóa học tiếp theo. Lặp đi lặp lại các bài toán đại số cuối cùng sẽ loại bỏ các lỗi, nhưng nó có thể là một quá trình không hiệu quả.

Đây là nơi mà một bài trắc nghiệm tự làm (đặc biệt, một bài kiểm tra trực tuyến) có thể giúp đỡ, với những câu hỏi như:

Câu hỏi 1. Nếu x và y là các số thực sao cho $x^2 = y$, điều đúng nhất chúng ta có thể nói về x là

(1) $x = \sqrt{y}$.
(2) $x = y^2$.
(3) $x = y^{-2}$.
(4) $x = \sqrt{y}$ hoặc $x = -\sqrt{y}$.
(5) $x = y^{-2}$ hoặc $x = -y^{-2}$.

hoặc pha trộn với nhau với các biến thể như

Câu hỏi 2. Cho x và y là các số thực. Khẳng định nào sau đây là không đủ để suy ra rằng $x^2 = y$?

(1) $x = \sqrt{y}$.
(2) $x = -\sqrt{y}$.
(3) x bằng $+\sqrt{y}$ hoặc $-\sqrt{y}$.
(4) $x = y^2$.
(5) $y = x^2$.

và

Câu hỏi 3. Nếu x và y là các số thực sao cho $x^3 = y$, khi đó đúng nhất có thể nói về x là

(1) $x = \sqrt{y}$.
(2) $x = y^{1/3}$.
(3) $x = +y^{1/3}$ hoặc $x = -y^{1/3}$.
(4) $x = y^{-3}$.
(5) $x = y^{-3}$ hoặc $x = -y^{-3}$.

Những câu hỏi như vậy có cho biết khá trực tiếp (và ngay lập tức) rằng học sinh có mắc sai lầm ở vấn đề cụ thể này không, mà không cần sự can thiệp trực tiếp của một giảng viên hoặc trợ giảng. (Một cách lý tưởng, một bài kiểm tra tự động không chỉ để cho biết ngay lập tức câu trả lời được lựa chọn là đúng hay sai, mà còn để giải thích những gì là sai trong trường hợp này.)

Lưu ý một số khác biệt giữa loại câu hỏi trắc nghiệm kiểu này và loại câu hỏi trắc nghiệm trong một cuộc kiểm tra trên lớp. Trong khung cảnh kỳ thi, người ta thường muốn có những câu hỏi phức tạp hơn để kiểm tra một số khía cạnh của kiến thức cùng một lúc (ví dụ phân tích nhân tử, rút gọn, thế, v.v.) thay vì tập trung một cách cụ thể và đơn giản lên một khía cạnh. (Đặc biệt, khi sinh viên thực sự nắm được kiến thức có thể trả lời mỗi câu hỏi ở đây dễ dàng, mà không cần phải tính toán đáng kể.) Ngoài ra, trong khi các bài kiểm tra trên lớp học phải cố gắng làm cho câu trả lời chính xác khá khác biệt so với các lựa chọn thay thế không chính xác (để phân biệt những người về cơ bản hiểu các kiến thức với những người đang thực sự không biết gì), việc tự kiểm tra sẽ hiệu quả hơn nếu cho phép sự khác biệt khá tinh tế giữa các câu trả lời đúng và những câu trả lời khác, để khuyến khích học sinh suy nghĩ cẩn thận và để chỉ ra những cách đặt vấn đề sai lầm; các loại "câu hỏi lừa" sẽ là không công bằng trong môi trường căng thẳng của một kỳ thi đánh giá trên lớp, nhưng có thể được thực hiện một cách an toàn trong một đề tự kiểm tra.

Câu hỏi trắc nghiệm dường như có hiệu quả nhất khi dùng để nhấn mạnh các định nghĩa chính xác của một khái niệm quan trọng (với mỗi "ε tồn tại một δ" hay "với mỗi δ tồn tại một ε?"), chi tiết một số quy tắc (đạo hàm của f/g bằng $(fg' - gf')/g^2$ hay $(f'g - gf')/g^2$ hay $(f'g - gf')/f^2$, v.v?), hoặc kiểm tra trực tiếp một lỗi cụ thể thông thường (nếu $x < y$, thì $-x < -y$, hay $-x > -y$?) Xem thêm danh sách các lỗi phổ biến trong giáo trình toán đại học). Nhưng với một chút sáng tạo, ta có thể đưa ra một số câu trắc nghiệm hữu ích cho việc tự kiểm tra với các mục đích khác, thậm chí cho các chủ đề toán học khá cao cao. Ví dụ, hãy xem xét các câu hỏi sau đây để kiểm tra của một người nắm bắt được các tính chất của biến đổi Fourier:

Câu hỏi 4. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ là một hàm số. Trong số tất cả các giả thiết được liệt kê dưới đây, đâu là giả thiết yếu nhất mà vẫn cho phép biến đổi Fourier $\hat{f} : \mathbb{R}\ to \mathbb{C}$ tồn tại và là liên tục?

(1) f trơn và giảm nhanh chóng.
(2) f là hoàn toàn khả tích.
(3) f là bình phương khả tích.
(4) f là liên tục.
(5) f là liên tục và có giá compact.
(6) f là một phân phối kiềm chế (tempered).

Các loại kiến thức trong giải tích Fourier mà câu hỏi này kiểm tra rất khó kiểm tra bởi các kiểu câu hỏi khác (trừ thi vấn đáp).

Một khả năng thú vị khác là sử dụng trắc nghiệm để khám phá chiến lược giải quyết bài toán, một vấn đề chỉ gián tiếp được giải quyết bởi hầu hết các phương pháp kiểm tra. Ví dụ, trong học phần giải tích một biến, ta có thể tập trung vào phương pháp lấy tích phân bằng câu hỏi như như sau:

Câu hỏi 5. Cách nào sau đây theo bạn là một bước đầu tiên để tìm nguyên hàm $\int x^2 \log(1+x)dx$ của hàm $x^2 \log(1+x)$?

(1) Tích phân từng phần, đạo hàm x^2 và tích phân $\log(1+x)$.
(2) Tích phân từng phàn, đạo hàm $\log(1+x)$ và tích phân x^2.
(3) Thế $y = x^2$.
(4) Thế $y = 1 + x$.
(5) Thế $y = \log(1+x)$.
(6) Thử đạo hàm hàm số $x^3 \log(1+x)$.
(7) Phác thảo một đồ thị của $x^2 \log(1+x)$.
(8) Khai triển Taylor $\log(1+x)$.
(9) Khởi động Maple, Mathematica, hoặc SAGE. :-)

Lưu ý rằng câu hỏi này là có tính chất chủ quan hơn là câu hỏi trước, với câu trả lời khác nhau có điểm mạnh và điểm yếu khác nhau; không có trả lời thuần túy "đúng" hoặc thậm chí "tốt nhất" ở đây. Như vậy, đây sẽ là một câu hỏi khủng khiếp để đặt trong một kỳ thi đánh giá, nhưng tôi nghĩ rằng nó sẽ là một câu hỏi kích thích tư duy tốt để cung cấp cho một bài tự kiểm tra. (Điều này sẽ là một ví dụ về một câu hỏi mà các quá trình đến với câu trả lời của một người được lựa chọn chắc chắn là có giá trị hơn bản thân câu trả. Ngoài ra, có một nơi để thảo luận về các câu trả lời khác nhau cho một câu hỏi như thế này - chẳng nếu câu hỏi đã được lưu trữ trên một trang web thảo luận (wiki) - cũng sẽ thêm một góc nhìn tới bài tập này). Lưu ý sự khác biệt giữa các câu hỏi trên và câu truyền thống hơn "Tính nguyên hàm của $x^2 \log(1+x)$."; sự nhấn mạnh tại đây là về chiến thuật hơn là tính toán.

Tóm lại, tôi tin rằng có một số cách thú vị - nhiều trong số đó chưa được khai thác hiện nay - trong đó các câu tự trắc nghiệm được thiết kế tốt và trực tuyến có hiệu quả để đánh giá những điểm mạnh và điểm yếu của một người trong một môn toán. Tất nhiên, có một tương tác một-một với giảng viên hoặc trợ giảng sẽ là một cách rất thích hợp để đạt được điều này, nhưng điều này là không khả thi cho các lớp học đông người. Ngoài ra một mức độ trưởng thành và kỷ luật nhất định là cần thiết đối với học sinh để sử dụng hiệu quả phương thức tự đánh giá này, đặc biệt là khi chúng không có ảnh hưởng trực tiếp tới điểm số trên lớp của học sinh, nhưng triết lý của tôi ở đây là để cho sinh viên học thêm được từ sự nghi ngờ theo cách này; tôi cho rằng khả năng thực hiện hơn mức tối thiểu để thi đỗ là một phần của những gì một khóa học ở các năm cuối đại học cần hướng tới.

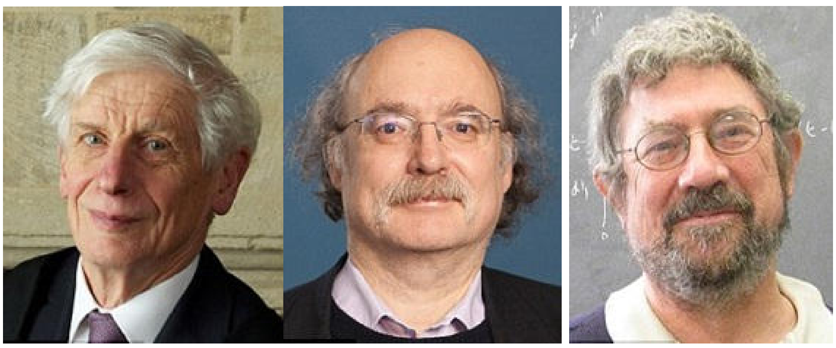
Người dịch: **Phùng Hồ Hải** (Viện Toán học)

Giải Nobel 2016 cho Toán học?

