Hội Toán Học Việt Nam

# THÔNG TIN TOÁN HỌC

Tháng 3 Năm 2014 Tập 18 Số 1

# Thông Tin Toán Học
(Lưu hành nội bộ)




- Địa chỉ liên hệ

*Bản tin: **Thông Tin Toán Học***
*Viện Toán Học*
*18 Hoàng Quốc Việt, 10307 Hà Nội*

Email: ttth@vms.org.vn

Trang web:
http://www.vms.org.vn/ttth/ttth.htm


Ảnh bìa 1. Xem trang 20
*Nguồn: Internet*

- Bản tin **Thông Tin Toán Học** nhằm mục đích phản ánh các sinh hoạt chuyên môn trong cộng đồng toán học Việt Nam và quốc tế. Bản tin ra thường kỳ 4 số trong một năm.

- Thể lệ gửi bài: Bài viết bằng tiếng Việt. Tất cả các bài, thông tin về sinh hoạt toán học ở các khoa (bộ môn) toán, về hướng nghiên cứu hoặc trao đổi về phương pháp nghiên cứu và giảng dạy đều được hoan nghênh. Bản tin cũng nhận đăng các bài giới thiệu tiềm năng khoa học của các cơ sở cũng như các bài giới thiệu các nhà toán học. Bài viết xin gửi về tòa soạn theo email hoặc địa chỉ ở trên. Nếu bài được đánh máy tính, xin gửi kèm theo file với phông chữ unicode.



Trang web của Hội Toán học:
http://www.vms.org.vn

# Giả thuyết số nguyên tố sinh đôi

**Ngô Việt Trung** (Viện Toán học)

Cặp số nguyên tố sinh đôi là một cặp số nguyên tố liền nhau có dạng $(n, n+2)$. Cặp số nguyên tố đầu tiên là $(3, 5)$, sau đó là $(5, 7)$, $(11, 13)$, ... Số nguyên tố sinh đôi cực hiếm. Tuy nhiên, cứ sau vài năm người ta lại tìm thấy một cặp số sinh đôi lớn hơn. Từ thời Hy Lạp cổ đại Ơclit (Euclide) đã tin rằng có vô số các cặp số nguyên tố sinh đôi. Đã hàng thế kỷ trôi qua mà vẫn chưa có ai chứng minh được dự đoán của Ơclit, đến mức nhiều người coi đó là một điều bí hiểm. Ngày nay người ta gọi điều này là giả thuyết số nguyên tố sinh đôi. Cái khó ở đây là không có công thức mô tả các số nguyên tố. Để tìm các số nguyên tố trong một bảng số thì người ta thường loại bỏ dần các hợp số là bội của các số nguyên tố trước đó. Phương pháp này được gọi là sàng Ơra-tô-xten (Erathostenes) theo tên một nhà toán học Hy Lạp cổ đại. Tuy nhiên phương pháp này chỉ hiệu quả khi tìm các số nguyên tố nhỏ hơn hàng chục triệu.

Năm 1849 nhà toán học Pháp de Polignac đưa ra giả thuyết tổng quát hơn là với mọi số chẵn $k \geq 2$, tồn tại vô hạn các cặp số nguyên tố $m, n$ sao cho $m-n = k$. Giả thuyết này cũng chưa được giải quyết cho bất kỳ một số $k$ nào. Người ta có thể tìm cách giải quyết giả thuyết yếu hơn là tồn tại vô hạn cặp số nguyên tố $m, n$ sao cho $2 \leq n-m \leq k$. Giả thuyết yếu này được gọi là giả thuyết về chặn trên cho khoảng cách các số nguyên tố. Tuy nó không tương đương với giả thuyết của de Polignac, nhưng trong trường hợp $k = 2$ thì nó chính là giả thuyết số nguyên tố sinh đôi. Nhiều nhà toán học cho rằng các phương pháp nghiên cứu hiện nay chưa đủ sức giải quyết ngay cả giả thuyết yếu trên. Nhà số học Goldston cho rằng "Đây là một trong những vấn đề mà ta không chắc loài người có thể giải được".

Ngày 17/4/2013 tòa soạn tạp chí Annals of Mathematics nhận được bản thảo của một nhà toán học vô danh là Yitang Zhang khẳng định đã giải quyết được giả thuyết yếu trên cho $k = 70$ triệu. Tuy 70 triệu còn xa với mục tiêu $k = 2$, nhưng đây có thể coi là bước đi đột phá trong việc chứng minh giả thuyết số nguyên tố sinh đôi. Khoảng cách giữa 2 và 70 triệu tuy lớn nhưng vẫn không thấm gì so với khoảng cách giữa 70 triệu và vô hạn! Công trình của Zhang đã được thẩm định và được công bố trong Tập 179 Số 3 của tạp chí danh tiếng Annals of Mathematics, xuất bản tháng 3 năm 2014. Andrew Granville, một nhà số học có tiếng nói rằng "Không ai biết anh ta cả. Bỗng nhiên anh ta chứng minh được một trong những kết quả lớn nhất trong lịch sử lý thuyết số."

Yitang Zhang sinh năm 1955 tại Trung Quốc. Năm 1985 ông sang Mỹ làm nghiên cứu sinh sau khi tham dự lớp cao học do nhà toán học Hoa kiều Shiing-Shen Chern tổ chức ở Bắc Kinh. Ông bảo vệ luận án tiến sỹ năm 1991 sau 7 năm làm nghiên cứu sinh tại Đại học Purdue dưới sự hướng dẫn của Tzuong-Tsieng

Moh. Đề tài luận án do ông chọn là về giả thuyết Jacobian. Đây là một giả thuyết lâu đời được nhà toán học Stephen Smale (huy chương Fields năm 1966) coi là một trong 18 bài toán của thế kỷ 21. Zhang tưởng rằng mình đã chứng minh được giả thuyết này, nhưng sau đó người ta phát hiện ra một kết quả sai của Moh được Zhang dùng trong chứng minh của mình.

Yitang Zhang - ĐH New Hampshire, Mỹ.
*Nguồn: Internet*

Cho đến nay Zhang mới công bố hai công trình toán học vào các năm 1985 (năm bảo vệ luận án thạc sỹ) và 2001. Ông là dạng nhà toán học chỉ chuyên tâm giải quyết các vấn đề khó. Cuộc đời của Zhang có nhiều gian truân. Sau khi bảo vệ luận án tiến sỹ ông không xin được việc làm ở các trường đại học và ông đã phải làm nhiều việc thời vụ như dọn bàn, đưa đồ ăn, trực khách sạn, kế toán, v.v. Mãi đến năm 1999 ông mới được nhận vào làm giảng viên ở Đại học New Hampshire nhưng không có chức danh chính thức và làm việc ở đó cho đến ngày nay. Ngay sau khi công bố kết quả trên, Zhang nhận được nhiều giải thưởng danh giá và được nhiều trường đại học danh tiếng ở Mỹ, Trung Quốc và Đài Loan mời đến làm việc. Tuy nhiên ông vẫn quyết định ở lại Đại học New Hampshire. Tại Đại hội Toán học thế giới năm nay ở Seoul ông được mời đọc báo cáo toàn thể đặc biệt ngang hàng với các báo cáo giải thưởng Fields.

Nghiên cứu của Zhang có xuất xứ từ một bài báo của Goldston, Pintz và Yildirim (GPY) công bố năm 2005. Bài báo này chứng minh rằng luôn tồn tại các cặp số nguyên tố liền nhau mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn rất nhiều so với khoảng cách trung bình giữa hai số nguyên tố liền nhau. Để có được kết quả này GPY đã đưa ra một phương pháp để lọc các cặp nguyên tố liền nhau trong một khoảng nào đó giống như cái sàng Ơ-ra-tô-xten lọc các số nguyên tố. Ngoài ra, họ còn dùng một tham số gọi là mức phân bố số nguyên tố. Người ta biết rằng tham số này lớn hơn hoặc bằng $1/2$ và điều này đủ để chứng minh kết quả của GPY. Họ cũng nhận xét rằng nếu tham số này lớn hơn $1/2$ thì dùng cái sàng của họ sẽ chứng minh được sự tồn tại vô hạn cặp số nguyên tố liền nhau bị chặn bởi một số $k$ nào đó. Trong bài báo của mình, GPY viết rằng kết quả của họ "chỉ cách kết quả đó bằng bề dày một sợi tóc".

Zhang từng nghiên cứu lý thuyết số trong luận văn cao học nên ông để ý đọc bài báo của GPY. "Câu văn này lập tức gây ấn tượng với tôi", ông hồi tưởng lại. Ông bắt đầu tìm cách mở rộng kết quả của GPY. Trong ba năm sau đó, ông không tiến thêm được một bước nào. "Tôi quá mỏi mệt", ông nói. Hè năm 2012 ông quyết định nghỉ một chút và đi thăm một người bạn ở Colorado mà không mang bất kỳ tài liệu toán học nào. Tuy nhiên ông vẫn bị ám ảnh bởi giả thuyết chặn trên cho khoảng cách các số nguyên tố. Trong một lúc mơ màng ngoài vườn của bạn, ông chợt tìm ra ý tưởng cho lời giải. "Tôi lập tức tin nó đúng". Để giải quyết giả thuyết ông thấy không cần thiết phải lọc tất cả các số mà chỉ cần lọc các số có thừa số nguyên tố không lớn lắm. Như vậy là cái sàng của ông tuy không tốt bằng cái sàng của GPY nhưng lại có độ linh hoạt đủ để giải quyết vấn đề. Theo ông, "Có rất nhiều cơ may trong sự nghiệp của bạn nhưng quan trọng là phải luôn luôn suy nghĩ".

Daniel Goldston - ĐH bang San Jose, Mỹ. *Nguồn: Internet*

János Pintz - Viện Toán học Alfréd Rényi, Budapest, Hungary, và Cem Y. Yildirim - ĐH Boğaziçi, Istanbul, Thổ Nhĩ Kỳ. *Nguồn: Internet*

Zhang tự nhận mình là một người rụt rè, nhưng "khi làm báo cáo và tập trung vào toán học, tôi quên mất sự rụt rè của tôi". Có người hỏi ông có cảm thấy cay đắng về số phận long đong của mình không thì ông trả lời "Cái đầu của tôi luôn bình thản. Tôi không quan tâm nhiều lắm đến tiền tài hay danh vọng. Tôi thích giữ im lặng và tiếp tục làm những gì mà tôi quan tâm". Lại có người hỏi liệu ông có khuyên người khác làm theo ông không thì ông trả lời "khó nói lắm" và "tôi chọn đường đi của mình và đó là con đường của riêng tôi". Gần đây ông bắt đầu nghiên cứu một đề tài khác và không muốn thổ lộ cho người khác biết. Ông chỉ nói "Hy vọng nó sẽ cho một kết quả tốt". Theo Tzuong-Tsieng Moh, thầy của Zhang, thì ông thích câu nói của Khổng Tử rằng "người biết nghề không sánh được với người yêu nghề, người yêu nghề không sánh được với người lấy nghề mình làm niềm vui".

Kết quả của Zhang lập tức dẫn đến câu hỏi có thể đưa chặn 70 triệu xuống nhỏ hơn không, nếu có thể đưa chặn đó về bằng 2 thì ta có chứng minh cho giả thuyết số nguyên tố sinh đôi. Thực ra, Zhang dùng chặn 70 triệu chỉ để làm cho chứng minh đơn giản hơn. Đến cuối tháng 5/2013 các nhà toán học đã cải thiện chặn trên của Zhang xuống còn 60 triệu. Tháng 6/2013 nhà toán học Terence Tao (huy chương Fields năm 2006) lập một đề án trực tuyến Polymath để các nhà toán học có thể cùng nhau tham gia thảo luận trực tuyến với mục đích giảm chặn trên xuống nhỏ hơn nữa. Trong vài tuần sau đó thì tình hình cải thiện theo một tốc độ chóng mặt, "cứ khoảng nửa tiếng lại có một chặn trên tốt hơn", Tao hồi tưởng lại. Đến cuối tháng 7/2013 người ta đã đưa con số 70 triệu trong chứng minh của Zhang xuống còn 4680. Đề án Polymath này hiện đang tập trung vào việc viết một bài báo tập thể về kết quả này. Bản thảo hiện nay đã dài hơn 150 trang, dự kiến sẽ công bố trên tạp chí "Algebra and Number Theory".

