Hội Toán Học Việt Nam

THÔNG TIN TOÁN HỌC

Tháng 3 Năm 2011 **Tập 15 Số 1**

Thông Tin Toán Học
(Lưu hành nội bộ)

• Bản tin **Thông Tin Toán Học** nhằm mục đích phản ánh các sinh hoạt chuyên môn trong cộng đồng toán học Việt Nam và quốc tế. Bản tin ra thường kỳ 4-6 số trong một năm.

• Thể lệ gửi bài: Bài viết bằng tiếng Việt. Tất cả các bài, thông tin về sinh hoạt toán học ở các khoa (bộ môn) toán, về hướng nghiên cứu hoặc trao đổi về phương pháp nghiên cứu và giảng dạy đều được hoan nghênh. Bản tin cũng nhận đăng các bài giới thiệu tiềm năng khoa học của các cơ sở cũng như các bài giới thiệu các nhà toán học. Bài viết xin gửi về tòa soạn. Nếu bài được đánh máy tính, xin gửi kèm theo file (chủ yếu theo phông chữ unicode hoặc .VnTime).

• Mọi liên hệ với bản tin xin gửi về:

*Bản tin: **Thông Tin Toán Học***
Viện Toán Học
18 Hoàng Quốc Việt, 10307 Hà Nội

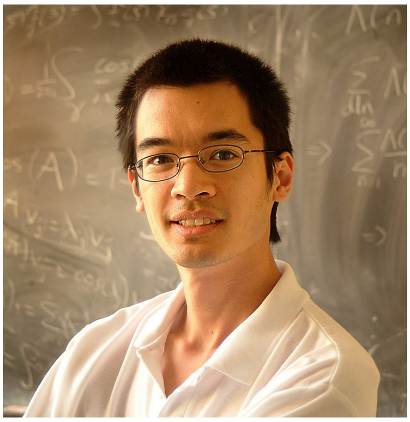
e-mail:
ttth@vms.org.vn

Website của Hội Toán học:
www.vms.org.vn

Ảnh bìa 1: John Willard Milnor, giải thưởng Abel 2011 (nguồn: Internet).

Phỏng vấn Terence Tao

Lời dẫn: Sinh ra tại Adelaide, Úc năm 1975*, Terence Tao đang là giáo sư Đại học California tại Los Angeles (Mỹ). Các lĩnh vực nghiên cứu của anh bao gồm giải tích điều hòa, phương trình đạo hàm riêng, tổ hợp hình học, tổ hợp số học, lý thuyết số giải tích và tổ hợp đại số. Tao đã nhận được rất nhiều giải thưởng, trong đó có giải thưởng Salem (*2000*), giải thưởng Bochner (*2002*), huy chương Fields và giải thưởng SASTRA Ramanujan (*2006*), giải thưởng tài năng MacArthur và giải thưởng Ostrowski (*2007*), giải thưởng Waterman (*2008*), giải thưởng Polya (*2009*) và giải thưởng quốc tế King Faisal (*2010*). Bài phỏng vấn này được đăng trong tập* 36*, số* 5 *năm* 2009 *của "Gazette of the Australian Mathematical Society*".



Gazette: *Anh hãy giới thiệu vài nét về bản thân?*

Terence Tao: Tôi sinh ra tại Adelaide - Úc năm 1975 và ở đó 16 năm. Tôi không phải học tiểu học, điều này có nghĩa là tôi bắt đầu học trung học năm lên 8. Ở trường trung học tôi đã học một số môn toán ở bậc đại học. Cha mẹ tôi đã phải sắp xếp việc này với hiệu trưởng và trưởng khoa dù điều này rất phức tạp. Tôi tốt nghiệp cử nhân tại Đại học Flinders, giáo sư hướng dẫn Garth Gaudry đã giới thiệu tôi đi du học, vì vậy tôi đã đến Princeton và hoàn thành luận án tiến sĩ tại đây. Giáo sư hướng dẫn của tôi ở Princeton đề nghị tôi ở lại Mỹ và tôi đã ở trường California, Los Angeles kể từ đó. Ngoài ra tôi có dành một vài mùa hè ở Úc, tại Đại học Quốc gia Australia (ANU) và UNSW.

Gazette: *Khi anh bỏ qua các lớp, anh có bỏ qua tất cả các môn học hay chỉ môn toán?*

Terence Tao: Khi 8 tuổi tôi học như các bạn cùng trang lứa những môn như tiếng Anh, Vật lý,... Nhưng đối với toán tôi học với các anh chị 11, 12 tuổi.

Gazette: *Cha mẹ có khuyến khích anh trở thành một nhà toán học?*

Terence Tao: Tôi nghĩ rằng ban đầu cha mẹ tôi bối rối vì họ không biết nhà toán học làm gì. Nhưng khi cha mẹ nhận ra rằng tôi thích toán hơn vật lý, họ đã khuyến khích tôi làm những gì tôi thích và tôi rất biết ơn vì điều đó. Họ không thúc ép tôi làm điều gì. Trong nền văn hóa châu Á, luôn có một áp lực lớn theo đuổi những ngành nghề cao quý như Y học hay Luật, nhưng đối với một số người đó không phải là nghề nghiệp tốt nhất với họ. Tôi rất vui vì cha mẹ tôi không ngần ngại khi tôi yêu toán.

Gazette: *Họ vẫn ở Adelaide chứ?*

Terence Tao: Vâng. Tôi ở với cha mẹ khi trở lại Adelaide. Adelaide không thay đổi nhiều và cha mẹ của tôi cũng không thay đổi nhiều.