Ngô Việt Trung (Viện Toán học)

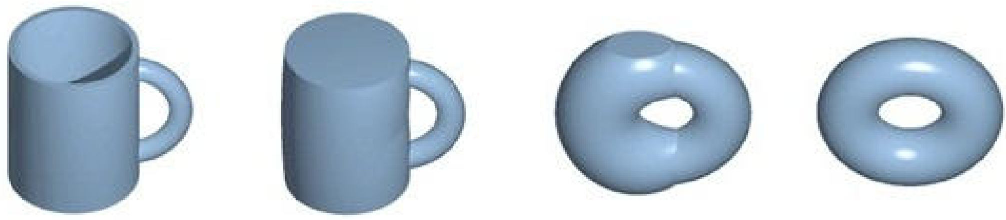
Giải Nobel Vật lý 2016 vừa được trao cho ba nhà vật lý lý thuyết David Thouless, (Đại học Washington), Duncan Haldane (Đại học Princeton) và Michael Kosterlitz (Đại học Brown) cho "những phát minh lý thuyết về sự dịch chuyển các trạng thái tô pô và các trạng thái tô pô của vật chất" (trích tuyên bố của Viện Hàn lâm khoa học Thụy Điển).

"Những người đoạt giải Nobel năm nay đã mở cửa một thế giới bí ẩn mà trong đó vật chất có thể nhận những trạng thái kỳ lạ. Họ đã sử dụng các phương pháp toán học tiên tiến để nghiên cứu các giai đoạn hay trạng thái không bình thường của vật chất như các chất siêu dẫn, siêu lỏng hoặc màng từ mỏng."



Từ trái: David Thouless, Duncan Haldane và Michael Kosterlitz. *Nguồn: Internet*

"Việc sử dụng các khái niệm tô pô của ba người đoạt giải Nobel trong vật lý là yếu tố quyết định đối với những phát minh của họ." Tô pô là một chuyên ngành toán học nghiên cứu các tính chất không thay đổi của vật thể khi bị biến dạng một cách liên tục. Hai vật thể được coi là giống nhau về tô pô nếu có thể bóp nặn một vật này thành vật kia, ví dụ như một cái cốc có tay cầm và một cái vòng. Chúng có tính chất chung là chỉ chứa một lỗ hổng. Khó có thể hình dung được chuyên ngành toán học trừu tượng này lại tìm thấy ứng dụng trong thực tiễn. Sử dụng tô pô như một công cụ, ba người đoạt giải Nobel năm nay đã "khám phá được bí mật của các vật chất lạ", "làm cho các chuyên gia phải sững sờ".



Một ví dụ về vật chất lạ là các chất siêu dẫn có thể truyền tải điện mà dòng điện không bị tiêu hao. Truyền tải trên các đường dây điện thông thường sẽ mất khoảng 15-20% điện năng. Vì vậy nếu dùng được chất siêu dẫn thì sẽ tiết kiệm được rất nhiều chi phí. Tương tự như vậy là các chất siêu lỏng không chịu sự tác động của lực ma sát, có thể chuyển động mãi mãi.

Đầu những năm 1970, Michael Kosterlitz và David Thouless lật ngược các lý thuyết hiện hành trước đó cho rằng hiện tượng siêu dẫn hoặc siêu lỏng không thể xảy ra trong các màng mỏng. Họ đã chứng minh rằng siêu dẫn có thể xảy ra ở nhiệt độ thấp và họ cũng giải thích về cơ chế chuyển pha (giai đoạn) làm cho tính siêu dẫn biến mất ở nhiệt độ cao hơn. Trong những năm 1980, Thouless đã có thể giải thích một thí nghiệm trước đó với các lớp dẫn điện rất mỏng trong đó độ dẫn được đo chính xác theo các bước số nguyên. Ông đã chỉ ra rằng các số nguyên này về mặt bản chất mang tính tô pô. Cùng khoảng thời gian đó, Haldane phát hiện thấy khái niệm tô pô có thể sử dụng để giải thích các tính chất của chuỗi những hạt nam châm được tìm thấy trong một số vật liệu.

Bây giờ chúng ta biết rất nhiều những trạng thái tô pô, không chỉ trong các màng và đường mỏng (hai chiều) mà còn trong các vật liệu ba chiều thông thường. Trong thập kỷ qua, lĩnh vực này đã thúc đẩy mạnh mẽ các nghiên cứu hàng đầu trong vật lý chất rắn nhằm tìm ra các vật chất lạ, cũng bởi vì hy vọng các vật liệu này có thể được sử dụng trong các thế hệ thiết bị điện tử và vật liệu siêu dẫn mới, hoặc trong các máy tính lượng tử tương lai.

Chúng ta có thể coi ba nhà vật lý được trao giải Nobel năm nay là những người làm toán ứng dụng và giải Nobel Vật lý 2016 có thể được coi là trao cho Toán học. Đây là dựa theo ý tưởng của GS TSKH Hoàng Xuân Phú.

Tài liệu tham khảo

The Nobel Prize in Physics 2016, www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2016

LIỆU NHỮNG NGHIÊN CỨU VỀ GIÁO DỤC TOÁN HỌC CÓ LÀM TĂNG CHẤT LƯỢNG GIẢNG DẠY MÔN ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG?

Tim Fukawa-Connelly (Đai học Temple, Mỹ),
Estrella Johnson và Rachel Keller (Virginia Tech, Mỹ)

Dạy học không phải là chuyện đùa. Có thể nói rằng đó là nhân tố quan trọng nhất tác động lên việc học của sinh viên. Những nỗ lực nhằm nâng cao chất lượng giảng dạy đã dẫn đến việc hàng loạt các sáng kiến cải cách được đề xuất và thử nghiệm qua các chương trình Toán đại học. Đặc biệt, từ những năm 60 của thế kỷ trước, Đại số đại cương (ĐSĐC) đã và đang là chủ đề cho những cải cách này, bao gồm những chương trình mới, những phương pháp sư phạm mới,... Tuy nhiên, có rất ít bằng chứng cho thấy những sáng kiến thay đổi đó có tác động một cách rộng rãi đến cách giảng dạy môn học này. Chúng tôi đã thực hiện một khảo sát trong những người giảng dạy môn ĐSĐC nhằm nghiên cứu các hoạt động giảng dạy điển hình, và đặc biệt hơn là nghiên cứu những kiến thức ngành, mục tiêu và những định hướng nhắm đến việc dạy và học. Các kết quả đã chỉ ra rằng một bộ phận lớn những người trả lời tỏ ra rất bằng lòng với hình thức dùng bài giảng. Thậm chí với những người tỏ ra quan tâm đến việc thay đổi phương pháp giảng dạy, họ cũng rất ít dùng những tài liệu mang tính cải cách sẵn có hoặc tương tác với những kết quả nghiên cứu về sư phạm. Dường như có một rào cản ngăn cách khó bị phá vỡ giữa những tìm tòi và gợi ý của các nhà giáo dục học với những người giảng dạy.

Các câu hỏi nghiên cứu

Về cơ bản, không có nghiên cứu nào giúp cho chúng tôi hiểu được tại sao một số nhà toán học chấp nhận thực hiện những cải cách trong việc giảng dạy của họ và một số khác lại không [3]. Cho đến nay, có một vài nghiên cứu cố gắng tìm hiểu những vấn đề này từ phía các giảng viên, những người được đề nghị thay đổi các hình thức dạy học của họ. Chúng tôi tập trung vào những câu hỏi sau đây: (1) Những hoạt động sư phạm nào được các giáo sư dạy ĐSĐC dùng trong các lớp học của họ và tại sao? (2) Họ nhận thức được những khích lệ hay hạn chế nào khi sử dụng các hình thức dạy không thông qua bài giảng?

Phương pháp và phân tích dữ liệu

Để tạo ra một công cụ nhằm xác định kiến thức, mục đích, và các định hướng dạy/học của các nhà toán học, chúng tôi phỏng theo các câu hỏi trong bản khảo sát về giáo dục Vật lý của Henderson and Dancy [1] và trong bản khảo sát Đặc thù của các chương trình thành công về Toán Giải tích bậc Đại học (Characteristics of Successful Programs in College Calculus - xem thêm thông tin trong www.maa.org/cspcc về dự án CSPCC). Ngoài những thông tin cơ bản về người trả lời, bản khảo sát(1) đã yêu cầu các giáo sư đánh giá sự quan trọng của các nguồn thông tin khác nhau và liệt kê các

(1)Bản khảo sát có trong pcrg.gse.rutgers.edu/algebra-survey yếu tố có ảnh hưởng đến các lựa chọn giảng dạy của họ. Với nỗ lực nhằm hiểu rõ niềm tin của họ về việc dạy và học, chúng tôi yêu cầu họ mô tả và đặc trưng hóa các hoạt động trong lớp học của họ, bao gồm cả những động cơ ẩn sau những lựa chọn đó. Cuối cùng, chúng tôi đặt ra những câu hỏi nhằm kiểm nghiệm một nhận định được nêu trong các tài liệu về giáo dục là các giảng viên thường do dự khi thay đổi cách dạy, và chúng tôi cũng hỏi về các lý do cho sự miễn cưỡng đó, nếu có. Các đề nghị tham gia bài khảo sát được gửi tới khoảng 200 trường, học viện, tập trung vào các giảng viên tham gia giảng dạy ĐSĐC ở bậc đại học. Dự định của chúng tôi là tham khảo ý kiến của các giảng viên tại các trường, học viện có chương trình đào tạo Thạc sỹ và Tiến sỹ. Tuy nhiên, một phần nhỏ trong các phản hồi (9%) thực sự là tới từ các trường mà về chuyên ngành Toán học chỉ có chương trình đào tạo Cử nhân. Tổng cộng, chúng tôi nhận được 131 bản trả lời đầy đủ. Các giảng viên tham gia trả lời (92% đang trong quá trình trở thành giảng viên chính thức) đã trải qua nhiều kinh nghiệm có ý nghĩa cả với việc dạy nói chung (81% dạy nhiều hơn 6 năm), đặc biệt với việc dạy ĐSĐC nói riêng và phần lớn có xu hướng dạy lớp nhập môn về nhóm được thiết kế cho các lớp đại trà (sinh viên sư phạm, vật lý, kĩ sư, cùng với toán lý thuyết). (Xem Hình 1.)