Câu chuyện vẫn chưa dừng lại ở đây vì đến ngày 19/11/2013, trên trang ArXiv[(1)] có một nhà toán học trẻ tên là James Maynard đã đưa ra một chặn trên mới là 600 với một chứng minh hoàn toàn độc lập với chứng minh của Zhang. Đặc biệt hơn, phương pháp của Maynard còn cho phép nghiên cứu không chỉ các cặp số nguyên tố mà còn cả các các bộ số nguyên tố liền nhau. Maynard vừa mới bảo vệ

[(1)]Trang web có cơ sở dữ liệu lớn nhất mà các nhà toán học, vật lý, tin học công bố các công trình của mình ở dạng tiền ấn phẩm trước khi công bố chính thức (TTTH).

luận án tiến sĩ về sàng các số nguyên tố và hiện đang nghiên cứu sau tiến sĩ tại Đại học Montreal, Canada.

James Maynard - Nghiên cứu viên sau tiến sỹ tại ĐH Montreal, Canada. *Nguồn: Internet*

Công trình của Maynard, theo một nghĩa nào đó, cũng khởi thủy từ bài báo của GPY. Trước đó, hai tác giả Goldston và Yildirim đã từng công bố một phương pháp sàng cặp số nguyên tố liền nhau. Ngay sau đấy người ta phát hiện ra phương pháp này có lỗi. Sau khi GPY thay đổi phương pháp sàng để sửa lỗi trên thì mọi người đổ xô vào nghiên cứu bài báo mới mà quên hẳn mất phương pháp bị hổng trước đó. Cách đây hơn một năm, Maynard quyết định xem lại bài báo cũ của Goldston và Yildirim. Anh phát hiện thấy có thể cải thiện phương pháp có lỗi đó một cách hiệu quả hơn cách GPY đã làm. Ý tưởng của Maynard rất đơn giản. Người hướng dẫn sau tiến sĩ của Maynard là Granville nhận xét rằng “Đó là một điều mà những người như tôi sẽ gõ vào trán và tự nhủ ta có thể chứng minh cái này bảy năm trước đây”.

Ngay sau công bố của Maynard, một đề án trực tuyến Polymath khác được lập ra nhằm sử dụng phương pháp của Maynard để đưa ra các chặn trên nhỏ hơn nữa. Khi bài báo này được viết, người ta đã giảm chặn trên xuống còn 252. Các đề án Polymath thu hút được rất nhiều chuyên gia từ các hướng nghiên cứu khác nhau tham gia. Họ có thể tối ưu hóa các bước khác nhau trong kỹ thuật chứng minh của Zhang và Maynard để tìm ra các chặn trên nhỏ hơn. Công việc của họ hoàn toàn phụ thuộc lẫn nhau. Nếu một người tìm ra kết quả hay ý tưởng mới thì người khác cũng phải thay đổi tương ứng các dữ kiện nghiên cứu của mình. Chuyên gia tính toán Andrew Sutherland của Viện công nghệ Massachusetts nói rằng “Luật chơi thay đổi hàng ngày”, “Trong lúc tôi đang ngủ thì các đồng nghiệp ở Châu Âu đã tìm thấy một chặn trên mới. Nhiều khi, tôi thức đến 2 giờ sáng để thông báo một ý tưởng mới”. Trong khi Zhang và Maynard là dạng những nhà toán học tài năng nghiên cứu một mình vài năm cho đến khi đạt được một kết quả làm chấn động mọi người thì các đề án Polymath khác hẳn. Chúng cần một sự hợp tác toàn diện từ nhiều người nhằm giải quyết những vấn đề toán học khó và phức tạp và thường có kết quả rất nhanh Tuy nhiên, không phải vấn đề toán học nào cũng phù hợp với cách nghiên cứu tập thể. Theo T. Tao thì “cần có những người sẵn sàng làm việc đơn độc và vượt qua những lối suy nghĩ thông thường”.

Cuối cùng, ta có thể hy vọng gì từ các kỹ thuật chứng minh của Zhang và Maynard cho việc giải quyết giả thuyết số nguyên tố sinh đôi? Phương pháp của Zhang chỉ có thể dẫn đến chặn trên bằng 16 nếu giải quyết được các vướng mắc còn tồn tại. Trong khi đó phương pháp của Maynard cũng chỉ có thể giúp giảm chặn trên xuống còn 12 là cùng. T. Tao cho biết thêm nếu công nhận một giả thuyết của Elliot-Halberstam thì có thể đưa chặn trên xuống còn 6. Theo Maynard thì khó có thể dùng các phương pháp trên để nhận được chặn trên cuối cùng là 2. Anh nhận xét “Tôi cảm thấy chúng ta cần phải có đột phá lớn về cách tiếp cận thì mới giải quyết được giả thuyết số nguyên tố sinh đôi”. Như vậy là chưa có gì đảm bảo cho việc giải quyết giả thuyết này trong một tương lai gần và giả thuyết này vẫn là một thách thức đối với trí tuệ con người.

## TÀI LIỆU

[1] K. Chang, Solving a Riddle of Primes, New York Times (2013).

[2] E. Klareich, Sudden Progress on Prime Number Problem Has Mathematicians Buzzing, Wired (2013).

[3] E. Klareich, Unheralded Mathematician Bridges the Prime Gap, Quanta Magazine (2013).

[4] L. Katz, Yitang Zhang: A prime-number proof and a world of persistence, Cnet (2013).

[5] M. McKee, First proof that infinitely many prime numbers come in pairs, Nature news (2013).

[6] T-T. Moh, "Zhang, Yitang’s life at Purdue, www.math.purdue.edu/ ttm/ZhangYt.pdf

# OSCAR ZARISKI, 1899 - 1986 *(tiếp theo và hết)*

**David Mumford**

Mười lăm năm sau hoặc lâu hơn, 1938-1951, nếu xem khoảng thời gian giữa các bài báo của Zariski viết lại lý thuyết kỳ dị của các đường cong phẳng thông qua lý thuyết định giá (valuation theory) và lý thuyết gây kinh ngạc "về các hàm chỉnh hình" (giới hạn của các hàm hội tụ đối với tô pô $I$-adic), người ta thấy một cơn sóng những ý tưởng khai phá, độc đáo và sáng tạo trong đó công cụ nối tiếp công cụ từ đại số đã được sử dụng để làm sáng tỏ những ý tưởng hình học cơ bản. Mặc dù nhiều nhà toán học ở tuổi ngoài bốn mươi thường gặt hái những kết quả từ những công trình có tính chất khai phá từ trước đó, Zariski không nghi ngờ gì đang ở cao trào của sự táo bạo trong thập kỷ này. Ông trao đổi với André Weil, lúc đó đang quan tâm đến việc xây dựng lại hình học đại số và mở rộng sang đặc số $p$, cùng lúc hướng đến những ứng dụng vào lý thuyết số. Một trong những chủ đề chính trong giai đoạn này đối với cả hai người là xây dựng cơ sở của hình học đại số trên trường cơ sở bất kỳ. Zariski gọi lý thuyết rộng hơn này là hình học đại số "trừu tượng". Dù hiếm khi đồng ý với nhau, mỗi người đều thấy công việc của người kia gây hứng thú, chính Weil sau này đã nói rằng Zariski là nhà hình học đại số duy nhất có các công trình đáng tin cậy. Cả hai đã sắp xếp cùng thăm đại học São Paulo, Brazil năm 1945 để gặp nhau. Ở đó Zariski đã đọc một giáo trình gồm ba bài giảng mỗi tuần với thính giả duy nhất là André Weil.

Giai đoạn đó cũng là những năm cá nhân ông gặp những bi kịch khủng khiếp. Trong chiến tranh, hầu hết họ hàng của ông ở Ba Lan đã bị quân Đức quốc xã giết hại. Chỉ còn gia đình riêng của ông và gia đình của hai người anh chị đã chuyển đến Israel là thoát cuộc thảm sát. Ngày Ba Lan bị chiếm, ông và Yole đang trên đường xuyên qua nước Mỹ hướng về bờ biển phía đông. Họ lắng nghe mỗi giờ chương trình tin tức trên đài phát thanh, kênh thông tin duy nhất về cơn ác mộng nửa nhân loại đang gặp phải. Họ đã không làm được gì!

Trong giai đoạn nghiên cứu này, Zariski giải quyết được nhiều bài toán bằng các phương pháp đại số do ông tự tạo ra, một công cụ mới vào thời đó. Ông đã đọc một bài tổng quan về lý thuyết mới đó tại đại hội toán học thế giới đầu tiên sau chiến tranh, tổ chức tại Cambridge, Massachusetts, Mỹ, năm 1950. Ba chủ đề trong nghiên cứu của ông là đặc biệt đẹp và sâu sắc.

Chủ đề đầu tiên là các nghiên cứu về cấu xạ song hữu tỷ, dẫn đến kết quả nổi tiếng được biết đến rộng rãi với tên gọi "Zariski's Main Theorem" (Định lý chính của Zariski). Đây là kết quả chính từ một phân tích có tính nền tảng các cấu xạ song hữu tỷ giữa các đa tạp (1943). Cấu xạ song hữu tỷ là các tương ứng đại số mà là song ánh tại hầu hết các điểm nhưng cũng có thể là blow-up (nổ) hoặc blow-down ở một số điểm đặc biệt. Zariski chỉ ra rằng nếu các điểm $P, Q$ trong tập nguồn và tập đích là tương ứng cô lập, nghĩa là tập các điểm tương ứng với $P$ chứa $Q$ nhưng không chứa đường cong nào qua $Q$ và ngược lại, và nếu hơn nữa, $P$, $Q$ là các điểm chuẩn tắc (normal) của đa tạp tương ứng, thì thực tế $Q$ là điểm duy nhất ứng với $P$ và ánh xạ là song chính quy giữa $P$ và $Q$. Dù ngắn, chứng minh của Zariski tinh tế một cách kỳ lạ.

Khái niệm mở rộng nguyên và khái niệm chuẩn tắc đã chứng tỏ vai trò cốt yếu trong lý thuyết số đại số và được mở rộng cho các vành Noether từ những năm 1930. Trong tay Zariski, khái niệm này trở thành một công cụ chính trong hình học đại số. "Main Theorem" dạng mạnh khẳng định rằng chuẩn hoá (normalization) của một đa tạp $X$ là đa tạp cực đại $X'$ song hữu tỷ với $X$, sao cho các thớ của ánh xạ $X' \to X$ là hữu hạn. Grothendieck sau này đã tổng quát hoá thành khái niệm phân tích Stein của các ánh xạ.

Federigo Enriques (5/1/1871 - 14/6/1946).
*Nguồn: Internet*

Chủ đề thứ hai là giải kỳ dị các đa tạp đại số, đỉnh cao là chứng minh của Zariski sự tồn tại những mô hình không kỳ dị (non-singular models) của các đa tạp đại số có chiều tối đa bằng 3 (trên trường đặc số 0), nghĩa là mỗi đa tạp như vậy đều tương đương song hữu tỷ với một đa tạp xạ ảnh không có kỳ dị (1939, 1940, 1944). Đây là bài toán mà lời giải luôn lẩn tránh hướng tiếp cận đơn sơ của trường phái hình học Ý. Thậm chí với các đa tạp chiều 2, mặc dù một vài chứng minh cổ điển là cơ bản đúng, đã có nhiều cách tiếp cận sai được xuất bản trước đó. Zariski tấn công bài toán này với toàn bộ kỹ thuật đang có, theo đuổi không ngừng nghỉ qua sáu bài báo với tổng số hơn 200 trang giấy. Có lẽ công cụ mới nổi bật nhất là việc ứng dụng lý thuyết định giá tổng quát vào các trường hàm và dẫn tới phương pháp dùng bất biến song hữu tỷ để mô tả các điểm phải giải kỳ dị. Ở đây một lần nữa, mặc dù cấu trúc của các định giá đã được tìm hiểu trước đó, chúng thực sự sống lại trong tay Zariski và dành lấy vị trí xứng đáng trong hình học đại số. Mặc dù bị đẩy sang bên lề trong những năm sau đó, không nghi ngờ gì lý thuyết này sẽ lại hồi sinh.

Kết quả này chứng minh cho thế giới toán học sức mạnh của những ý tưởng mới. Trong nhiều năm, công trình này được những người trong ngành xem là có kỹ thuật khó nhất trong hình học đại số. Chỉ đến khi trường hợp đa tạp chiều 2 trên trường đặc số dương được Abhyankar (1956) và trường hợp đa tạp bất kỳ trên trường có đặc số 0 được Hironaka (1964) giải quyết, cái mốc này mới được chính thức vượt qua.

Chủ đề thứ ba là lý thuyết "các hàm chỉnh hình" trừu tượng (1948, 1951). Ý tưởng là dùng khái niệm đầy đủ hoá của một vành đối với một iđêan ($I$-adic completion) để thay cho khái niệm chuỗi lũy thừa hội tụ và xét các phần tử của những vành đầy đủ đó trong các tình huống của hàm chỉnh hình cổ điển. Do lý thuyết đầy đủ hoá ít được phát triển vào thời điểm đó, Zariski đã viết một số bài báo cơ sở về chủ đề này để chuẩn bị cho công trình trên, bao gồm việc phát triển một lý thuyết đầy đủ hoá $I$-adic của các vành Noether đối với một iđêan $I$ tuỳ ý. Các bài báo về hàm chỉnh hình của ông ngay lập tức được thừa nhận là nền tảng, mặc dù những ứng dụng chính lúc bấy giờ chủ yếu cho một phiên bản mạnh hơn của "Định lý chính", gọi là "Định lý liên thông" (Connectedness theorem), khẳng định rằng các thớ của một cấu xạ song hữu tỷ từ một đa tạp xạ ảnh vào một đa tạp chuẩn tắc (normal) luôn là liên thông. Về sau, lý thuyết này qua tay Grothendieck đã trở thành một công cụ trung tâm của hình học đại số[1].

Chuỗi các công trình của Zariski trở thành một hiện tượng và được thế giới toán học ghi nhận ngay lập tức. Năm 1944 ông nhận giải thưởng Cole của Hội Toán học Mỹ. Năm 1945 ông nhận một chân giáo sư nghiên cứu tại đại học Illinois. Ngay từ đầu những năm bốn mươi, những công trình của ông đã gây sự chú ý của G. D. Birkhoff và Birkhoff quyết định ông phải đến đại học Harvard. Thực tế ông nhận được đề nghị và chuyển đến đại học Harvard năm 1947, ông ở đó cho đến cuối đời. Zariski là người Do Thái đầu tiên gia nhập khoa toán của Harvard nhưng ông thích nghi rất nhanh và thực sự thích thú với những tập quán hình thức của nơi đó. Ông có ảnh hưởng rất lớn đến môi trường toán học ở Harvard và ông rất thích những cơ hội lôi kéo những người giỏi nhất đến Harvard cũng như trưng ra những học trò giỏi nhất của mình. Trưởng khoa Bundy thường ví ông là "cướp biển Ý" do sự sắc sảo của ông trong việc giữ cho mọi việc được theo cách riêng của mình, dù theo các kênh thông thường hay không. Bất cứ khi nào, nguyên tắc bổ nhiệm ở Harvard, thường gọi là kế hoạch Graustein theo tên nhà toán học đã lập ra các nguyên tắc đó, nếu hợp với ý định của ông thì ông dùng, nếu không thì ông giả vờ không biết những nguyên tắc đó và nhấn mạnh mỗi trường hợp cần được xem xét dựa trên đánh giá cụ thể. Trong hơn ba mươi năm tiếp theo, ông đã biến Harvard thành trung tâm hình học đại số của thế giới. Seminar của ông đã đón Chow,

[1]Phong cách của Grothendieck trái ngược với Zariski. Trong khi các chứng minh của Zariski luôn có một điểm nút, một chỗ rẽ tinh tế ở giữa chừng thì Grothendieck sẽ không dừng lại cho đến lúc mọi bước đều có vẻ là tầm thường. Với các hàm chỉnh hình, Grothendieck đổ rằng các kết quả là rất sâu sắc đối với Zariski vì ông ấy chỉ chứng minh cho các nhóm đối đồng điều bậc 0. Theo Grothendieck, cách dễ dàng là chứng minh cho nhóm đối đồng điều bậc cao nhất trước, sau đó dùng quy nạp giảm dần (TG).

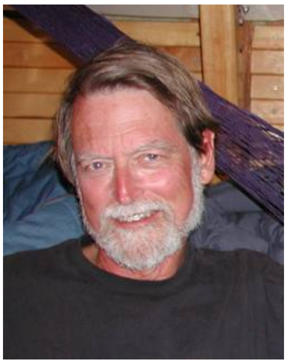
Grothendieck, Hodge, Igusa, Kodaira, Nagata, Serre, Weil và nhiều người khác. Những buổi tối hào hứng và ấm áp ở nhà ông với sự nồng nhiệt của Oscar và Yole làm những người khách không dễ quên.

Công việc xây dựng lại hình học đại số đã được bắt đầu bằng việc viết quyển *Các mặt đại số* và đến bây giờ, khi Zariski cảm giác đã có đủ những công cụ mạnh và tổng quát, một cách tự nhiên ông muốn xem xét để hệ thống lại toàn bộ kết quả chính của lý thuyết các mặt. Danh sách không đầy đủ một số chủ đề ông đã làm lại gồm: (i) Quan hệ giữa tính chất không kỳ dị của hình học với khái niệm tính chính quy của đại số (1947); (ii) Cơ sở của hệ tuyến tính (linear systems - 1950, 1962); (iii) Các định lý triệt tiêu của đối đồng điều (1952, đặc biệt là kết quả được ông gọi là "bổ đề của Enriques-Severi", sau đó được Grothendieck và Serre tiếp tục); (iv) Bài toán về sự tồn tại các mô hình không kỳ dị cực tiểu trong các lớp tương đương của các mặt đại số (1958); (v) Phân loại các đa tạp theo Castelnuovo và Enriques (1958, ngày nay được biết đến là phân loại theo chiều Kodaira); và (vi) Đối chiều của các quỹ tích rẽ nhánh (1958). Với mỗi lĩnh vực này ông đều phơi bày trước các đồng nghiệp và học trò cách nhìn từ nhiều lĩnh vực để khảo sát cũng như những triển vọng thú vị. Ông đã viết một cuốn sách giáo khoa mà ngày nay trở thành kinh điển về đại số giao hoán nhằm hướng đến các ứng dụng hình học mà ông tiên phong.

Trong phạm vi những công việc này, Zariski phát triển đầy đủ một hướng tiếp cận với cơ sở của hình học đại số và viết lại trong hai tập của quyển đại số giao hoán nêu trên cùng với một học trò là P. Samuel. Bản thân ông cũng chào đón sự xuất hiện của những định nghĩa và kỹ thuật mới hơn, dẫn đến những kết quả mạnh hơn, vì vậy ông đã không xuất bản công trình của riêng mình về cơ sở của hình học đại số vì nhận ra rằng công trình đó chưa phải ở dạng hoàn tất. Chấp nhận ngôn ngữ mới của lý thuyết bó và đối đồng điều, ông đã dành thời gian ở Viện nghiên cứu Mùa hè tại Colorado vào năm 1953 để nghiên cứu các ý tưởng cơ bản của các lý thuyết mới này, mặc dù không bao giờ dùng những ngôn ngữ này trong các công trình của mình. Khi Grothendieck xuất hiện, ngay lập tức ông mời đến Harvard. Grothendieck về phần mình cũng rất trông đợi làm việc cùng Zariski.

Oscar Zariski tại ĐH Cambridge, Mỹ (1969).
*Nguồn: George M. Bergman*

Giai đoạn cuối cùng của sự nghiệp toán học của Zariski là sự trở lại với các nghiên cứu về kỳ dị (1965-1975). Zariski hoàn toàn không có khái niệm về hưu, ông đã dành những năm ở tuổi sáu mươi và bảy mươi của mình cũng như phần còn lại của tuổi tám mươi để tấn công trên diện rộng bài toán đẳng kỳ dị. Mục đích hướng đến là tìm một cách phân tích tự nhiên một đa tạp $X$ thành các mảnh $Y$, mỗi mảnh được tạo thành từ một đa tạp con của $X$ bằng cách bỏ đi một họ hữu hạn các đa tạp con có chiều thấp hơn, sao cho dọc theo mỗi đa tạp con $Y$, đa tạp $X$ có hầu như cùng loại kỳ dị tại mọi điểm. Zariski có những bước tiến quan trọng để đạt được các mục tiêu này, nhưng bài toán này rất khó, thậm chí đến ngày nay công việc nghiên cứu vẫn đang được tiến hành.



Tác giả David Mumford (huy chương Fields 1974) là một học trò của O. Zariski. *Nguồn: Internet*

Với những đóng góp phi thường cho lĩnh vực hình học đại số, Zariski đã được cộng đồng ghi nhận bằng nhiều danh hiệu. Ông được trao bằng tiến sỹ danh dự của Holy Cross (1959), Brandeis (1965), đại học Purdue (1974) và từ đại học Harvard (1981). Ông được trao tặng Huy chương Khoa học Quốc gia (Mỹ - 1965), giải thưởng Steele cho thành tựu trọn đời (1981) và giải thưởng Wolf (1982).

Trong những năm cuối đời Zariski phải chiến đấu với những vấn đề về thính giác. Ông từng rất sống động, cả trong toán học và trong hoạt động thường ngày với bạn bè, đồng nghiệp và sinh viên, ở mọi sắc thái, nhưng lúc cuối đời ông lại bị căn bệnh ù tai tấn công cùng với sự nhạy cảm với tiếng ồn và mất dần thính lực. Điều này khiến ông thu mình lại trong công việc nghiên cứu và ít ra ngoài. Chỉ có tình yêu vô bờ của gia đình mới giữ được ông trong những năm cuối cùng của mình. Ông qua đời tại nhà riêng ở Brookline, Massachusetts vào ngày 4 tháng Bảy năm 1986. Bạn bè, học trò và các đồng nghiệp của ông sẽ nhớ mãi không chỉ các định lý tuyệt đẹp ông đã tìm ra mà cả sự mạnh mẽ và ấm áp của con người mà họ đã biết và yêu quí.

Người dịch: **Đoàn Trung Cường** (Viện Toán học) và **Phạm An Vinh** (ĐH Missouri)

*Lược dịch từ bản tiếng Anh với sự cho phép của tác giả.*

# Giải thưởng Lê Văn Thiêm 2013

**Hà Huy Khoái** (Đại học Thăng Long)

## 1. Về giải thưởng Lê Văn Thiêm

Giáo sư Lê Văn Thiêm (1918-1991) là Chủ tịch đầu tiên của Hội toán học Việt Nam. Ông là nhà toán học nổi tiếng, đã có những đóng góp lớn trong nghiên cứu và ứng dụng toán học. Ông cũng là một trong những người đặt nền móng cho nền giáo dục đại học ở nước ta, là người thầy của nhiều thế hệ các nhà toán học Việt nam. Giáo sư Lê Văn Thiêm luôn giành sự quan tâm đặc biệt đến việc giảng dạy toán học ở các trường phổ thông. Ông là một trong những người sáng lập hệ thống trường phổ thông chuyên toán và báo Toán học và Tuổi trẻ. Giáo sư Lê Văn Thiêm đã được Nhà nước tặng Huân chương độc lập hạng nhất và Giải thưởng Hồ Chí Minh (đợt 1). Giải thưởng Lê Văn Thiêm do Hội Toán học Việt Nam đặt ra nhằm góp phần ghi nhận những thành tích xuất sắc của những thầy giáo và học sinh phổ thông đã khắc phục khó khăn để dạy toán và học toán giỏi, động viên học sinh đi sâu vào môn học có vai trò đặc biệt quan trọng trong sự phát triển lâu dài của nền khoa học nước nhà. Giải thưởng mang tên Lê Văn Thiêm cũng là sự ghi nhận công lao của Giáo sư Lê Văn Thiêm, một nhà toán học lớn, một người thầy đã hết lòng vì sự nghiệp giáo dục.

## 2. Giải thưởng Lê Văn Thiêm 2013

Hội Toán học Việt Nam quyết định trao Giải thưởng Lê Văn Thiêm 2013 cho những giáo viên và học sinh sau đây:

**GIÁO VIÊN**

Thầy giáo Nguyễn Văn Thông, sinh năm 1960, hiện là giáo viên tại Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng.

Một số thành tích về giảng dạy:

- Tham gia dạy Toán hơn 30 năm, trong đó dạy Chuyên Toán 18 năm.
- Cùng với tổ toán của trường, tham gia bồi dưỡng được nhiều học sinh đạt giải cao, trong đó có hơn 20 học sinh đạt giải học sinh giỏi (HSG) cấp quốc gia, 4 em đạt huy chương cuộc thi Toán quốc tế (IMO); nhiều học sinh đạt Huy chương vàng cuộc thi 30-4.
- Có nhiều bài viết chuyên đề trong các hội thảo giảng dạy toán.
- 22 năm là giáo viên dạy giỏi và chiến sĩ thi đua.
- Danh hiệu Nhà giáo ưu tú (2008).