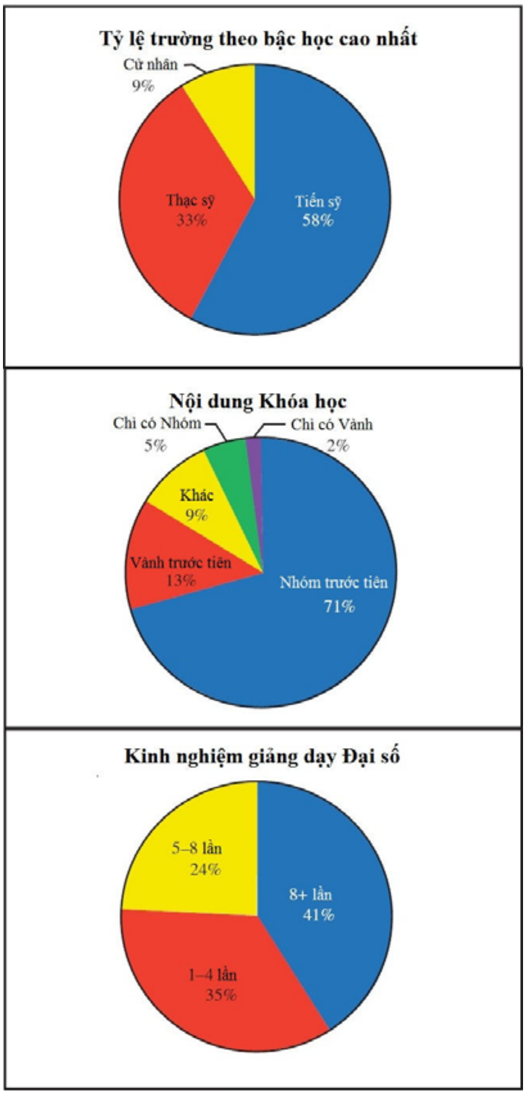
Sau khi thu thập những thông tin về các giảng viên tham gia trả lời, chúng tôi tập trung sự chú ý vào mức độ hài lòng của họ để xác định xem liệu có bất kì động lực nào cho sự thay đổi hay không. Để tập trung vào câu hỏi nghiên cứu thứ nhất, chúng tôi khảo sát về những hoạt động dạy học của những người tham gia trả lời bằng cách hỏi về tần suất họ tiến hành các hoạt động dạy học khác nhau, ví dụ dùng các hình ảnh, giáo cụ để giải thích về khái niệm nhóm, cho sinh viên thảo luận và cùng giải một bài tập, cho sinh viên chất vấn lẫn nhau. Những lựa chọn cho câu trả lời là: 0 lần, 1 hoặc 2 lần, 3 lần hoặc nhiều hơn. Chúng tôi so sánh những câu trả lời này với mức độ hài lòng của giảng viên về kết quả của việc dạy và với mức độ đồng thuận đối với một loạt các khẳng định được đặt ra nhằm xác định định hướng dạy và học. Một số ví dụ về những khẳng định này là: Tôi nghĩ hình thức bài giảng là cách tốt nhất để dạy; Tôi nghĩ sinh viên học sẽ tốt hơn nếu họ tự xoay sở với các ý tưởng trước khi tôi giảng cho họ; Tôi nghĩ tất cả các sinh viên đều có thể học Toán nâng cao. Những người trả lời chỉ ra mức độ đồng ý của họ trên thang 4 điểm.

Trong thảo luận của chúng tôi, chúng tôi nhấn mạnh những phần mà người trả lời dường như tin rằng sẽ dẫn đến những hành động sư phạm nhất định nhưng bản thân họ lại không tham gia vào những hành động đó. Đối với câu hỏi thứ hai, chúng tôi phân loại những báo cáo của giảng viên về việc triển khai những hình thức dạy không dùng bài giảng theo những mặt hạn chế đã ý thức được và những sự ủng hộ có thể thực hiện được, và chúng tôi so sánh chúng với những cái đã được trích dẫn.

Các kết quả

Độ hài lòng

Khi xác định mức độ hài lòng, có một vài khía cạnh cần được xem xét. Với riêng bài viết này, chúng tôi chọn thảo luận về 2 điểm: giáo trình và kết quả học tập của sinh viên. Các câu hỏi, được hỏi một cách riêng rẽ theo dạng mở (Ông/bà hài lòng như thế nào đối với giáo trình, với việc học của sinh viên? Hãy đưa ra một vài giải thích), được phân tích và phân loại bởi nhóm nghiên cứu dựa trên các mức độ hài lòng: Hài lòng, Pha trộn, và Không hài lòng.

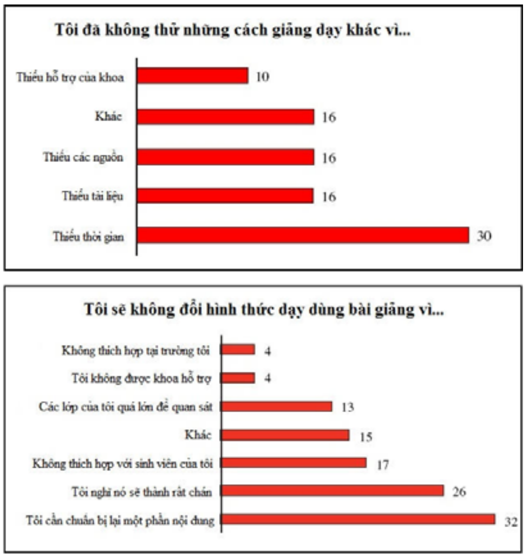


Hình 1. Thông tin về người tham gia khảo sát.

Tập hợp lại, có 87.6% số người trả lời chỉ ra rằng họ hài lòng với giáo trình mà họ sử dụng. Họ hài lòng với độ phủ, độ sâu và tính liên tục của nội dung của giáo trình. Tuy nhiên, thậm chí trong những người hài lòng, có rất nhiều lời phàn nàn về việc tăng giá và về việc xuất hiện quá nhanh các phiên bản mới.

Về mức độ hài lòng với kết quả học tập của sinh viên, đa số chọn Pha trộn (44 trên 89) và Hài lòng (23). Có ít hơn một phần tư số câu trả lời có thể được xếp vào mức Không hài lòng (22). Các câu trả lời được sắp theo từng phạm vi (mức độ tham gia của sinh viên, sự chuẩn bị của sinh viên, sự thể hiện của sinh viên, mức độ hiểu của sinh viên, các vấn đề về chương trình giảng dạy) và theo mức độ hài lòng, từ đó cho phép chúng ta thấy được những hướng chủ đạo chung. Tóm lại, những người trả lời với mức độ hài lòng là Pha trộn chỉ ra rằng (một cách không ngạc nhiên) các sinh viên đã học phần lớn những nội dung quan trọng và đã làm việc tương đối chăm chỉ. Các lớp học có thể cần sắp xếp lại một chút hoặc cần một số tài liệu bổ trợ nhưng những cải cách lớn về mặt sư phạm là không cần thiết. Các bình luận của những người chọn Không hài lòng là những phàn nàn về việc thái độ với công việc, động lực và khả năng của sinh viên đều không đạt yêu cầu. Ngược lại, những người chọn Hài lòng thường ít đề cập đến sinh viên, thay vào đó họ thường bình luận về khung và định dạng chương trình của các môn học, với gần 40% (9/23) trong số họ tin rằng cách dạy của họ là khác với phần lớn các cách dạy ĐSĐC truyền thống khác vì họ sử dụng cách dạy dựa trên yêu cầu (tăng các ví dụ, sinh viên phải nghiên cứu nhiều hơn, dùng phương pháp Moore đã cải tiến,...).

Trong khi các nhóm khác nhau khá nhiều trong các câu trả lời chính, có một điều khá thú vị là có 2 hướng chủ đạo xuất hiện ở tất cả các nhóm. Thứ nhất đó là tâm trạng thất vọng trước sự thiếu hụt về những kĩ năng chứng minh cơ bản nhất cũng như khả năng viết chứng minh khá tệ. Một ý kiến chung khác là rất khó và không hợp lý để thiết kế và dạy một môn chung cho các đối tượng khác nhau (được nói đến nhiều nhất là các chuyên ngành Toán và sư phạm Toán). Họ cũng nhất trí rằng khi dạy chung như vậy, bản thân các sinh viên cũng bị thiệt thòi. Một phát hiện khá ngạc nhiên trong nghiên cứu của chúng tôi là mặc dù mức độ hài lòng với kết quả của sinh viên khá khác nhau, nhưng trên tổng thể các phân bố điểm khá thống nhất. Trong những giảng viên được hỏi, tổng số sinh viên thi qua môn là một con số khá cao 87.82% (33.37 A, 33.85 B, 20.55 C) chỉ với 12.18% nhận các điểm D/F/W (ND: W =withdraw: bỏ môn).



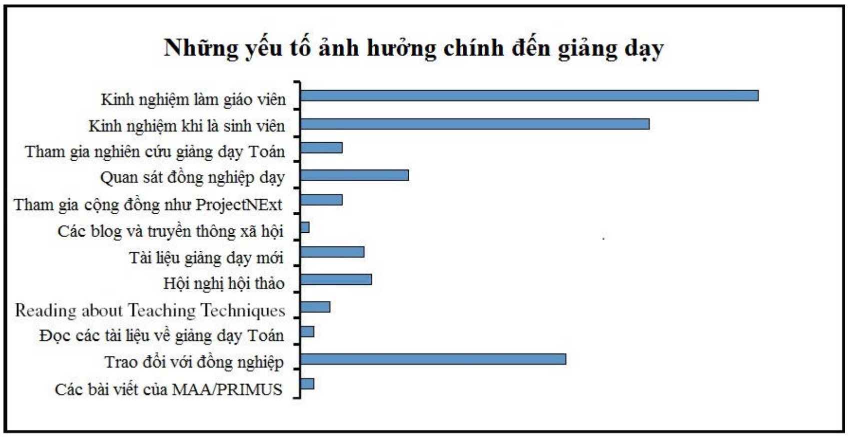
Hình 2. Những kiềm hãm đối với việc sử dụng các hình thức dạy không thông qua bài giảng

Các phương pháp giảng dạy

Hình thức bài giảng là hoạt động sư phạm quan trọng nhất với 85% số người trả lời xác nhận rằng họ dùng hình thức này để dạy ĐSĐC. Con số này bao gồm cả 8% tổng số giảng viên, những người đã quay lại hình thức này sau khi đã thử các phương pháp khác. Trong số 23% những người đã và đang dạy bằng các học liệu khác, phần lớn (15%) đã tự tạo ra chúng mà không có sự hỗ trợ chính thức nào (phần nhiều là dựa trên sự kết hợp của các giáo trình và các danh sách bài tập). Có đúng 2 người nói rằng họ dùng một chương trình đặc biệt uy tín (Teaching Abstract Algebra for Understanding, Larsen, 2013; Learning Abstract Algebra with ISETL, Dubinsky and Leron, 1994). Những người khác từ những kinh nghiệm của bản thân với những lớp học dựa trên yêu cầu, bằng việc cộng tác của họ với các giảng viên khác đang dùng phương pháp IBL (Inquiry-Based Learning), hoặc bằng việc tham gia của mình trong Học viện IBL đã xây dựng học liệu và giúp định hình việc dạy của họ.

Trong số 85% những người đang dùng hình thức bài giảng, thì có 56% nói rằng họ sẽ suy nghĩ về việc dạy bằng hình thức khác (44% còn lại nói sẽ không bao giờ thay đổi). Những lý do mà họ dùng để lý giải cho việc chưa thử dùng các hình thức khác và những giải thích cho việc không bao giờ thay đổi được tổng hợp trong Hình 2.

Nói tóm lại, có 2 hướng chủ đạo trong những bình luận có liên quan đến nỗ lực, những ủng hộ cần thiết để chỉnh sửa lại và dạy một khóa như vậy (ĐSĐC) và những băn khoăn về việc bảo đảm được một lượng thích hợp các tài liệu. Trong số 32 người nói rằng lượng kiến thức cần phải truyền tải là một lý do cho việc không sử dụng các hình thức không dùng bài giảng, có 23 người trả lời là “không” cho câu hỏi: Bạn có cảm thấy bị áp lực từ phía khoa là cần phải đảm bảo một lượng kiến thức nhất định khi dạy một khóa ĐSĐC không? Điều đó cho thấy dường như những băn khoăn về lượng kiến thức cần đảm bảo có thể bắt nguồn từ phía bản thân người dạy chứ không phải từ một áp lực bên ngoài.



Hình 3. Khảo sát những yếu tố ảnh hưởng chính đến việc dạy

Một trong những khám phá thú vị nhất là sự mâu thuẫn hiển hiện nổi lên từ việc so sánh những phản ứng đối với những phương án được đưa ra như sau. Có 82% đồng ý với khẳng định Hình thức bài giảng là cách tốt nhất để dạy. Tuy nhiên, 56% đồng ý (và 26% đồng ý ở mức độ vừa phải) với khẳng định Tôi nghĩ sinh viên học tốt hơn khi họ tham gia làm toán trong lớp (chứ không chỉ ngồi nghe giảng và chép bài). Kết quả này gợi ý rằng các giảng viên có ủng hộ những hình thức giảng dạy không dùng bài giảng, nhưng khi được hỏi về những hoạt động mà sinh viên làm trong lớp (bản khảo sát cung cấp một loạt các lựa chọn) thì những hoạt động duy nhất mà họ chọn, thậm chí là chỉ với tần suất 1 lần/1 tháng, là thực hiện các tính toán, làm việc với các ví dụ, hoặc các áp dụng. Hơn nữa, 63% nói rằng sinh viên không bao giờ giải các bài toán tại lớp. Vì thế, hình như điều mà giảng viên nghĩ là tốt nhất cho việc học của sinh viên (sinh viên thực sự bắt tay vào làm bài toán) lại không xảy ra dù ít hay nhiều. Do đó, chúng tôi rút ra kết luận có một sự không ăn khớp giữa niềm tin về việc học của sinh viên với những hoạt động dạy học thực sự. Người ta có thể lập luận rằng sự chênh lệch này có thể là do thiếu thời gian để điều chỉnh việc giảng dạy của giảng viên; tuy nhiên, các dữ liệu lại cho thấy khác. Khi được hỏi liệu họ có tin rằng họ sẽ có thời gian để lên kế hoạch và thiết kế lại lớp dạy của họ theo cách mà sẽ được ủng hộ và công nhận, gần như tất cả (100/129) trả lời rằng đây là một khả năng (42 có và 58 có thể). Vì vậy, nói chung, khó có thể nói rằng chỉ các giới hạn về thời gian là nguyên nhân cho sự không nhất quán giữa việc các giảng viên nói họ muốn dạy như thế nào với việc họ thực sự dạy như thế nào.

Ảnh hưởng lên việc giảng dạy

Khi được hỏi về những nhân tố ảnh hưởng chính đến việc dạy của mình (Mức độ ảnh hưởng như thế nào? Rất lớn/Một phần/Không), những người trả lời nhấn mạnh ba nguồn cảm hứng chính cho họ. Theo thứ tự giảm dần của độ quan trọng, những người tham gia khảo sát cho biết những kinh nghiệm của họ như là một giáo viên (84%) và những kinh nghiệm như một sinh viên (64%) rõ ràng là một yếu tố quan trọng nhất. Họ cũng cho biết rằng những trao đổi với các đồng nghiệp về việc nên dạy một phần kiến thức cụ thể nào đó như thế nào cũng khá quan trọng (49%). Ít quan trọng nhất chính là những cách thông thường mà những dự án được tài trợ triển khai những ý tưởng mới về dạy học: dự án NExT (8%), MathFest, những khóa học ngắn của MAA (Hiệp hội Toán học của Mỹ) hoặc những hội thảo khác (13%), hoặc một loạt những ấn phẩm chuyên về dạy học như là MAA Notes hoặc PRIMUS (2%). Từ những con số thống kê này, có thể thấy phần đông các nhà toán học ít bị tác động bởi những nhân tố từ bên ngoài trường đại học họ giảng dạy. Khách quan mà nói, nên chú ý rằng chúng tôi không biết về những thông tin phân bố của các cá nhân mà có đọc tài liệu hoặc tham gia các cơ hội phát triển nghề nghiệp. Trừ trường hợp có điều gì rất đặc biệt mà chúng tôi không nhận ra, dường như là phần lớn các khoa Toán không chịu tác động lên việc dạy của họ từ bên ngoài.

Chính việc ít bị tác động bởi bên ngoài này nhiều khả năng là cản trở 59 trên 106 người trả lời chuyển từ hình thức dùng bài giảng sang các hình thức khác mặc dù họ đã đã cân nhắc, với các lời giải thích được đưa ra là họ không có thời gian để xây dựng lại khóa học (30/59), không tìm được những học liệu mà họ thích (16/59), hoặc không biết bắt đầu từ đâu (16/59). Vì thế, có thể nói rằng chính những phương thức nhằm khắc phục một vài thách thức trên đã không đạt được mục đích. Một lần nữa, chỉ nhìn vào 59 trên 106 người nói rằng họ có cân nhắc việc không dùng hình thức bài giảng, chỉ một người thấy những ấn phẩm PRIMUS hoặc MAA Notes là rất có tác dụng, chỉ một người thấy những tài liệu nghiên cứu giáo dục toán học là rất có tác dụng, chỉ 6 người thấy những bài thuyết trình, các hội thảo, hội nghị về giảng dạy (ví dụ những khóa học ngắn của MathFest) rất có tác dụng, và chỉ 4 người thấy việc tham gia các cộng đồng như dự án NExT rất có tác dụng. Chúng tôi tin rằng không phải là những nguồn đó không có ích, mà chính bởi vì những người cần đến chúng nhất thì lại không tận dụng chúng.