**HỌC SINH**

1. Võ Anh Đức, THPT Chuyên Hà Tĩnh, hiện nay đang là sinh viên tại Khoa Toán-Tin học, ĐH Bách khoa Hà Nội.

- Giải nhì HSG Quốc gia 2012.
- Giải nhì HSG Quốc gia 2013.
- Huy chương vàng IMO 2013.

2. Chu Thị Thu Hiền, THPT chuyên Long An. Em Hiền đã vượt nhiều khó khăn, đạt thành tích học tập xuất sắc:

- Lớp 10: Huy chương bạc Olympic 30-4.
- Lớp 11: Huy chương vàng Olympic 30-4; Giải nhì HSG toàn tỉnh Long An; Giải khuyến khích HSG Quốc gia.
- Lớp 12: Giải nhất HSG tỉnh Long An; Giải ba HSG Quốc gia; Giải nhì cuộc thi giải toán của báo Toán học và Tuổi trẻ.

3. Phạm Tuấn Huy, THPT Năng khiếu ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh.

- Giải nhất HSG Quốc gia 2013.
- Huy chương vàng IMO 2013.

4. Lê Quốc Tùng, THPT Chuyên Quảng Trị.

- Lớp 10: Huy chương Bạc môn Toán cuộc thi HSG Đồng bằng Bắc Bộ.
- Lớp 11: Giải ba HSG Quốc gia.
- Lớp 12: Giải nhất HSG Quốc gia.

Lễ trao giải đã được tổ chức tại cuộc Gặp mặt đầu xuân của Hội Toán học Việt Nam tại Hà Nội, ngày 22/2/2014. Đến dự và tham gia trao giải có nhiều nhà toán học, nhiều thầy cô giáo, trong đó có Giáo sư Đào Trọng Thi, Chủ nhiệm Ủy ban Văn hóa giáo dục - Thanh thiếu niên nhi đồng của Quốc Hội, Giáo sư Trần Văn Nhung, Tổng thư ký HĐCDGSNN, nguyên Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo; các Giáo sư Chủ tịch và nguyên chủ tịch Hội Toán học Việt Nam: Đỗ Long Vân, Phạm Thế Long, Lê Tuấn Hoa, Nguyễn Hữu Dư.

Hai em Chu Thị Thu Hiền và Phạm Tuấn Huy không có điều kiện tham dự cuộc gặp mặt tại Hà Nội được trao giải tại buổi lễ tiến hành ở Tp. Hồ Chí Minh.

# Toán học giúp định vị máy bay MH370

**Hà Trung**

"Làm thế nào mà toán học có thể xác định được ai đó đã chết" là tít một bài báo trên trang mạng SLATE, còn hãng thông tin CNN thì chạy tít "Làm thế nào mà những tính toán 'đột phá' tìm thấy đường đi của máy bay MH370". Đó là chiếc máy bay của Hãng hàng không Malaysia mất tích ngày 8/3 cùng với 239 hành khách và nhân viên phục vụ. Từ lúc đó trở đi đã có không biết bao nhiêu phỏng đoán về số phận chiếc máy bay. Tất cả đã chấm dứt ngày 24/3 khi Thủ tướng Malaysia tuyên bố máy bay MH370 đã rơi ở vùng biển phía nam Ấn Độ Dương và không ai sống sót cả.

Ngay lập tức người ta đặt ra câu hỏi là làm thế nào mà ông Thủ tướng Malaysia có thể khẳng định như vậy khi chưa tìm thấy bất kỳ mảnh vỡ nào của chiếc máy bay. Ai cũng biết rằng toàn bộ liên lạc giữa máy bay và mặt đất đã bị ngắt và các ra đa quân sự của Malaysia chỉ cho biết là máy bay đã đổi hướng sau khi mất tín hiệu. Sau đó là một khoảng trống mênh mông và người ta không có bất cứ dấu vết nào của chiếc máy bay ngoài 8 tín hiệu "ping" vô cùng bé nhỏ phát ra từ một thiết bị radio trên máy bay trả lời tín hiệu thăm hỏi của vệ tinh hãng INMARSAT.

Cứ một tiếng một lần vệ tinh của hãng truyền tin INMARSAT truyền đi một tín hiệu "ping" đến các thiết bị trong hệ thống và các thiết bị này sẽ phát tín hiệu trả lời. Mục đích chỉ để kiểm tra sự thông suốt trong hệ thống. Máy bay MH370 cũng có thiết bị radio thuộc hệ thống INMARSAT. Vì chuyện này không có gì quan trọng nên các phi công không biết thiết bị này trên máy bay sẽ tự động trả lời tín hiệu thăm hỏi của vệ tinh. Tín hiệu "ping" trả lời đầu tiên là ngay sau khi máy bay mất liên lạc với mặt đất. Tín hiệu "ping" trả lời cuối cùng là tín hiệu thứ tám. Như vậy là máy bay còn bay gần bảy giờ đồng hồ sau đó. Câu hỏi tiếp theo là nó bay đi đâu. Rất tiếc là các tín hiệu này không cho biết vị trí của máy bay. Tuy nhiên người ta có thể dùng nó để xác định đường đi của máy bay 370 bằng các phương pháp toán học. Đây thật sự là một phát kiến như CNN đã đưa tin.

Trước tiên, người ta biết khoảng thời gian từ lúc vệ tinh phát đi tín hiệu thăm hỏi cho đến lúc nhận được tín hiệu trả lời từ máy bay. Người ta cũng biết trong một giây thì tín hiệu radio đi được bao xa. Với những dữ liệu này người ta tính được khoảng cách từ vệ tinh đến máy bay tại từng thời điểm nhận tín hiệu "ping". Vì thế người ta biết chiếc máy bay nằm trên một cung tròn với tâm là vệ tinh và bán kính là khoảng cách tính được, nhưng không biết tại vị trí nào và nó bay theo phương nào. Sau đấy người ta lại phát hiện ra rằng hướng đi của máy bay có thể dự đoán được từ tần số tín hiệu. Điều này cũng giống như khi ta nghe tiếng còi tàu mà có thể đoán được tàu đang đi từ đâu đến. Lý do là âm thanh (chính xác là sóng âm) sẽ bị nén lại hay nở ra khi tàu chuyển động đến gần hoặc xa ra chỗ đứng của ta. Tai ta có thể nhận biết được những biến đổi âm thanh này và nhờ đó mà ta biết hướng tàu chạy. Trong Vật lý hiện tượng này được gọi là Hiệu ứng Doppler.

Dựa theo các nguyên lý trên, các nhân viên của hãng INMARSAT đã lập nên một thuật toán cho phép tính toán đường bay của chiếc máy bay MH370. Thuật toán đã được các chuyên gia hàng không thẩm định và thử nghiệm. Khi chạy thuật toán này người ta thấy chiếc máy bay chỉ có thể rơi ở vùng biển phía nam Ấn Độ Dương, ở địa điểm mà hiện nay các máy bay và vệ tinh đang tập trung tìm kiếm các mảnh vỡ. Nơi này không có đất liền cho máy bay đậu nên Thủ tướng Malaysia mới có thể kết luận là không còn ai trên chiếc máy bay này sống sót sau hai tuần mất tích. Đó chính là lý do mà trang mạng SLATE chạy tít "Làm thế nào mà toán học có thể xác định được ai đó đã chết".

*(Tổng hợp từ Internet)*

# Lời khuyên cho một nhà toán học trẻ

**Béla Bollobás**[(1)]

Hardy đã viết: "Không có địa vị lâu bền nào trên thế giới dành cho thứ toán học thô kệch"[(2)]; tương tự như vậy, tôi tin rằng không có nơi nào trên thế giới dành cho những nhà toán học thiếu nhiệt tình, chai lì. Chỉ nên làm toán nếu bạn đam mê nó, nếu bạn vẫn làm toán thậm chí dù phải tìm thời gian cho nó sau một ngày vật lộn với một nghề khác. Như thơ và âm nhạc, toán học không phải một nghề mà là một nghiệp.

*Khẩu vị* giữ vị trí số một. Có một điều kỳ diệu trong toán học là dường như tất cả mọi người đều nhất trí với nhau thế nào là toán học tốt. Bạn nên làm việc trong những lĩnh vực quan trọng và sẽ không dễ dàng khô cạn trong một thời gian dài, nên làm việc với những bài toán đẹp và quan trọng: trong mỗi lĩnh vực tốt đều có rất nhiều những vấn đề như thế, không phải chỉ có một nhúm những bài toán nổi tiếng. Hơn nữa, nếu luôn nhắm những đích quá cao bạn sẽ mất nhiều thời gian trong bế tắc: việc này có thể chấp nhận được ở một giai đoạn nào đó trong đời, nhưng tốt nhất là nên tránh lúc mới bắt đầu sự nghiệp.

Hướng tới *cân bằng* các hoạt động toán học: nghiên cứu nên và phải là ưu tiên hàng đầu với một nhà toán học thực thụ, nhưng bên cạnh đó, nên đọc thật nhiều và giảng dạy cho tốt. Luôn hứng thú với toán học ở tất cả các trình độ, ngay cả khi bạn (hầu như) không nhận được lợi ích gì

[(1)]Nhà toán học Anh gốc Hungary. Sinh năm 1943, ông là tác giả của hơn 350 bài báo khoa học và 9 cuốn sách chuyên khảo. Với các công trình tiêu biểu trong ngành tổ hợp, năm 2011 Bollobás được bầu là hội viên Hội Hoàng gia, danh hiệu cao quý nhất tại nước Anh cho một nhà khoa học (ND).

[(2)]G. H. Hardy, *Lời xin lỗi của một nhà toán học*; xem thêm bản dịch đang hoàn thành của Nguyễn Ngọc Sơn, Trần Võ Thành và BBT Diễn đàn toán học tại http://diendantoanhoc.net/home/lịch-sử-toán-học/

cho việc nghiên cứu. Nên xem việc giảng dạy là một nguồn cảm hứng hơn là gánh nặng.

Khác với việc viết bài, đừng bao giờ để *nghiên cứu* trở thành một việc tẻ nhạt: hãy chọn những vấn đề nào mà bạn thấy khó có thể *dừng* nghĩ về chúng. Do đó biết cách lôi cuốn *chính mình* vào các bài toán luôn tốt hơn là làm nghiên cứu như thể bị ép buộc. Ở giai đoạn khởi nghiệp, khi là một nghiên cứu sinh, bạn nên nhờ thầy hướng dẫn có kinh nghiệm đánh giá các vấn đề bạn đã phát hiện ra và thấy yêu thích, thay vì làm một vấn đề được thầy giao cho, trong khi nó có thể không hợp với khẩu vị của bạn. Trên hết, thầy hướng dẫn cần phải ý thức được tương đối rõ ràng liệu một bài toán nào đó có đáng để theo đuổi không, ngay cả khi ông chưa biết rõ sức mạnh và khẩu vị của bạn. Về sau này, khi không còn phụ thuộc vào thầy hướng dẫn được nữa, bạn sẽ thường tìm thấy cảm hứng thông qua trao đổi với những đồng nghiệp gần gũi.

Tôi thực lòng khuyên bạn nên thường trực có trong đầu những bài toán thuộc hai loại sau để làm việc:

(1) Một “giấc mơ”: một bài toán lớn mà bạn muốn giải, nhưng không có lý do để có thể *tin* rằng mình sẽ làm được.
(2) Một vài vấn đề khá quan trọng bạn thấy có nhiều khả năng giải quyết được, miễn là có đủ thời gian, nỗ lực, và may mắn.

Ngoài ra, có hai loại bài toán khác nữa bạn có thể cân nhắc, tuy không quan trọng bằng các vấn đề thuộc hai loại trước.

(1) Đôi khi, nên làm việc với những bài toán ở tầm thấp mà bạn có thể chắc chắn sẽ giải quyết được tương đối nhanh, như thế thời gian dành cho chúng không làm ảnh hưởng đến mức độ tiến triển của bạn trong các bài toán thực thụ.
(2) Ở mức độ thấp hơn nữa, có những bài toán không hẳn là vấn đề nghiên cứu (hoặc đã từng là vấn đề nghiên cứu trong quá khứ) nhưng vẫn còn sức hấp dẫn, và giải quyết chúng bao giờ cũng là một việc thú vị: công việc này sẽ mang lại sự sảng khoái và tăng cường khả năng sáng tạo của bạn.