Các kết luận

Có bốn phát hiện chính mà chúng tôi sẽ nhấn mạnh. Thứ nhất, hình thức bài giảng là trội hơn hẳn trong các hình thức giảng dạy (97/126), và thậm chí có một tỉ lệ rất cao (10/29) những người đã cố gắng dùng các hình thức khác lại quay lại hình thức này. Hơn nữa, mặc dù với một lượng lớn tiền bạc, thời gian và những hoạt động tích cực nhằm phát triển, kiểm định, thúc đẩy và tập huấn những nhà toán học sử dụng các chương trình và các phương pháp sư phạm mới, gần như kết quả vẫn bằng không. Những người sử dụng học liệu phi truyền thống thường rất hay có xu hướng tự xây dựng những học liệu hơn là sử dụng những chương trình được hỗ trợ bởi NSF.

Phát hiện chính thứ hai liên quan đến những yếu tố có ảnh hưởng tới những quyết định sư phạm. Theo độ giảm dần của mức độ quan trọng, những người tham gia cuộc khảo sát cho biết những kinh nghiệm của họ với tư cách là giáo viên và sinh viên là yếu tố quan trọng nhất, tiếp theo đó là việc thảo luận với các đồng nghiệp về việc dạy một phần nội dung cụ thể nào đó như thế nào, và yếu tố ít có ảnh hưởng nhất là chính những dự án được tài trợ giống như các ấn phẩm và các hội thảo. Nếu những nhà toán học về cơ bản không coi trọng các phương pháp truyền thống để phổ biến các ý tưởng và kĩ thuật mang tính sư phạm mới (và bằng chứng cho tính hiệu quả của chúng), thì những nhà cải cách có rất ít cách để có thể thúc đẩy sự thay đổi ngoài các trao đổi mang tính cá nhân. Riêng điều này đã gợi ý rằng vì sao thay đổi chương trình toán đại học nói chung, và ĐSĐC nói riêng, là rất khó.

Thứ ba, trong khi các giảng viên nói rằng họ có thể thay đổi cách giảng dạy của họ, tuy nhiên các mức độ hài lòng chỉ ra rằng họ không thực sự mong muốn làm như vậy. Hơn nữa, phần lớn những sự không hài lòng lại bắt nguồn từ những vấn đề có thể thấy rõ từ phía sinh viên chứ không phải từ các học liệu. Với trọng tâm kiến thức được xác định rõ ràng (Given the strong content focus) và một niềm tin cao độ vào sự hiệu quả (và sự ưu tiên cho) hình thức bài giảng, tựu trung lại, dường như các giảng viên giảng dạy môn ĐSĐC rất ít quan tâm đến việc sử dụng các cách tiếp cận sư phạm khác trong thời điểm này.

Chúng tôi đề xuất đồng thời hai hướng nghiên cứu mang tính bổ trợ lẫn nhau (concurrent research directions). Thứ nhất, chúng ta cần tìm hiểu tốt hơn những lý do khiến cho các nhà toán học có vẻ rất tin tưởng vào cách mà họ đang dạy, tìm hiểu những loại dấu hiệu khiến họ phản đối sự thay đổi, và tìm hiểu điều cách phổ biến các hướng tiếp cận mới đạt được sự tiếp thu có ý nghĩa (achieve meaningful penetration). Thứ hai, chúng ta cần tìm hiểu sâu hơn các hình thức thay thế cho hình thức bài giảng mà các nhà toán học có thể sẽ dùng. Dường như có một mâu thuẫn giữa các mục tiêu được đề ra (stated goals) của các ban chính sách (policy boards) và các tổ chức quốc gia với cách các giảng viên, trên thực tế, nghĩ về các môn mình dạy. Các nhà sư phạm toán học đang đáp ứng lại những yêu cầu của các mục tiêu đã được đề ra về thay đổi các môn học ở bậc đại học để bổ sung nhiều hơn các công việc mang tính chủ động của sinh viên, nhưng nếu các nhà toán học có những nhu cầu khác như đã thấy (different perceived needs), như nghiên cứu của chúng tôi chỉ ra, thì những ý tưởng mới đó sẽ không có sức hút. Do đó, chúng tôi mong muốn có một cuộc trò chuyện về điều được hiểu là mang tính thực tiễn và tính khả thi theo con mắt của những người giữ nhiệm vụ giảng dạy.

Cuối cùng, đối với chúng tôi và các nhà nghiên cứu giáo dục toán học nói chung, chúng tôi phân vân làm thế nào để đề xuất các chiến lược mới về dạy học một cách tốt nhất, và làm thế nào để nhận lại được phản hồi từ cộng đồng toán học liên quan đến mối quan tâm của họ và tính khả thi (as to their interest and feasibility). Về cơ bản, nếu các giảng viên môn toán chỉ nói chuyện với các đồng nghiệp của họ, thì rõ ràng đó là một vòng tròn khép kín, không có chỗ cho các ý tưởng mới. Như một ví dụ, một phần chính về sự không hài lòng được bộc lộ qua bản khảo sát này là sự thất vọng của giảng viên đối với các khả năng viết chứng minh một cách kém cỏi của sinh viên, một khía cạnh cho đến nay đã nhận được sự chú ý đặc biệt từ những nhà nghiên cứu giáo dục toán học và đã dẫn đến những gợi ý mang tính thực tiễn để nâng cao khả năng hiểu cách chứng minh (proof comprehension). Những ý tưởng này đã được nghiên cứu rất nhiều và nhận được những ủng hộ mang tính sư phạm toàn diện có thể sử dụng được, và thường không đòi hỏi một lượng thời gian khổng lồ như thường được giả định một cách sai lầm về phương pháp luận phi truyền thống (nontraditional methodology). Nhưng nếu không có những trao đổi mở giữa những nhà nghiên cứu và những người dạy học, thì khả năng tồn tại và tính hợp lệ của những ý tưởng này không được đánh giá đúng mực. Chúng tôi, những người nghiên cứu giáo dục toán học, đã dùng nhiều năm, chính xác là hàng thập kỷ, để cố gắng hiểu các sinh viên học toán nói chung như thế nào và học những phần kiến thức cụ thể nói riêng như thế nào. Hãy giúp chúng tôi để giúp chính các bạn. Nếu các bạn không hài lòng với cách thức dạy học hiện nay hoặc với kết quả, nếu các bạn thấy thất vọng với những lớp học mà hình thức dùng bài giảng đang thống trị, nếu các bạn đang tìm kiếm những nguồn cảm hứng mới – thì chúng tôi có thể có câu trả lời. Tất cả những gì bạn cần làm là hỏi chúng tôi!

Tài liệu tham khảo

[1] C. Henderson and M. H. Dancy, Impact of physics education research on the teaching of introductory quantitative physics in the United States, *Physical Review Special Topics-Physics Education Research* **5**(2) (2009), 020107.

[2] C. Rasmussen and J. Ellis, Who is switching out of calculus and why?, *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 73-80 (A. M. Lindmeier and A. Heinze, eds.), IPN Leibniz-Institut fd Pädagogik d. Naturwissenschaften an d. Universität Kiel, 2013.

[3] N. M. Speer, J. P. Smith, A. Horvath, Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice, *The Journal of Mathematical Behavior 29*(2) (2010), 99-114.

Người dịch: **Nguyễn Huy Kỷ** (Đại học Thủ đô Hà Nội)
Nguyễn Phụ Hoàng Lân (Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG Hà Nội)

Dịch từ bản tiếng Anh (với sự cho phép của Notices AMS và các tác giả):
Tim Fukawa-Connelly, Estrella Johnson and Rachel Keller, Can Math Education Research Improve the Teaching of Abstract Algebra? *Notices Amer. Math. Soc.* **63**(3) (2016), 276 - 281.

Tin tức hội viên và hoạt động toán học

LTS: *Để tăng cường sự hiểu biết lẫn nhau trong cộng đồng các nhà toán học Việt Nam, Tòa soạn mong nhận được nhiều thông tin từ các hội viên HTHVN về chính bản thân, cơ quan hoặc đồng nghiệp của mình.*

Ngày 26 tháng 8 năm 2016, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã ban hành Quyết định số 3028/QĐ-BGDĐT về việc thưởng công trình toán học năm 2016 của Chương trình Trọng điểm Quốc gia phát triển Toán học giai đoạn 2010 - 2020. Năm nay có 85 công trình được thưởng trên tổng số 162 công trình đăng ký. Chi tiết xem trên trang web của Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán tại www.viasm.edu.vn

Kỳ thi Olympic Toán quốc tế năm 2016 được tổ chức tại Hong Kong từ ngày 6/7/2016 đến 16/7/2016. Đoàn Việt Nam tham dự với 6 thí sinh cùng lãnh đạo đoàn là PGS. Lê Anh Vinh và TS. Lê Bá Khánh Trình. Kết quả đoàn Việt Nam giành được 1 Huy chương Vàng (Vũ Xuân Trung, học sinh Trường chuyên Thái Bình), 4 Huy chương Bạc và 1 Huy chương Đồng, đạt tổng số điểm 151, xếp thứ 11 toàn đoàn. Dẫn đầu là các đoàn Hoa Kỳ (214 điểm), Hàn Quốc (207 điểm), Trung Quốc (204 điểm). Đây cũng là lần thứ hai em Vũ Xuân Trung giành được Huy chương Vàng trong kỳ thi Olympic Toán Quốc tế.

Trường Hè về Lý thuyết biểu diễn bao gồm biểu diễn của Nhóm hữu hạn và Nhóm p-adic vừa được diễn ra tại Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán (VIASM) từ 29/8/2016 đến 1/9/2016. Giảng viên của trường hè là hai chuyên gia hàng đầu trong ngành là GS. Ngô Bảo Châu và GS. Phạm Hữu Tiệp.