Hãy kiên nhẫn và bền bỉ. Khi nghĩ về một vấn đề nào đó, có lẽ cách hữu hiệu nhất là luôn để bài toán trong tâm trí bất kể lúc nào: Newton đã thành công bằng cách đó, và rất nhiều người khác cũng vậy. Hãy cho bản thân mình thời gian, đặc biệt khi tấn công những bài toán lớn; tự hứa với mình sẽ dành một lượng thời gian nhất định cho một bài toán lớn mà không kỳ vọng quá nhiều, sau đó tổng kết lại tình thế và quyết định phải làm gì tiếp theo. Dành cho cách tiếp cận của mình một cơ hội, nhưng đừng để bị trói buộc vào nó đến mức bỏ lỡ những hướng tấn công khác. Hãy tư duy mềm dẻo: nói theo cách của Paul Erdös, luôn giữ đầu óc mở.

Đừng ngại mắc sai lầm. Sai lầm đối với một kỳ thủ là dấu chấm hết; đối với một nhà toán học, sai lầm là một phần của cuộc chơi. Điều bạn nên lo sợ là tờ giấy trắng vẫn nằm im lìm trước mặt sau khi bạn đã nghĩ về bài toán trong một thời gian dài. Nếu sau một hồi suy nghĩ, thùng đựng rác của bạn chứa đầy dấu tích của những thử nghiệm không thành, có thể bạn vẫn đang làm việc rất tốt. Tránh lối tiếp cận dềnh dàng, ngược lại, hãy luôn vui vẻ lao vào công việc. Cụ thể hơn, giải quyết những trường hợp đơn giản nhất của một bài toán hiếm khi gây phí phạm thời gian và lại có thể rất hữu ích.

Khi đã dành một lượng thời gian đáng kể cho một vấn đề, bạn rất dễ đánh giá quá thấp những tiến bộ đã đạt được, và bạn cũng rất dễ đánh giá quá cao khả năng nhớ được tất cả mọi thứ. Tốt nhất cứ viết ra các kết quả của bạn, dù chúng hãy còn rất cục bộ: nhiều khả năng sau này cái bạn viết ra sẽ giúp tiết kiệm rất nhiều thời gian.

GS. Noga Alon (trái) và GS. Béla Bollobás (phải) tại Viện Nghiên cứu Toán Oberwolfach (MFO) năm 2009. *Nguồn: Internet*

Nếu may mắn tạo được một đột phá, bạn sẽ rất dễ thấy mất hứng thú với kế hoạch đang thực hiện và muốn dừng lại trên đỉnh vinh quang. Hãy chống lại cám dỗ này và nhìn xem đột phá bạn tạo ra còn có thể mang lại điều gì.

Khi còn là một nhà toán học trẻ, lợi thế chính của bạn là có rất nhiều thời gian dành cho nghiên cứu. Bạn có thể không nhận ra điều đó, nhưng rất khó có khả năng bạn sẽ lại có nhiều thời gian như thuở ban đầu. Ai cũng cảm thấy không có đủ thời gian để làm toán, nhưng khi năm tháng qua đi cảm giác này ngày càng trở nên rõ rệt hơn, ngày càng trở nên chính xác hơn.

Về việc *đọc*, những người trẻ tuổi ở thế yếu hơn về hàm lượng toán học đã đọc, nên để bù đắp lại, hãy đọc đến mức nhiều nhất có thể, trong cả lĩnh vực lớn của bạn lẫn toán học nói chung. Trong lĩnh vực nghiên cứu của mình, hãy đảm bảo rằng bạn đọc được nhiều công trình của những tác giả xuất sắc nhất. Những công trình này thường không được gọt dũa đến mức tối đa, nhưng chất lượng của những ý tưởng và các kết quả sẽ tưởng thưởng cho nỗ lực của bạn trong quá trình đọc. Dù bạn có đọc gì chăng nữa, hãy giữ thế chủ động: cố gắng đoán trước điều tác giả sẽ làm và thử nghĩ ra một tiếp cận tốt hơn. Nếu tác giả đi theo con đường bạn có trong đầu, đó sẽ là một niềm vui, và khi tác giả chọn một con đường khác, bạn có thể đọc tiếp để hiểu lý do. Đặt cho bản thân mình câu hỏi về các kết quả và chứng minh, ngay cả khi chúng có vẻ dễ hiểu: đó là việc có tác động sâu sắc đến hiểu biết của bạn.

Mặt khác, *không cần* phải đọc tất cả mọi thứ về vấn đề mở mà bạn định tấn công: một khi đã nghĩ sâu về nó và dường như lâm vào bế tắc, bạn có thể (và nên) đọc những thử nghiệm bất thành của những người khác.

Hãy giữ khả năng ngạc nhiên, đừng cho các hiện tượng là bắt buộc phải thế, hãy cảm nhận các kết quả và ý tưởng bạn đọc được. Bạn rất dễ lầm tưởng rằng mình hiểu tất cả mọi thứ: chẳng phải mình đã đọc xong chứng minh rồi hay sao? Những người xuất chúng thường đầu tư một lượng thời gian đáng kể để tiêu hóa những ý tưởng mới lạ. Với họ, chỉ biết một tập hợp các định lý và hiểu cách chứng minh của chúng thôi vẫn chưa đủ: họ muốn cảm thấy chúng trong máu.

Khi sự nghiệp bản thân tiến triển, hãy luôn giữ đầu óc mở với những ý tưởng mới và những hướng mới: các lãnh thổ toán học luôn thay đổi theo thời gian, và có thể chính bạn cũng phải thay đổi để không bị rớt lại phía sau. Luôn mài sắc các công cụ của mình và học thêm những công cụ mới.

Trên hết, *hãy thưởng thức và nhiệt tình với toán học*. Thưởng thức thú nghiên cứu, sẵn sàng để đọc những kết quả mới, nuôi dưỡng tình yêu toán học trong những người khác, giải trí bằng toán học ngay cả trong giờ nghỉ ngơi với những vấn đề nho nhỏ lý thú bạn bắt gặp hay được đồng nghiệp giới thiệu.

Nếu muốn tổng kết lại một lời khuyên cho tất cả chúng ta để thành công trong khoa học và nghệ thuật, khó có gì tốt hơn là nhắc lại câu Vitruvius[3] đã viết hơn hai nghìn năm trước:

*Vì cả năng khiếu không trải qua đào luyện lẫn trải qua việc đào luyện mà không có năng khiếu đều không thể tạo nên nghệ sĩ hoàn hảo.*

Người dịch: **Nguyễn Đăng Hợp** (Viện Toán học và ĐH Genoa, Ý).

*Nguồn: Mục "Lời khuyên cho một nhà toán học trẻ" trong Cẩm nang toán học Princeton, Timothy Gowers, June Barrow-Green, Imre Leader (biên tập), NXB ĐH Princeton 2008.*

# George Bernard Dantzig

**Trần Tất Đạt**

(Viện Max Planck - Leipzig, CHLB Đức)

George Bernard Dantzig (08/11/1914 - 13/05/2005) là một nhà toán học người Mỹ, được biết đến như cha đẻ của Quy hoạch tuyến tính và người phát minh ra Phương pháp đơn hình. Ông cũng có nhiều đóng góp quan trọng trong Vận trù học, Khoa học Máy tính, Kinh tế và Thống kê.

Được sinh ra tại Portland, Oregon, Dantzig được đặt theo tên của nhà văn người Ailen, George Bernard Shaw, với sự kỳ vọng của cha mẹ là ông sẽ trở thành một nhà văn. Mong ước này đã không thành hiện thực mặc dù trong cuộc đời ông cũng đã có lần háo hức để viết một cuốn tiểu thuyết.

Trước khi vào trung học, Dantzig đã rất đam mê với Hình học, đặc biệt là Hình học xạ ảnh, do ảnh hưởng từ cha của ông, Tobias Dantzig, một nhà toán học và ngôn ngữ học người Mỹ - sinh ở Latvian (từng là học trò của Henri Poincaré).

Dantzig nhận bằng cử nhân về Toán và Vật lý từ Đại học Maryland năm 1936 và bằng thạc sỹ về Toán tại Đại học Michigan năm 1937. Sau đó ông chuyển đến Washington và làm việc tại Cục Thống kê Lao động hai năm.

Năm 1939, ông bắt đầu làm nghiên cứu sinh về Thống kê tại ĐH California ở Berkeley, Mỹ, dưới sự hướng dẫn của nhà toán học Jerzy Neyman. Một câu chuyện

[3] Marcus Vitruvius Pollio, sinh vào khoảng 80-70 TCN, mất vào khoảng 15 TCN, là kiến trúc sư, kỹ sư người La Mã. Ông là tác giả của bộ sách nổi tiếng *Kiến trúc luận* (*Da Architectura*).

thú vị đã xảy ra và trở thành huyền thoại trong giới toán học. Một hôm ông đến muộn để dự một bài giảng về Thống kê của Neyman, thấy hai bài toán ghi trên bảng ông ngỡ là các bài tập về nhà. Ông chép chúng, mang về nhà và đã cố gắng giải được chúng sau vài ngày. Ông đã nghĩ rằng: "Các bài toán này dường như khó hơn một chút so với bình thường". Vào một sáng Chủ nhật sáu tuần sau đó, Neyman đã hào hứng thông báo với ông là các vấn đề mà ông đã giải được chính là hai trong số các bài toán nổi tiếng nhất mà chưa có lời giải trong Thống kê, và ông ta đã chuẩn bị giúp Dantzig xuất bản một trong hai chứng minh đó. Chứng minh của bài toán còn lại được xuất bản sau đó cùng với Abraham Wald vào năm 1951. Cả hai bài toán sau đó đã trở thành hai phần độc lập của luận án tiến sỹ của ông.

Chiến tranh Thế giới thứ hai bùng nổ, từ năm 1941 đến 1946 Dantzig tạm dừng chương trình nghiên cứu sinh để đứng đầu của chi nhánh Phân tích chiến đấu tại Văn phòng Điều khiển Thống kê của Không quân Hoa Kỳ. Chính tại đây ông đã phát hiện ra mô hình toán học cho Quy hoạch tuyến tính.

Năm 1946, ông quay lại Berkeley để hoàn thành nốt chương trình nghiên cứu sinh và nhận bằng tiến sỹ năm đó. Mặc dù Berkeley mời ông ở lại làm việc nhưng ông đã trở về Washington, nơi ông trở thành một cố vấn về toán tại Bộ Quốc phòng Mỹ với nhiệm vụ cơ giới hóa quá trình lập kế hoạch. Tại đó ông đã phát minh ra Thuật toán đơn hình.

Năm 1952, Dantzig tham gia vào Bộ môn Toán của công ty RAND. Ở đó, ông tiếp tục tăng cường sức mạnh tính toán của Quy hoạch tuyến tính và mở rộng các ứng dụng của nó.

Năm 1960, muốn tìm kiếm những người kế nhiệm, ông rời RAND để quay về ĐH California ở Berkeley làm giáo sư của Khoa Kỹ thuật công nghiệp. Ở đó ông thành lập và làm giám đốc Trung tâm Vận trù học. Năm 1963, ông xuất bản cuốn sách "Linear Programming and Extensions" (Quy hoạch tuyến tính và các mở rộng), sau này trở thành "kinh thánh" của Quy hoạch tuyến tính.

Năm 1966, ông chuyển đến Đại học Stanford làm giáo sư về Vận trù học và Khoa học máy tính. Năm 1973, ông thành lập Phòng thí nghiệm Tối ưu hóa hệ thống (SOL). Ông cũng lãnh đạo nhóm Phương pháp luận tại Viện quốc tế về Phân tích hệ thống ứng dụng (IIASA) tại Laxenburg, Áo. Sau đó, ông nhận được ghế giáo sư C.A. Criley về Khoa học vận tải và làm việc ở Stanford cho đến năm 1995 khi nghỉ hưu.

Dantzig là thành viên của Viện hàn lâm Khoa học, Viện hàn lâm Kỹ thuật và Viện hàn lâm Nghệ thuật và Khoa học Mỹ. Ông cũng nhận được nhiều giải thưởng và danh hiệu, trong đó có giải thưởng Lý thuyết John von Neumann (1974), Huy chương Khoa học Quốc gia của Mỹ (1975), tiến sĩ danh dự của trường ĐH Maryland (1976). Năm 1979, cộng đồng Quy hoạch toán học và Hội Toán học ứng dụng và công nghiệp (SIAM) đã vinh danh ông bằng cách lập ra giải thưởng George B. Dantzig.