Hội nghị Châu Á về Mật Mã (ASIACRYPT 2016) sẽ được Viện nghiên cứu Cao cấp về Toán (VIASM) tổ chức từ 4-8/12/2016 tại Khách sạn Intercontinental, Hà Nội. Chủ trì hội nghị là các GS. Ngô Bảo Châu (ĐH Chicago và Viện NCCC Toán) và GS. Phan Dương Hiệu (ĐH Limoges, Cộng hòa Pháp). Hội nghị ASIACRYPT hàng năm được xem là một trong ba hội nghị lớn nhất thế giới về mật mã.

Tin toán học thế giới

Malaysia trở thành nước thành viên mới nhất được kết nạp của Liên đoàn Toán học Quốc tế (IMU). Từ năm 2012, Malaysia tham dự IMU với tư cách là thành viên liên kết (associate member). Sau lần bỏ phiếu vào giữa năm nay, nước này đã được chính thức kết nạp vào Nhóm I [(1)] các nước thành viên của IMU từ tháng 7/2016.

Cũng kể từ tháng 7/2016, Thổ Nhĩ Kỳ đã chính thức được chuyển từ Nhóm I lên Nhóm II của IMU.

Danh sách các trưởng ban xét giải thưởng của Đại hội Toán học Quốc tế ICM 2018 đã được Liên đoàn Toán học Quốc tế công bố. Tại mỗi kỳ ICM đều có một số các giải thưởng rất quan trọng được trao cho những nhà toán học xuất sắc. Những nhà toán học nhận giải được chọn bởi các ủy ban xét trao giải, trong đó chỉ tên của trưởng ban được công bố, các thành viên khác đều được dấu tên. Danh sách các trưởng ban xét giải thưởng tại ICM 2018 là

1. Huy chương Fields: Shigefumi Mori;
2. Giải thưởng Rolf Nevanlinna: Tony F. Chan;
3. Giải thưởng Carl Friedrich Gauss: Björn Engquist;
4. Giải thưởng huy chương Chern: Caroline Series;
5. Giải thưởng Leelavati: Gert-Martin Greuel;
6. Bài giảng Emmy Noether ICM: Irene Fonseca.

Đại hội Giảng dạy Toán học Quốc tế lần thứ 13 (ICME-13) đã được tổ chức ở Hamburg, CHLB Đức từ 24-31/7/2016. Trong lịch sử của đại hội, đây là lần đại hội có số đại biểu tham dự lớn nhất với khoảng 3.500 người. ICME-13 được tổ chức bởi Hội Giảng dạy Toán của Đức (Gesellschaft für Didaktik der Mathematik - GDM) và diễn ra dưới sự bảo

[(1)] Về phân nhóm các nước thành viên của IMU có thể xem trong Số 1 Tập 20 TTTH (2016) trợ của Ủy ban Quốc Tế về Cố vấn Toán học (International Commission on Mathematical Instruction - ICMI) thuộc Liên đoàn Toán học Quốc tế.

Từ 18-22/7/2016, Đại hội Toán học Châu Âu lần thứ 7 đã diễn ra tại Berlin, CHLB Đức với sự tham dự của khoảng 1.100 nhà toán học đến từ 80 nước, hầu hết là châu Âu.

Ban khoa học của đại hội đã chọn ra 10 báo cáo toàn thể và 31 báo cáo mời trình bày ở đại hội. Bên cạnh đó các bài giảng đặc biệt cũng diễn ra trong suốt thời gian đại hội, gồm Bài giảng Hirzebruch (do Don Zagier - Viện Toán Max Planck - đọc), Bài giảng Abel (do Endre Szemerédi - giải thưởng Abel 2012 - đọc), Bốn bài giảng về lịch sử toán học, Một bài giảng đại chúng (Kiến trúc và Toán học),...

Giáo sư Jean-Christophe Yoccoz, Huy chương Fields và là giáo sư tại Collège de France, CH Pháp, đã qua đời vào ngày 3/9/2016 ở tuổi 59. J-C. Yoccoz (ảnh Bìa 1) nổi tiếng với những đóng góp sâu sắc về hệ động lực. Ngoài huy chương Fields ông cũng nhận được giải thưởng Salem vào năm 1988.

J-C. Yoccoz sinh ra tại Paris, Pháp, vào năm 1957. Khi còn là học sinh ông có hai lần tham dự kỳ thi Toán Quốc tế (IMO) với thành tích huy chương vàng tuyệt đối 40/40 tại IMO 1974. Sau đó J-C. Yoccoz hoàn thiện cử nhân Toán học tại École Normale Supérieure (Paris) năm 1977. Sau khi phục vụ quân sự ở Brazil, ông đã nhận bằng tiến sĩ vào năm 1985, dưới sự hướng dẫn của Michel Herman. Yoccoz được xem là một trong những chuyên gia đầu ngành về lý thuyết hệ động lực và, theo nhận xét của những chuyên gia trong ngành, ông đã thu được những kết quả quan trọng liên quan đến những vấn đề khó khăn nhất của lý thuyết này.

Giáo sư J-C. Yoccoz cũng là một trong những nhà toán học đọc báo cáo toàn thể trong hội nghị phối hợp giữa Hội Toán học Việt Nam và Hội Toán học Pháp diễn ra tại Huế vào năm 2012.

Giải thưởng Simon Investigator của Quỹ Simon vừa được trao cho các nhà toán học: Vladimir Markovic (ĐH Kỹ thuật California - CALTECH, Mỹ) về những đóng góp trong lĩnh vực hình học của đa tạp 3 chiều; James McKernan (ĐH California ở San Diego, Mỹ) về những kết quả quan trọng trong Hình học song hữu tỷ, điển hình là khẳng định về tính hữu hạn sinh của vành chính tắc (cùng với C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon); Bjorn Poonen (Viện công nghệ Massachusetts, MIT) về những đóng góp trong nhiều hướng của phương trình Diophantine.

Giải thưởng Simon Investigator là một giải thưởng danh giá của Quỹ Simon được trao hàng năm cho các ngành khoa học cơ bản như Toán, Vật lý, Khoa học sự sống... Một số nhà khoa học tiêu biểu người Việt đã giành giải thưởng này là GS. Ngô Bảo Châu (năm 2013, về Toán học), GS. Đàm Thanh Sơn (năm 2013, về Vật lý). Ngoài giải thưởng Simon Investigator, Quỹ Simon cũng trao giải thưởng Simon Fellow hàng năm và GS. Phạm Hữu Tiệp đã nhận giải thưởng này năm 2014.

Peter Scholze (Đại học Bonn, CHLB Đức) vừa được trao giải thưởng Leibniz năm 2016 của Quỹ nghiên cứu Khoa học của Cộng hòa liên bang Đức (DFG). Peter Scholze nổi tiếng với lý thuyết các không gian perfectoid với ứng dụng vào giải quyết những vấn đề trung tâm của Số học như Chương trình Langlands, Lý thuyết Hodge p-adic... Ông là người trẻ nhất được trao giải thưởng này cho đến nay. Ngoài ra, vào tháng 7 vừa rồi Peter Scholze cũng được trao giải thưởng của Hội toán học Châu Âu.

Dành cho các bạn trẻ

LTS: "*Dành cho các bạn trẻ*" *là mục dành cho Sinh viên, Học sinh và tất cả các bạn trẻ yêu Toán. Tòa soạn mong nhận được các bài viết hoặc bài dịch có giá trị cho chuyên mục.*

ĐỊNH LÝ MARKOV

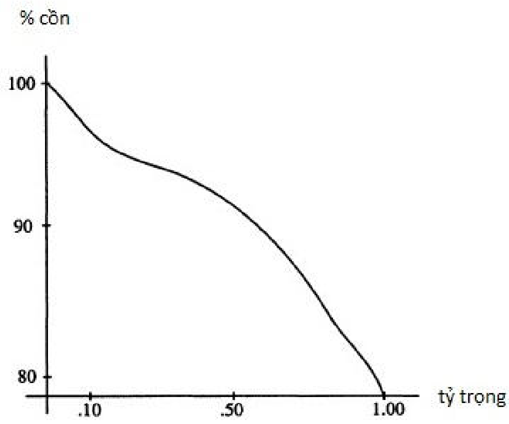
và đáp án đề thi Đại số kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên-Học sinh 2016

Nguyễn Duy Thái Sơn (Đại học Sư phạm Đà Nẵng)

1. ĐỊNH LÝ MARKOV VỀ ĐÁNH GIÁ ĐẠO HÀM CỦA ĐA THỨC

Ít lâu sau khi công bố bảng tuần hoàn các nguyên tố, nhà hóa học Nga D.I. Mendeleev đã thực hiện một đề tài nghiên cứu về tỷ trọng của các dung dịch; ở đó, ông xem tỷ trọng như là một hàm số của tỷ lệ phần trăm chất hòa tan trong dung dịch [6]. Hàm số này có một số ứng dụng thực tiễn quan trọng; chẳng hạn, nó được dùng để kiểm tra nồng độ cồn trong bia rượu và kiểm tra độ cô đặc của hóa chất chống đông trong hệ thống làm lạnh xe ô-tô. Các nhà hóa lý thời nay không còn mấy quan tâm tới hàm tỷ trọng nói trên, nhưng quả thực, đề tài nghiên cứu của Mendeleev đã dẫn đến những chủ đề toán học rất đáng được quan tâm.