Dantzig qua đời vào ngày 13/5/2005 tại nhà riêng ở Stanford, California, do biến chứng của bệnh tiểu đường và bệnh tim mạch. Ông thọ 91 tuổi.

# *Tin tức hội viên và hoạt động toán học*

LTS: *Để tăng cường sự hiểu biết lẫn nhau trong cộng đồng các nhà toán học Việt Nam, Tòa soạn mong nhận được nhiều thông tin từ các hội viên HTHVN về chính bản thân, cơ quan hoặc đồng nghiệp của mình.*

**Gặp mặt đầu xuân và Du xuân Giáp Ngọ 2014**. Như thường lệ, đầu xuân Giáp Ngọ 2014 Hội Toán học Việt Nam lại tổ chức gặp mặt và du xuân cùng các hội viên khu vực Hà Nội và vùng lân cận.

Buổi gặp mặt đầu xuân và du xuân năm nay được tổ chức vào ngày thứ Bảy 22/2/2014 (tức ngày 23 tháng Giêng năm Giáp Ngọ) với một chút thay đổi so với các năm trước. Các hội viên đã cùng nhau gặp gỡ tại Viện Toán học - Viện hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, nghe thông tin về một số hoạt động của Hội trong năm 2013, chứng kiến lễ trao giải thưởng Lê Văn Thiêm cho một số giáo viên, học sinh trung học phổ thông và lễ trao Giải thưởng Viện Toán học. Sau lễ trao thưởng, các hội viên đã có buổi giao lưu tiệc trà đầm ấm và vui vẻ, với sự có mặt của trên 180 hội viên nhiều thế hệ các nhà toán học, từ những nhà toán học lão thành, các hội viên kỳ cựu, các cựu chủ tịch và lãnh đạo hội qua các thời kỳ cùng nhiều nhà toán học trẻ.

Cuộc du xuân được tổ chức sau đó tới hai trung tâm Phật giáo nổi tiếng vùng Kinh Bắc là chùa Vĩnh Nghiêm - nơi phát tích Tam tổ phái Thiền Trúc Lâm của Phật giáo Việt Nam, nổi danh với những bộ mộc bản kinh Phật có từ 700 năm nay, và chùa Bút Tháp - di tích quốc gia đặc biệt được xếp hạng từ năm 1962 - nổi tiếng với các kiến trúc bằng đá, tháp Cửu phẩm liên hoa và đặc biệt là bức tượng Quan Thế Âm nghìn mắt nghìn tay, kiệt tác được tạc dựng từ thế kỷ 17.

Buổi gặp mặt và du xuân tới vùng đất với những di tích có nhiều giá trị lịch sử và nghệ thuật, trong tiết mưa xuân lất phất, đã mang tới cho các hội viên nhiều cảm xúc đặc biệt, hứa hẹn một năm mới 2014 tràn đầy sức sống mới.


Các giáo sư là lãnh đạo Hội Toán học các thời kỳ chụp ảnh cùng các thầy giáo và học sinh được nhận giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2013. *Nguồn: Viện Toán học*

**Hội thảo hàng năm 2014 của Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán** (VIASM Annual Meeting 2014) sẽ được tổ chức tại Viện NCCCT vào ngày 26/7/2014. Đây là một hoạt động chính quy của Viện được tổ chức mỗi năm một lần theo mô hình của seminar Bourbaki. Viện NCCCT mời các nhà khoa học có uy tín trên thế giới tới đọc các bài giảng về một số hướng nghiên cứu trung tâm của toán học hiện đại. Các bài giảng sẽ mang đến cho người nghe thông tin những vấn đề đang được quan tâm trong chuyên ngành hẹp của họ cũng như những ý tưởng và kết quả mới nhất. Các bài giảng sau đó sẽ được đăng trên một số đặc biệt của tạp chí Acta Mathematica Vietnamica.

Năm nay, các nhà toán học sau đã nhận lời đọc bài giảng tại hội thảo:

1. Louis H. Y. Chen, Đại học Quốc gia Singapore, Singapore.

2. Endre Szemerédi, Đại học Rutgers, Mỹ. Giáo sư Szemerédi là người nhận giải thưởng Abel năm 2012.

3. Vũ Hà Văn, Đại học Yale, Mỹ.

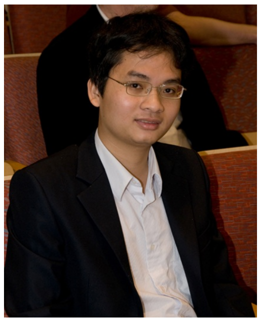
4. Michael Vogelius, Đại học Rutgers, Mỹ.

Thông tin thêm về hội thảo có thể tìm thấy tại địa chỉ
http://viasm.edu.vn/hdkh/am2014

**Giải thưởng Viện Toán học** năm 2013 đã được trao cho hai nhà toán học trẻ có thành tích xuất sắc là PGS. TS. Phạm Hoàng Hiệp, Trường ĐH Sư phạm Hà Nội, và TS. Lê Quang Nẫm, Viện Toán học, Viện hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

PGS. TS. Phạm Hoàng Hiệp sinh năm 1982, hiện đang làm việc tại Khoa Toán-Tin của Trường ĐH Sư phạm Hà Nội. Tốt nghiệp ĐH Sư phạm Hà Nội năm 2004, anh bảo vệ tiến sỹ năm 2008 tại Đại học Umea, Thụy Điển. Năm 2011, anh được phong chức danh phó giáo sư ở tuổi 29 và là phó giáo sư trẻ nhất Việt Nam được phong trong năm đó. Hướng nghiên cứu chính hiện nay của anh là hàm nhiều biến phức và lý thuyết đa thế vị. PGS. Phạm Hoàng Hiệp đã công bố trên 30 bài báo khoa học trong đó một số bài đăng ở những tạp chí có chất lượng cao như Acta Mathematica, Advances in Mathematics, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Transactions of the AMS.

TS. Lê Quang Nẫm sinh năm 1980, hiện đang là cán bộ tại Phòng Phương trình vi phân, Viện Toán học, Viện hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam. Tốt nghiệp Đại học KHTN Tp. Hồ Chí Minh năm 2002, năm 2008 anh bảo vệ luận án tiến sỹ tại Viện các khoa học về Toán Courant, ĐH New York, Mỹ. Anh quan tâm đến nhiều lĩnh vực bao gồm Giải tích, Hình học, Phương trình đạo hàm riêng. Hiện nay TS. Lê Quang Nẫm đã công bố trên 20 bài báo khoa học, một số đăng ở những tập chí có chất lượng cao như Archive for Rational Mechanics and Analysis, Journal of Functional Analysis, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Mathematische Annalen.



Phạm Hoàng Hiệp (trái) và Lê Quang Nẫm (phải)
*Nguồn: Viện Toán học*

Giải thưởng Viện Toán học được thành lập năm 1982 dành cho các cán bộ nghiên cứu toán không quá 35 tuổi với tên gọi Giải thưởng "Công trình nghiên cứu khoa học của cán bộ trẻ". Giải thưởng này về sau được đổi tên là "Giải thưởng khoa học cho cán bộ trẻ", và hiện nay là "Giải thưởng Viện Toán học", trao cho các nhà toán học có thành tích xuất sắc đang làm việc tại Việt Nam và có tuổi đời không quá 40 tuổi.

**PGS. Tạ Thị Hoài An đã bảo vệ thành công luận án tiến sỹ khoa học** tại đại học Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, Pháp, ngày 21/2/2014 với luận án mang tên "Value Distribution Theory, Functional Equations, and Hyperbolicity". Theo nhiều nguồn thông tin, chị là nữ tiến sỹ thứ hai của Việt Nam bảo vệ thành công luận án tiến sỹ khoa học ngành Toán học. PGS. TSKH. Tạ Thị Hoài An hiện đang công tác tại Viện Toán học, chị bảo vệ luận án tiến sỹ năm 2001 tại Đại học Vinh dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Hà Huy Khoái, và được phong học hàm phó giáo sư năm 2009 tại Viện Toán học. Từ 2001-2004 chị nhận học bổng sau tiến sỹ tại Viện Toán, Academia Sinica, Đài Loan. Chị được trao Giải thưởng Viện Toán học năm 2007, năm 2008 chị được nhận học bổng nghiên cứu của Quỹ Humboldt, CHLB Đức. Hướng nghiên cứu chính của PGS. TSKH. Tạ Thị Hoài An là Lý thuyết số đại số, Lý thuyết phân bố giá trị (Value Distribution Theory) và Hình học đại số.

*Mục Tin tức hội viên và hoạt động toán học số này được thực hiện với sự cộng tác của PGS. TSKH. Nguyễn Minh Trí (Viện Toán học).*

# Tin toán học thế giới

**Trung tâm quốc tế Toán học lý thuyết và ứng dụng CIMPA** vừa ra thông báo về việc tuyển chọn các đề án nghiên cứu hoặc tổ chức hoạt động khoa học trong năm 2016. Thông tin chi tiết có thể xem tại địa chỉ
www.cimpa-icpam.org/spip.php?article124

CIMPA là một tổ chức thuộc UNESCO có trụ sở ở Nice, Pháp. Hàng năm trung tâm này tài trợ rất nhiều hoạt động nghiên cứu, hội nghị, khóa học ngắn hạn ở khắp nơi trên thế giới. Tại Việt Nam có nhiều cơ quan đã tổ chức rất thành công các trường và hội nghị do CIMPA tài trợ.

**Giải thưởng Abel năm nay được trao cho Yakov G. Sinai**, nhà toán học người Nga, giáo sư toán tại ĐH Princeton và đồng thời là nghiên cứu viên cao cấp của Viện Vật lý lý thuyết Landau thuộc Viện Hàn lâm Khoa học Nga cho "những đóng góp mang tính nền tảng của ông trong các lĩnh vực hệ động lực, lý thuyết ergodic, và vật lý toán.

Sinai sinh ngày 21 tháng 9 năm 1935 và là học trò của A. Kolmogorov. Ông được đánh giá là một trong số những nhà toán học có ảnh hưởng nhất trong Thế kỉ 20. Ông đã đạt rất nhiều kết quả mang tính đột phá trong các lý thuyết hệ động lực, vật lý toán và lý thuyết xác suất.

Nhiều kết quả toán học được mang tên ông, bao gồm entropy Kolmogorov-Sinai, billiard Sinai, du động ngẫu nhiên Sinai, độ đo Sinai-Ruelle-Bowen, và lý thuyết Pirogov-Sinai. Sinai được đặc biệt kính trọng trong cả hai cộng đồng toán học và vật lý và được xem như là người có đóng góp chính trong việc kết nối thế giới của các hệ (động lực ) tất định và thế giới của các hệ (ngẫu nhiên) xác suất với nhau.

Trong sự nghiệp khoa học của mình Sinai đã viết hơn 250 bài báo và nhiều cuốn sách, đã hướng dẫn hơn 50 nghiên cứu sinh. Nhờ vào các đóng góp sâu sắc của mình vào thời đầu sự nghiệp, Sinai đã được mời đọc báo cáo tại Đại hội Toán học thế giới năm 1962 ở Stockholm, Thụy Điển, và sau đó thêm 3 lần nữa.

Trước khi được trao Giải thưởng Abel, Sinai cũng đã nhận được nhiều giải thưởng toán học cao quý khác, trong số đó gồm Giải thưởng Steele cho thành tựu trọn đời của Hội toán học Mỹ (2013), Giải thưởng Wolf (1997), Giải thưởng Nemmers (2002), Giải thưởng Henry Poincaré của Hội Vật lý Toán (2009).

**Người nhận giải thưởng Wolf năm 2014 mục Toán học được công bố là Peter Sarnak**, giáo sư tại Viện Nghiên cứu cao cấp IAS Princeton và ĐH Princeton, Mỹ. Được miêu tả là một nhà toán học có phổ hiểu biết cực kỳ rộng lớn và tầm nhìn sâu rộng, Peter Sarnak ảnh hưởng đến sự phát triển của một số lĩnh vực toán học, thường bằng cách phát hiện những kết nối bất ngờ và sâu sắc. Trong lời giới thiệu của quỹ Wolf, bằng hiểu biết của mình và luôn sẵn sàng chia sẻ các ý tưởng, ông đã truyền cảm hứng cho các sinh viên cũng như các đồng nghiệp trong nhiều lĩnh vực khác nhau.

Peter Sarnak sinh ngày 18/12/1953 tại Nam Phi. Ông bảo vệ luận án tiến sỹ tại đại học Stanford, Mỹ, năm 1980 dưới sự hướng dẫn của nhà toán học nổi tiếng Paul Cohen (người chứng minh sự độc lập của giả thuyết continuum). Ngoài giải thưởng Wolf, ông đã nhận rất nhiều giải thưởng và danh hiệu khác.

**Gerd Faltings được trao giải thưởng quốc tế King Faisal 2014 mục Khoa học** vì những đóng góp sâu sắc của ông cho các lĩnh vực hình học đại số và lý thuyết số. Faltings hiện đang là giám đốc tại Viện Toán Max Planck ở Bonn đồng thời là giáo sư tại ĐH Bonn, CHLB Đức. Ông nhận Huy chương Fields năm 1986. Giải thưởng Faisal được trao gồm một giấy chứng nhận được viết bằng tiếng Ả Rập cùng với một huy chương bằng vàng 24 carat được thiết kế duy nhất cho mỗi lần trao và một khoản tiền mặt bằng 750,000 riyal tiền Ả Rập Saudi (khoảng 200.000USD).

## Đố vui: Đây là ai?

*Người trong ảnh bìa kỳ này là ai? Giải thưởng 300.000 đồng sẽ được Thông tin Toán học tặng cho độc giả gửi câu trả lời chính xác tên nhà khoa học này cùng bài viết hay nhất, không quá 500 từ về ông. Tên người đoạt giải và bài viết sẽ được đăng trong số TTTH tiếp theo. Câu trả lời và bài viết xin gửi về* `ttth@vms.org.vn` *trước ngày 15/6/2014.*

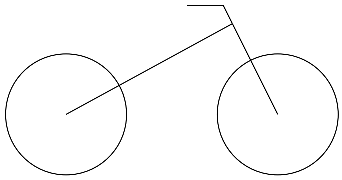
**Giải đố kỳ trước:** *Người trong ảnh bìa của Tập 17 Số 4 là nhà toán học George Bernard Dantzig (8/11/1914 - 13/5/2005). Chúc mừng người nhận giải thưởng giải câu đố kỳ trước là Trần Tất Đạt (Viện Max Planck - Leipzig, CHLB Đức) (xem bài trang 15).*

# *Dành cho các bạn trẻ*

LTS: "*Dành cho các bạn trẻ*" *là mục dành cho Sinh viên, Học sinh và tất cả các bạn trẻ yêu Toán. Tòa soạn mong nhận được các bài viết hoặc bài dịch có giá trị cho chuyên mục.*

## ĐỒ THỊ: TÍNH CHẴN LẺ VÀ CHU TRÌNH EULER

**Phan Thị Hà Dương** (Viện Toán học)



*Có thể vẽ hình trên chỉ với một nét vẽ (không nhấc bút khỏi tờ giấy)?*

### 1. Giới thiệu

Lý thuyết đồ thị là một chuyên ngành quan trọng và phát triển mạnh mẽ trong Toán học hiện đại. Rất nhiều bài toán trong các ngành toán học cổ điển như hình học, đại số, số học có thể mô hình hóa bằng các đồ thị và có thể giải được bằng cách sử dụng các định lý trong lý thuyết đồ thị. Việc hiểu sâu sắc các khái niệm và kết quả trong lý thuyết đồ thị có thể giúp các giáo viên và học sinh xây dựng và giải được một lớp các bài toán tuy có thể phát biểu rất khác nhau nhưng có cùng bản chất đồ thị như nhau.

Trong bài viết này, chúng tôi đề cập đến một chuyên đề của lý thuyết đồ thị: chu trình Euler và tính chẵn lẻ trong đồ thị.

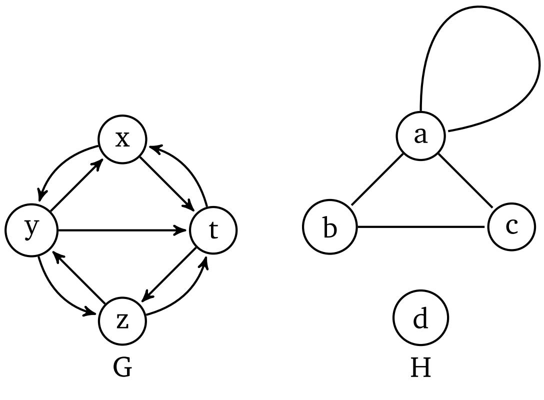
### 2. Một số kiến thức cơ bản

#### 2.1. Đồ thị, bậc.

**Định nghĩa 2.1.** *Một đồ thị là một cặp $G = (V, E)$ gồm một tập các đỉnh $V$, một tập các cạnh $E$ trong đó mỗi cạnh ứng với hai đỉnh (không nhất thiết phân biệt) gọi là các đầu mút của cạnh.*

Khi ta không phân biệt thứ tự các đầu mút của các cạnh, đồ thị được gọi là *vô hướng*. Ngược lại, khi mỗi cạnh cho tương ứng một *đỉnh đầu* và một *đỉnh cuối* thì đồ thị được gọi là *có hướng*.

Để mô tả một đồ thị đã cho, chúng ta thường biểu diễn nó bởi một hình vẽ trên mặt phẳng: mỗi đỉnh tương ứng với một điểm nào đó của mặt phẳng và biểu diễn mỗi cạnh bởi một đường liên tục giữa hai đỉnh đầu mút của nó.




*Đồ thị có hướng và đồ thị vô hướng.*

Nếu có cạnh $(a, b)$ thì $a$ và $b$ được gọi là *kề nhau*, hay *láng giềng* của nhau, cạnh $(a, b)$ và đỉnh $a$ (hay đỉnh $b$) được gọi là *liên thuộc* với nhau. Một đỉnh không có cạnh liên thuộc được gọi là một *đỉnh cô lập*. *Bậc* của một đỉnh là số cạnh liên thuộc với nó. Ta kí hiệu $\deg_G(a)$ bậc của một đỉnh $a$ trong đồ thị $G$. Nếu đồ thị $G$ được hiểu một cách rõ ràng, ta chỉ kí hiệu $\deg(a)$ thay vì $\deg_G(a)$. Một cạnh nối một đỉnh với chính nó được gọi là một *khuyên*.

*Đồ thị đơn* là đồ thị không có khuyên và giữa hai đỉnh $a, b$ bất kì chỉ có nhiều nhất là một cạnh, nếu đồ thị là vô hướng, và có nhiều nhất một cạnh xuất phát từ $a$ và kết thúc tại $b$ trong trường hợp đồ thị có hướng. *Đa đồ thị* là đồ thị không đơn. Như vậy, ở hai ví dụ trên đây, đồ thị có hướng là đơn còn đồ thị vô hướng là không đơn.

Trong bài này, chúng ta chỉ quan tâm đến các *đồ thị hữu hạn*, nghĩa là các đồ thị chỉ có hữu hạn đỉnh và cạnh.

Nếu không có ghi chú đặc biệt, thì từ nay ta ngầm định đồ thị là đồ thị đơn, hữu hạn.

**Định lý 2.2** (Bổ đề bắt tay)**.** *Trong một đồ thị vô hướng, tổng số bậc của các đỉnh bằng hai lần số cạnh.*

*Chứng minh.* Mỗi cạnh của đồ thị làm tăng bậc của hai đỉnh liên thuộc của nó lên một đơn vị, nên mỗi cạnh được tính là 2 trong tổng số bậc. □

Hệ quả trực tiếp nhưng rất hay được áp dụng của định lý này là

**Hệ quả 2.3.** *Số đỉnh bậc lẻ của một đồ thị là một số chẵn.*

## 2.2. Đồ thị con, đồ thị con cảm sinh.

**Định nghĩa 2.4.** *Đồ thị con $H = (V', E')$ của một đồ thị $G = (V, E)$ là một đồ thị sao cho tập đỉnh của nó là tập con của tập đỉnh của $G$ và tập cạnh của nó cũng là tập con của tập cạnh của $G$ ($V' \subset V, E' \subset E$). Đồ thị con cảm sinh $H = (V', E')$ của $G$ là một đồ thị con sao cho mỗi cạnh của $G$ nối hai đỉnh của $H$ cũng là một cạnh của $H$. Ký hiệu $H = G[V']$.*

**Định lý 2.5** (Gallai)**.** *Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng. Tập đỉnh $V$ có thể phân hoạch thành hai tập hợp $V_1$ và $V_2$ sao cho đỉnh của các đồ thị cảm sinh trên $V_1$ và $V_2$ đều có bậc chẵn.*

*Chứng minh.* Chứng minh quy nạp theo số đỉnh của đồ thị. Trường hợp đồ thị chỉ có một đỉnh là tầm thường. Giả sử kết luận đúng với mọi đồ thị có ít hơn $n$ đỉnh. Xét đồ thị $G$ có $n$ đỉnh.

Nếu tất cả các đỉnh của $V$ đều có bậc chẵn. Khi đó lấy $V_1 = V$.

Nếu có đỉnh $a$ bậc lẻ. Gọi $S$ là tập các đỉnh kề $a$. Định nghĩa đồ thị $H$ như sau: tập đỉnh là $V(H) = V(G)\setminus\{a\}$; tập cạnh là: $(u, v) \in E(H) \Leftrightarrow (u, v) \notin E(G)$ nếu $u, v \in S$, và $(u, v) \in E(H) \Leftrightarrow (u, v) \in E(G)$ nếu $u$ hoặc $v$ không thuộc $S$. Đồ thị $H$ có $n-1$ đỉnh, nên theo giả thiết quy nạp, $V(H)$ chia thành hai tập $U_1$ và $U_2$ có đồ thị cảm sinh của $H$ trên đó có bậc chẵn. Vì $S$ có lực lượng lẻ, nên có thể giả sử $S \cap U_1$ chẵn và $S \cap U_2$ lẻ. Ta lấy $V_1 = U_1 \cup \{a\}, V_2 = U_2$. Ta sẽ chứng minh $V_1$ và $V_2$ là hai tập cần tìm. Thật vậy, xét $x \in V_1$.

- Nếu $x = a$, khi đó bậc của $a$ trong $G[V_1] = S \cap U_1$ chẵn.
- Nếu $x \notin S$, khi đó $\deg_{G[V_1]}(x) = \deg_{H[V_1]}(x)$ là số chẵn.
- Nếu $x \in S$, ta có $\deg_{G[V_1]}(x) = \deg_{G[V_1\setminus S]}(x) + \deg_{G[V_1\cap S]}(x)$ $= 1 + \deg_{H[V_1\setminus S]}(x) + |V_1 \cap S| - 1 - \deg_{H[V_1\cap S]}(x)$ $= \deg_{H[V_1]}(x) + |V_1 \cap S| - 2\deg_{H[V_1\cap S]}(x)$, là số chẵn.

Tương tự với $x \in V_2$. Vậy ta có điều phải chứng minh. □

**Bài 1:** Có thể xếp 27 đồng xu giống nhau trên bàn sao cho mỗi đồng xu chạm vào đúng 3 đồng khác hay không?

**Bài 2:** Chứng minh rằng trên trái đất này có ít nhất hai người có cùng số bạn.

**Bài 3:** Có thể nào có một nhóm 10 người, mà số bạn tương ứng của từng người là

(a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

(b) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8?

(c) 3, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 8?

**Chuyên đề** Một dãy $n$ số tự nhiên được gọi là một *dãy bậc* nếu tồn tại một đồ thị mà dãy các bậc của các đỉnh của nó bằng dãy số đã cho. Nghiên cứu các tính chất của dãy bậc. Khi nào thì một dãy số là một dãy bậc?

**Bài 4.:** Chứng minh rằng tập đỉnh $V$ của một đồ thị vô hướng có thể phân chia thành hai tập hợp rời nhau $V_1$ và $V_2$ sao cho đồ thị cảm sinh trên $V_1$ có bậc chẵn và đồ thị cảm sinh trên $V_2$ có bậc lẻ.

**Bài 5.:** Trên trần nhà, các bóng điện được phân bố như các đỉnh của một lưới chữ nhật các hình vuông đơn vị. Bóng đèn được điều khiển bởi một bảng các công tắc. Theo thiết kế, mỗi khi ấn công tắc của chiếc đèn tương ứng, trạng thái của bóng đèn sẽ thay đổi: từ tắt sang bật hoặc từ bật sang tắt. Tuy nhiên, vì sơ xuất của người thợ điện, mỗi khi người ta ấn một công tắc, không những chiếc bóng đèn tương ứng bị thay đổi trạng thái mà những bóng đèn bên cạnh cũng như vậy! Ban đầu tất cả các bóng đèn đều tắt. Hỏi có thể bật sáng mọi bóng đèn trên trần hay không?