Xem tỷ trọng của dung dịch cồn như là một hàm số của tỷ lệ phần trăm (lấy theo khối lượng) cồn trong nước, Mendeleev đi đến các kiểu đường cong như ở Hình 1. Ông nhận thấy các đường cong đó có thể xấp xỉ được bởi dãy các cung bậc hai, và ông muốn biết các điểm nối giữa các cung này có đúng là các điểm nối thực sự không, hay chỉ đơn thuần là các điểm do sai sót trong đo đạc gây ra. Hiển nhiên, nếu độ dốc của một cung vượt quá *độ dốc lớn nhất có thể có* của một cung liền kề thì hai cung này phải đến từ hai hàm số bậc hai khác hẳn nhau. Vì thế, diễn đạt theo



Hình 1

ngôn ngữ toán học, một vấn đề được đặt ra là: giả sử trên đoạn $[a, b]$ nào đó ta đã có một đa thức bậc hai $P(x) = px^2 + qx + r$ với $\max\limits_{x\in[a,b]} P(x) - \min\limits_{x\in[a,b]} P(x) = L$, và ta muốn biết độ lớn có thể có của $P'(x)$ (khi $x \in [a, b]$). Ta có thể đơn giản hóa hơn nữa bài toán này bằng cách co/giãn và tịnh tiến trục hoành để biến đoạn $[a, b]$ thành đoạn $[-1, 1]$, rồi co/giãn và tịnh tiến trục tung để quy điều kiện $\max\limits_{x\in[a,b]} P(x) - \min\limits_{x\in[a,b]} P(x) = L$

thành $\max_{x\in[-1,1]}|P(x)| = 1$. Bài toán trở thành: nếu $P(x)$ là một hàm số bậc hai có $|P(x)| \leq 1$ trên đoạn $[-1,1]$ thì độ lớn có thể có của $|P'(x)|$ trên đoạn này là bao nhiêu? Câu trả lời Mendeleev đã tìm được là: $|P'(x)| \leq 4$; và đây là đánh giá tốt nhất có thể có, bởi vì với hàm số bậc hai $P(x) = 1 - 2x^2$ ta có $\max_{x\in[-1,1]}|P(x)| = 1$ và $|P'(\pm 1)| = 4$. Dùng kết quả đó, Mendeleev tự tin rằng các điểm nối trên đường cong ông thu được ở Hình 1 là *xác thực*; có lẽ Mendeleev đã đúng, vì các đo đạc của ông là khá chính xác (chúng khớp với các đo đạc hiện đại ít nhất là đến ba chữ số thập phân có nghĩa).

Thật thú vị là một kết quả đẹp như thế trong toán học lại được khám phá bởi một nhà hóa học. Mendeleev đã kể lại cho nhà toán học Nga Andrey Andreyevich Markov nghe những gì mình vừa đạt được. Sau khi nghe chuyện, một cách tự nhiên, A.A. Markov nghĩ đến bài toán tương ứng cho các đa thức bậc n tổng quát và đã chứng minh được [4]:

Định lý 1. (A.A. Markov) *Nếu $P(x)$ là một đa thức của biến số $x \in \mathbb{R}$ với hệ số thực và có bậc không vượt quá n thì $\max_{|x|\leq 1}|P'(x)| \leq n^2\max_{|x|\leq 1}|P(x)|$; dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $P(x)$ là bội của đa thức Chebyshev (loại một) $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, và khi đó, nếu $P(x) \not\equiv 0$, thì $\max_{|x|\leq 1}|P'(x)|$ chỉ đạt được tại $x = \pm 1$.*

Một khi đã có đánh giá cho đạo hàm cấp một, người ta lại tìm cách đánh giá các đạo hàm cấp cao hơn. Áp dụng trực tiếp Định lý 1, dễ thấy (với cùng giả thiết như trong định lý đó): $\max_{|x|\leq 1}|P^{(k)}(x)| \leq n^2(n-1)^2\cdots(n-k+1)^2\max_{|x|\leq 1}|P(x)|$ với mọi số nguyên dương $k \leq n$. Tuy nhiên, đánh giá này không thực sự sắc bén khi $k \geq 2$. Đánh giá tốt nhất thuộc về Vladimir Andreevich Markov, em trai của A.A. Markov, được công bố lần đầu trên một tạp chí của Nga năm 1892 và được đăng lại năm 1916 trên tạp chí *Mathematische Annalen* của Đức [5]. Một trong nhiều kết quả hay của [5] chính là đánh giá đó:

Định lý 2. (V.A. Markov) *Nếu $P(x)$ là một đa thức của biến số $x \in \mathbb{R}$ với hệ số thực và có bậc không vượt quá n thì $\max_{|x|\leq 1}|P^{(k)}(x)| \leq \dfrac{n^2\cdot(n^2-1^2)\cdots(n^2-(k-1)^2)}{1\cdot 3\cdots(2k-1)}\max_{|x|\leq 1}|P(x)|$ với mọi số nguyên dương $k \leq n$.*

Do $\dfrac{n^2\cdot(n^2-1^2)\cdots(n^2-(k-1)^2)}{1\cdot 3\cdots(2k-1)} = T_n^{(k)}(1)$, nên Định lý 2 đã cho ta đánh giá tốt nhất có thể có (dấu đẳng thức xảy ra khi $P(x)$ là bội của đa thức Chebyshev $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$).

Một nhà toán học Nga khác, Serge Bernstein, là người đầu tiên đặt vấn đề tương tự như nội dung của Định lý 1 cho các đa thức biến số phức, hệ số phức (đoạn $[-1,1]$ được thay bởi đĩa tròn đơn vị trong mặt phẳng phức). Ông chứng minh được [1]:

Định lý 3. (S. Bernstein) *Nếu $P(z)$ là một đa thức của biến số $z \in \mathbb{C}$ với hệ số phức và có bậc không vượt quá n thì $\max_{|z|\leq 1}|P'(z)| \leq n\max_{|z|\leq 1}|P(z)|$; dấu đẳng thức xảy ra khi $P(z) \equiv \lambda z^n$, với $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Cho đến nay, các bất đẳng thức Markov và Bernstein đã được mở rộng, mài sắc theo nhiều hướng khác nhau. Những chủ đề này vẫn đang còn truyền cảm hứng cho một số nghiên cứu gần đây trong toán học (xem [2]-[3] và các tài liệu tham khảo ở đó). Dưới đây là đề thi và đáp án môn đại số chúng tôi đã đề xuất cho kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên Học sinh năm 2016, nhằm giới thiệu định lý Markov với các em học sinh trung học phổ thông.

2. NỘI DUNG ĐỀ THI

Mục tiêu của bài thi này là tìm hiểu một số trường hợp riêng của định lý Markov: nếu $P(x)$ là một đa thức với hệ số thực và có bậc không vượt quá n thì

$$\max_{|x|\leq 1}|P'(x)| \leq n^2 \max_{|x|\leq 1}|P(x)|.$$

Chứng minh của định lý Markov vượt quá chương trình toán THPT. Ta sẽ tìm cách chứng minh những trường hợp riêng của định lý khi $n \leq 3$ và khảo sát một số bài toán xung quanh các trường hợp đó.

Trong các bài toán dưới đây, biến số x chỉ nhận giá trị thực.

Bài 1. Giả sử a, b là hai số thực sao cho $|ax+b| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$. Chứng minh rằng khi $|x| \leq 1$ ta cũng có $|bx+a| \leq 1$.

Từ kết luận của bài toán nói trên, với $x = 0$, ta suy ra $|a| \leq 1$; hệ quả vừa thu được này chính là trường hợp riêng của định lý Markov khi $n = 1$. Trước khi đi đến các trường hợp tiếp theo, ta cần một bổ đề mang tính kỹ thuật:

Bài 2. Với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, chứng minh rằng $|\alpha+\beta| + |\alpha-\beta| = 2\max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

Sử dụng bổ đề trên, ta có ngay kết quả sau:

Bài 3. Với giả thiết như trong bài toán 1, chứng minh rằng $|a| + |b| \leq 1$.

Bài 4. Giả sử a, b, c là ba số thực sao cho $|ax^2+bx+c| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$. Chứng minh

(i) $|a| + |b| + |c| \leq 3$.
(ii) $|2ax+b| \leq 4$ khi $|x| \leq 1$.
(iii) $|cx^2+bx+a| \leq 2$ khi $|x| \leq 1$ (một hệ quả là: $|a| \leq 2$).

Bài 5. Giả sử a, b, c, d là bốn số thực sao cho $|ax^3+bx^2+cx+d| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$. Chứng minh rằng:

(i) $|3ax^2+2bx+c| \leq 9$ khi $|x| \leq 1$.
(ii) $|dx^3+cx^2+bx+a| \leq 4$ khi $|x| \leq 1$ (một hệ quả là: $|a| \leq 4$).

Bài 6. Cho a, b, c là ba số thực và n là một số nguyên dương. Giả sử $f(x) = ax^{2n} + bx + c$ thỏa mãn $|f(-1)|, |f(0)|, |f(1)| \leq 1$. Chứng minh rằng:

(i) $|f(x)| \leq \dfrac{2n-1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}} + 1$ khi $|x| \leq 1$.
(ii) Với mỗi $1 \leq M < \infty$, ta có $|f(x)| \leq 2M^{2n} - 1$ khi $1 \leq |x| \leq M$.

3. ĐÁP ÁN

Bài 1. Đặt $f(x) := ax+b$, $g(x) := bx+a$.