**Hướng dẫn giải.**

**Bài 1:** Xây dựng đồ thị trên tập đỉnh là 27 đồng xu và các cạnh thể hiện mối quan hệ "2 đồng xu chạm nhau". Đồ thị đã cho không thể có tất cả 27 đỉnh đều bậc 3, là một số lẻ, được.

**Bài 2:** Trong một nhóm $n$ người thì số các người quen của mỗi người có thể là $0, 1, \ldots, n-1$. Nhưng không thể xảy ra trường hợp có một người không quen ai và một người quen $n-1$ người được. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 3:** Tất cả các trường hợp bài ra đều không xảy ra. Trường hợp đầu tiên không thể xảy ra theo lập luận ở bài trước. Trường hợp thứ 2 ta có thể suy luận như sau. Có 1 người không quen ai, vì thể bỏ người này ra thì ta có một tập 9 người với số các người quen tương ứng (trong số các người đó) là $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8$. Có 2 người quen cả 8 người còn lại. Nói riêng, mọi người đều quen ít nhất 2 người đó. Do đó không thể có một người chỉ quen duy nhất 1 người khác. Trường hợp thứ 3 mâu thuẫn với sự kiện: số các người có số người quen lẻ là một số chẵn.

**Chuyên đề** Bạn đọc có thể tìm hiểu thêm về 2 kết quả sau đây.

- Định lý Havel-Hakimi nói rằng một dãy $(d_1, \ldots, d_n)$ (với $n \geq 2$ và $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$) là một dãy các bậc của một đồ thị đơn, vô hướng khi và chỉ khi $(d_1 - 1, d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1), d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \ldots, d_n)$ là một dãy bậc.
- Định lý Erdös-Gallai khẳng định rằng một dãy các số tự nhiên $d_1, \ldots, d_n$ là một dãy các bậc của một đồ thị đơn vô hướng khi và chỉ khi $d_1 + \cdots + d_n$ là một số chẵn và với mọi $k \leq n-1$ thì

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} \min(k, d_j).$$

**Bài 4:** Lấy một đỉnh $O$ mới ở ngoài đồ thị, nối nó với tất cả các đỉnh của đồ thị, được đồ thị mới $T$. Theo phần trước, $V(T)$ được phân thành hai phần $W_1$ và $W_2$. Nếu $O$ thuộc $W_2$ ta lấy $V_1 = W_1, V_2 = W_2 \backslash \{O\}$. Thử lại thấy đúng.

**Bài 5:** Câu trả lời là có. Ta sẽ thiết lập kết quả tổng quát sau: Giả sử tại mỗi đỉnh của đồ thị có một cái đèn và một công tắc. Lúc đầu tất cả đèn đều tắt. Ấn vào một công tắc sẽ thay đổi trạng thái của nó và của các đèn ở các đỉnh kề nó. Thế thì có thể ấn vào một số công tắc sao cho tấ cả các đèn đều bật.

Xét tập hợp $S$ những công tắc được ấn vào (1 lần). Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại tập $S$ sao cho mỗi đỉnh trong $S$ được nối với một số chẵn các đỉnh thuộc $S$, và mỗi đỉnh ngoài $S$ được nối với một số lẻ các đỉnh thuộc $S$.

Xét đồ thị $G$. Thêm một đỉnh mới $O$. Nối $O$ với tất cả các đỉnh có bậc chẵn trong $G$. Ta được đồ thị mới $H$. theo câu a), $V(H)$ được chia thành hai tập $W_1$ và $W_2$ đều có đồ thị cảm sinh của $H$ có bậc chẵn. Có thể giả sử $O \in W_2$. Khi đó lấy $S = W_1$.

Nếu $v \in W_1 = S$, thì $v$ được nối với một số chẵn đỉnh thuộc $S$.

Giả sử $v \in V(G) \cap W_2$. Nếu $v$ được nối với $O$ trong $W_2$ thì đỉnh $v$ trong $G$ có bậc chẵn. Trong $W_2$, $v$ cũng có bậc chẵn (kể cả cạnh nối với $O$, vậy $v$ được nối với số lẻ đỉnh trong $W_2$, và do đó với số lẻ đỉnh trong $S$. Tương tự cho $v$ không được nối với $O$.

Ta có điều phải chứng minh.

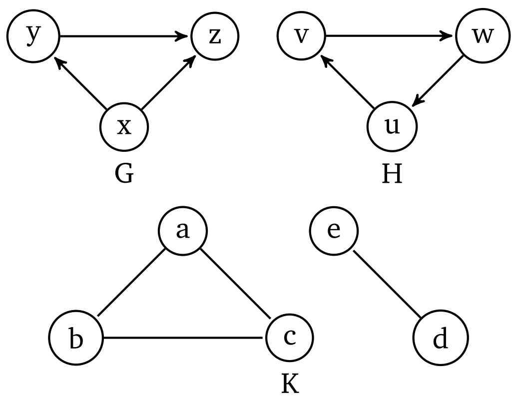
**Nhận xét** Trong các bài toán trên, để thay đổi tính chẵn lẻ của bậc của đỉnh đồ thị, ta có thể sử dụng hai kỹ thuật:

- Xét đồ thị *bù*. Theo định nghĩa, đồ thị bù của đồ thị (đơn) $G = (V, E)$ là đồ thị $G^c = (V, E^c)$ trên cùng tập đỉnh và với mọi $a \neq b \in V$, $a$ kề với $b$ trong $G^c$ khi và chỉ khi $a$ không kề với $b$ trong $G$.
- Thêm một đỉnh mới vào đồ thị và nối đỉnh đó với những đỉnh cần thay đổi tính chẵn lẻ của bậc.

2.3. **Đường đi. Tính liên thông.** Ta có định nghĩa sau, có nghĩa cho một đồ thị tổng quát: đơn hay không đơn, vô hướng hay có hướng.

**Định nghĩa 2.6.** *Một đường đi trong* $G = (V, E)$ *là một dãy các đỉnh* $v_0, v_1, ..., v_k$ *trong đó* $(v_i, v_{i+1}) \in E$ *với mọi* $i = 0, ..., k-1$. *Khi đó* $k$ *là độ dài đường đi,* $v_0$ *là đỉnh đầu,* $v_k$ *là đỉnh cuối. Một chu trình là một đường đi mà đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau. Một đồ thị được gọi là liên thông nếu từ một đỉnh bất kỳ luôn có một đường đi đến một đỉnh khác.*

Một *thành phần liên thông* của một đồ thị (vô hướng) là một đồ thị con cảm sinh liên thông cực đại của đồ thị đó. Như vậy, một đồ thị (vô hướng) sẽ được phân hoạch thành hợp rời của các thành phần liên thông của nó.




*Ví dụ về: đồ thị có hướng không liên thông (G); có hướng liên thông (H); và vô hướng với hai thành phần liên thông (K).*

**Bài 6:** Cho một đa diện $P$ với tất cả các mặt là tam giác. Tô màu các đỉnh của $P$ bằng ba màu. Chứng minh rằng số các mặt có 3 đỉnh được tô bởi 3 màu khác nhau là một số chẵn.

**Bài 7:** Chứng minh rằng số các đồ thị con của đồ thị liên thông $G$ mà có cùng tập đỉnh với $G$ và có tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn bằng $2^{m-n+1}$, với $m = |E(G)|$ và $n = |V(G)|$.

**Hướng dẫn giải.**

**Bài 6:** Ta gọi 3 màu là xanh, đỏ, vàng. Gọi $e, f$ tương ứng là số các cạnh của đa diện $P$. Do mỗi mặt có 3 cạnh nên $2e = 3f$: (vế phải đếm số cạnh của $P$, mỗi cạnh được tính đúng 2 lần.) Gọi $f_1$ là số các mặt với 3 đỉnh được tô bởi 3 màu phân biệt và $f_2$ là số các mặt còn lại. Như vậy $f_1 + f_2 = f$. Chú ý rằng, trong mỗi mặt với 3 đỉnh có 3 màu phân biệt, số cạnh xanh-đỏ bằng 1, trong khi trong mỗi mặt với 3 đỉnh được tô bởi $\leq 2$ màu, số các cạnh xanh-đỏ bằng 0 hoặc 2. Nói cách khác, tại vế phải của đẳng thức $2e = 3f_1 + 3f_2$, mỗi mặt trong số $f_1$ mặt 3 màu đóng góp 1 cạnh xanh-đỏ còn mỗi mặt trong $f_2$ mặt còn lại đóng góp 0 hoặc 2 cạnh xanh đỏ. Nhưng hiển nhiên số các cạnh xanh-đỏ tại vế trái là một số chẵn. Từ đó suy ra $f_1 \equiv 0 \pmod 2$.

**Bài 7:** Ta sẽ gọi một đồ thị con là tốt nếu nó có cùng tập đỉnh với đồ thị đã cho và sao cho tất cả các đỉnh có bậc chẵn.

Trước hết, bằng qui nạp theo số đỉnh, ta dễ dàng chỉ ra được rằng một đồ thị liên thông trên $n$ đỉnh có ít nhất $n-1$ cạnh (trong trường hợp có đúng $n-1$ cạnh thì đồ thị được gọi là một *cây*). Hơn nữa, với một đồ thị liên thông trên $n$ đỉnh và $n-1$ cạnh, dựa vào bổ đề bắt tay, ta dễ dàng chỉ ra được rằng luôn luôn tồn tại một đỉnh bậc 1. Rõ ràng rằng, với một đồ thị như vậy, bỏ đi một đỉnh bậc 1 cho ta một đồ thị liên thông trên $n-1$ đỉnh với $n-2$ cạnh. Ta cũng chú ý rằng, bằng qui nạp, ta có thể chỉ ra được rằng một đồ thi liên thông trên $n \geq 3$ đỉnh và $m \geq n$ cạnh luôn có chu trình.

Ta chứng minh khẳng định của bài toán theo quy nạp theo số cạnh $m$ của các đồ thị liên thông.

Xét trường hợp $G$ liên thông với $n$ đỉnh và $m = n-1$ cạnh. Ta dễ dàng chỉ ra rằng $G$ chỉ có duy nhất một đồ thị con tốt, đó chính là đồ thị trên tập đỉnh của $G$ và bỏ đi tất cả các cạnh của $G$. Thật vậy, giả sử $H$ là một đồ thị con tốt của $G$. Ta biết rằng $G$ có một đỉnh bậc 1, chẳng hạn $a$. Dễ thấy, cạnh duy nhất với 1 đầu mút là a không thể nằm trong $E(H)$. Bằng cách loại bỏ $a$ và làm việc với các đồ thị $G', H'$ còn lại (và suy luận bằng qui nạp chẳng hạn) ta dễ dàng kết luận. Như vậy, khẳng định bài toán là đúng cho trường hợp này.

Giả sử công thức đúng cho các đồ thị với $m \geq n-1$, ta chứng minh đúng cho các đồ thị với $m+1$ cạnh. Xét đồ thị $G$ liên thông gồm $n$ đỉnh, và $m+1$ cạnh. Do $m \geq n$, ta biết rằng $G$ có 1 chu trình $C$. Gọi $e$ là 1 cạnh thuộc một chu trình của $G$. Dễ thấy, việc $e$ thuộc chu trình $C$ đảm bảo rằng đồ thị $H$ nhận được từ $G$ bằng cách loại bỏ $e$ vẫn còn liên thông. Theo giả thiết qui nạp, công thức đúng cho $H$, ta chứng minh công thúc đúng cho $G$. Một cách tương đương, ta chỉ ra rằng số đồ thị con tốt của $G$ bằng 2 lần số đồ thị con tốt của $H$. Một đồ thị con tốt của $G$ mà không chứa $e$ là một đồ thị con tốt của $G$. Vậy ta chỉ cần chứng minh số đồ thị con tốt của $H$ chứa $e$ cũng bằng như vậy. Một đồ thị $A$ chứa $e$ tốt của $H$ tương ứng một - một với một đồ thị $B$ không chứa $e$, tốt của $H$ qua ánh xạ $E(B) = E(A)\Delta E(C)$. Vậy số đồ thị con tốt của $H$ chứa $e$ = số đồ thị con tốt của $H$ không chứa $e$. Đây là điều phải chứng minh.

*(còn nữa)*

# THÔNG TIN TOÁN HỌC, Tập 18 Số 1 (2014)