Cách 1: Trên mặt phẳng tọa độ Descartes Oxy, xét các điểm $A(-1, g(-1))$, $M(x, g(x))$, $B(1, g(1))$, trong đó $|x| \leq 1$. Vì $M \in [AB]$ nên

$$\begin{aligned}
|g(x)| &= \mathrm{d}(M, Ox) \\
&\leq \max\{\mathrm{d}(A, Ox), \mathrm{d}(B, Ox)\} \\
&= \max\{|g(-1)|, |g(1)|\} \\
&= \max\{|f(-1)|, |f(1)|\} \leq 1.
\end{aligned}$$

Cách 2: Vì hàm g là đơn điệu nên với mọi $x \in [-1, 1]$ ta có

$$\begin{aligned}
|g(x)| &\leq \max\{|g(-1)|, |g(1)|\} \\
&= \max\{|f(-1)|, |f(1)|\} \leq 1.
\end{aligned}$$

Bài 2. Dễ thấy cả hai vế của đẳng thức cần chứng minh là không đổi khi ta hoán đổi vị trí của α và β, hoặc khi ta đổi dấu một trong hai số α, β. Vì thế, chỉ cần xét trường hợp $\alpha \geq \beta \geq 0$. Khi đó rõ ràng

$$|\alpha+\beta| + |\alpha-\beta| = 2\alpha = 2\max\{|\alpha|, |\beta|\}.$$

Bài 3. Đặt $f(x) := ax + b$, $\alpha := f(1) = a + b$, $\beta := f(-1) = -a + b$, ta có $a = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $b = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Vậy, từ bài toán 2 và giả thiết, suy ra $|a| + |b| = \max\{|\alpha|, |\beta|\} \le 1$.

Nhận xét: Áp dụng kết luận của bài toán 3, ta có thể giải bài toán 1 theo cách khác như sau: Do $|x| \le 1$ nên

$$|bx + a| \le |bx| + |a| \le |b| + |a| \le 1.$$

Bài 4. Xét hàm số $f(x) := ax^2 + bx + c$.

(i) Đặt $d := f(1) = a+b+c$, $e := f(-1) = a - b + c$, ta có

$$(1) \quad a = \frac{1}{2}(d + e) - c, \quad b = \frac{1}{2}(d - e).$$

Theo giả thiết, ta cũng có

$$(2) \quad \max\{|c|, |d|, |e|\} = \max\{|f(0)|, |f(1)|, |f(-1)|\} \le 1.$$

Từ (1), (2), áp dụng bất đẳng thức tam giác và kết luận của bài toán 2, ta suy ra:

$$|a| + |b| + |c| \le \frac{1}{2}(|d + e| + |d - e|) + 2|c| = \max\{|d|, |e|\} + 2|c| \le 3.$$

(ii) Do (1), ta có

$$2ax + b = (d + e - 2c)x + \frac{1}{2}(d - e) = d\left(x + \frac{1}{2}\right) + e\left(x - \frac{1}{2}\right) - 2cx;$$

vì thế, khi $|x| \le 1$, theo (2) và bài toán 2,

$$|2ax + b| \le \left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x - \frac{1}{2}\right| + 2|x| = 2\max\left\{|x|, \frac{1}{2}\right\} + 2|x| \le 4.$$

(iii) Thay (1) vào $g(x) := cx^2 + bx + a$, có

$$g(x) \equiv c(x^2 - 1) + \frac{d}{2}(1 + x) + \frac{e}{2}(1 - x).$$

Vậy, khi $|x| \le 1$, (2) kéo theo

$$|g(x)| \le |x^2 - 1| + \frac{1}{2}(|1 + x| + |1 - x|) = 1 - x^2 + \frac{1}{2}(1 + x + 1 - x) \le 2.$$

Bài 5. Đặt $f(x) := ax^3 + bx^2 + cx + d$.

(i) Xem

$$\begin{cases} \alpha := f(-1) = -a + b - c + d \\ \beta := f(-1/2) = -\frac{a}{8} + \frac{b}{4} - \frac{c}{2} + d \\ \gamma := f(1/2) = \frac{a}{8} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} + d \\ \delta := f(1) = a + b + c + d \end{cases}$$

như một hệ phương trình với các ẩn số a, b, c, d. Giải hệ đó ta tìm được "nghiệm":

$$\begin{cases} a = -2\frac{\alpha}{3} + 4\frac{\beta}{3} - 4\frac{\gamma}{3} + 2\frac{\delta}{3} \\ b = 2\frac{\alpha}{3} - 2\frac{\beta}{3} - 2\frac{\gamma}{3} + 2\frac{\delta}{3} \\ c = \frac{\alpha}{6} - 4\frac{\beta}{3} + 4\frac{\gamma}{3} - \frac{\delta}{6} \\ d = -\frac{\alpha}{6} + 2\frac{\beta}{3} + 2\frac{\gamma}{3} - \frac{\delta}{6}. \end{cases}$$

Thay vào $g(x) := 3ax^2 + 2bx + c$, ta có

$$g(x) \equiv -\frac{\alpha}{6}(12x^2 - 8x - 1) + 4\frac{\beta}{3}(3x^2 - x - 1) - 4\frac{\gamma}{3}(3x^2 + x - 1) + \frac{\delta}{6}(12x^2 + 8x - 1).$$

Do $\max\{|\alpha|, |\beta|, |\gamma|, |\delta|\} \le 1$, và $|x| \le 1$, theo bài toán 2 thì

$$|g(x)| \le \frac{1}{6}(|12x^2 - 8x - 1| + |12x^2 + 8x - 1|) + \frac{4}{3}(|3x^2 - x - 1| + |3x^2 + x - 1|) = \frac{1}{3}\max\{|12x^2 - 1|, 8|x|\} + \frac{8}{3}\max\{|3x^2 - 1|, |x|\} \le 9.$$

(ii) Thay các "nghiệm" a, b, c, d tìm được ở 5(i) vào biểu thức $f(x)$ (cũng có thể dùng công thức nội suy Lagrange), ta thấy

$$\begin{aligned} f(x) \equiv & -2\frac{\alpha}{3}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)(x-1) \\ & +4\frac{\beta}{3}(x^2-1)\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ & -4\frac{\gamma}{3}(x^2-1)\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ & +2\frac{\delta}{3}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)(x+1). \end{aligned}$$

Bây giờ, đặt $h(x) := dx^3+cx^2+bx+a \equiv x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)$, ta suy ra

$$\begin{aligned} h(x) \equiv & -2\frac{\alpha}{3}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)(1-x) \\ & +4\frac{\beta}{3}(1-x^2)\left(1-\frac{x}{2}\right) \\ & -4\frac{\gamma}{3}(1-x^2)\left(1+\frac{x}{2}\right) \\ & +2\frac{\delta}{3}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)(1+x). \end{aligned}$$

Vậy, khi $|x| \le 1$, ta có đánh giá:

$$\begin{aligned} |h(x)| \le & \frac{2}{3}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)(1-x) \\ & +\frac{4}{3}(1-x^2)\left(1-\frac{x}{2}\right) \\ & +\frac{4}{3}(1-x^2)\left(1+\frac{x}{2}\right) \\ & +\frac{2}{3}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)(1+x) \le 4. \end{aligned}$$

Bài 6.

(i) Đặt $d := f(1) = a+b+c$, $e := f(-1) = a-b+c$, ta có

$$f(x) \equiv \frac{d}{2}(x^{2n}+x)+\frac{e}{2}(x^{2n}-x)+c(1-x^{2n}).$$

Theo giả thiết,

$$\text{(3)}\quad \begin{aligned} & \max\{|c|,|d|,|e|\} \\ & = \max\{|f(0)|,|f(1)|,|f(-1)|\} \le 1. \end{aligned}$$

Khi $|x| \le 1$, (3) và bài toán 2 cho ta

$$\begin{aligned} & |f(x)| \le \frac{1}{2}(|x^{2n}+x|+|x^{2n}-x|)+|1-x^{2n}| \\ & = \max\{x^{2n},|x|\}+1-x^{2n} = 1+|x|-x^{2n}. \end{aligned}$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN cho $2n$ số không âm

$$x^{2n}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}}, \frac{1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}}}_{2n-1 \text{ số}}$$

ta có

$$x^{2n} + \frac{2n-1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}} \ge 2n\sqrt[2n]{\frac{x^{2n}}{4^n n^{2n}}} = |x|.$$

Vì thế, $|f(x)| \le \dfrac{2n-1}{\sqrt[2n-1]{4^n n^{2n}}} + 1$. Chú ý rằng ta cũng có thể giải cách khác thông qua khảo sát hàm $g(t) = 1+t-t^{2n}$.

(ii) Khi $1 \le |x| \le M < \infty$, có

$$\begin{aligned} |f(x)| \le & \frac{1}{2}(|x^{2n}+x|+|x^{2n}-x|) \\ & +|1-x^{2n}| \\ = & \max\{x^{2n},|x|\}+x^{2n}-1 \\ \le & 2M^{2n}-1. \end{aligned}$$

TÀI LIỆU

[1] S. Bernstein, *Leçon sur les propriétés extrémales et la meilleur approximation des fonctions analytiques d'une variable rélle*, Gauthier Villar, Paris, 1926.

[2] R.P. Boas, Inequalities for the derivatives of polynomials, *Math. Magazine* **42** (1969), 165-174.

[3] N.K. Govil and R.N. Mohapatra, Markov and Bernstein Type Inequalities for Polynomials, *J. Inequal. & Appl.* **3** (1999), 349-387.

[4] A.A. Markov, On a problem of D.I. Mendeleev (Russian), *Zapishi Imp. Akad. Nauk* **62** (1889), 1-24.

[5] V.A. Markov, Über Polynome die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von null abweichen, *Math. Ann.* **77** (1916), 213-258.

[6] D.I. Mendeleev, *Investigation of Aqueous Solutions Based on Specific Gravity* (Russian), St. Petersburg, 1887.

THÔNG TIN TOÁN HỌC, Tập 20 Số 3 (2016)