Gazette: *Anh có anh chị em không?*

Terence Tao: Tôi có hai em trai. Một ở Adelaide, làm việc cho Bộ Khoa học và Công nghệ Quốc phòng; một ở Sydney và làm việc cho Google. Đó là công việc mơ ước của em trai tôi. Em trai tôi đã làm một trang web giải thích lý do cậu ấy nên được Google thuê, có kèm lý lịch trích ngang của mình, ... Điều này có lẽ đã giúp cậu ta nhận được công việc. Google thích cách làm đó.

Gazette: *Anh đã bao giờ cân nhắc làm việc cho Google?*

Terence Tao: Không thực sự. Tôi thích toán học, còn Google lập trình để giải quyết vấn đề. Tôi có thể lập trình, nhưng không được tốt như làm toán.

Gazette: *Điều gì làm anh thích môi trường học thuật nhất?*

Terence Tao: Tôi thích tự do học thuật. Bạn có thể làm công việc nghiên cứu của bạn, nó không bị người khác chỉ dẫn. Đó không phải là những gì ông chủ của bạn nói cho bạn phải làm. Nó rất linh hoạt. Và tôi yêu thích việc giảng dạy, khi bạn cảm nhận thấy các sinh viên của mình hiểu những thứ mà trước đó họ không hiểu. Mắt họ sáng lên: "A, tôi hiểu rồi" và điều này làm cho bạn cảm thấy như vừa làm một cái gì đó rất hữu ích. Tôi thích văn hóa trong cách nói chuyện của các nhà toán học. Mọi người làm toán vì họ thích toán. Họ không làm điều đó vì tiền.

Gazette: *Công việc giảng dạy của anh có nhiều không?*

Terence Tao: Hiện tại, tôi chủ yếu là giảng dạy sau đại học và hướng dẫn 6 nghiên cứu sinh. Tôi đi công tác cả tháng trời và họ độc lập nghiên cứu. Họ chỉ cần trao đổi với tôi qua email về những gì họ đã làm được. Trong số các sinh viên, tôi kiếm tìm những cá nhân độc lập, trưởng thành và chăm chỉ.

Gazette: *Anh có luôn thích toán học?*

Terence Tao: Có. Cha mẹ tôi kể rằng khi 2 tuổi tôi đã cố gắng dạy cho những trẻ em khác cách đếm số. Khi còn bé tôi có suy nghĩ về toán khác với bây giờ. Toán học với tôi luôn là câu đố và trò chơi. Tôi đã không thực sự hiểu tại sao chúng ta lại làm toán nhiều đến thế. Nhưng tôi thích tư duy trừu tượng. Tôi cũng rất thích làm số học.

Gazette: *Điều gì khiến anh chọn toán học?*

Terence Tao: Đó là điều tôi đam mê. Như tôi đã nói, tôi thực sự thích giải những câu đố. Tôi thực sự thích nó vì trong toán mọi thứ đều rất rõ ràng: những gì là đúng và những gì là sai. Có lẽ bởi vậy tôi thường gặp rắc rối với tiếng Anh, tôi thường không nhận được điểm tốt. “Write whatever you feel like?” – điều đó có nghĩa gì?

Gazette: *Anh có bao giờ cân nhắc làm một công việc khác?*

Terence Tao: Tôi đã từng tư vấn cho các cơ quan chính phủ. Điều này thú vị, nhưng tôi thích môi trường học thuật hơn.

Gazette: *Tại sao anh làm toán?*

Terence Tao: Nó bổ ích. Khi bạn phát hiện ra một điều gì đó có ý nghĩa, bạn có thể giải thích cho người khác. Bạn có cảm giác sung sướng như khi bạn giải quyết một câu đố ô chữ. Trước đây, bạn không hiểu nó, nhưng bây giờ bạn đã làm được. Bạn cảm thấy thông minh hơn, tự tin hơn, tiến bộ hơn. Tôi cho rằng bạn luôn có thể dựng xây tiếp trên những gì bạn đã làm trước đây và tiếp bước những nhà toán học khác đã làm trước đó. Nó không giống như thời trang nơi mà mỗi năm bạn làm điều gì đó rất khác với các năm trước.

Gazette: *Anh đã có nhiều đóng góp cho toán học?*

Terence Tao: Không chỉ tôi, còn rất nhiều nhà toán học giỏi. Thật tuyệt vời khi được nghe về các đột phá trong toán học. Tôi muốn nhắc đến bài giảng của Perelman về giả thuyết Poincaré. Đó là một công trình thực sự tuyệt vời!

Gazette: *Anh có gặp khó khăn gì trong việc kết hợp cuộc sống của một người giành huy chương Fields với cuộc sống gia đình, với vợ và con trai?*

Terence Tao: Huy chương Fields không gây ấn tượng với họ. Đây là một giải thưởng lớn của toán học, việc nhận huy chương Fields đã thu hút sự chú ý của các phương tiện truyền thông. Tuy nhiên 99% thế giới đã không nghe nói về các huy chương Fields. Và ngay tại Los Angeles có rất nhiều người nổi tiếng khác nên tôi cho rằng việc nhận huy chương Fields cũng là điều bình dị. Đây là một trong những lý do tại sao tôi thích cuộc sống ở Los Angeles, tôi có thể ẩn danh, tôi không muốn là một người nổi tiếng. Tôi đọc một bài giảng, 500 người đến nghe, và đôi khi tôi tự hỏi: liệu bao nhiêu trong số họ đến nghe vì họ muốn làm toán. Một chút thôi thì cũng tốt, nhưng là một người nổi tiếng thì không phải là đích hướng đến của tôi. Bạn nên tập trung vào những gì làm được.

Gazette: *Huy chương Fields có làm thay đổi cuộc sống của anh? Anh có thấy mình bận rộn hơn?*

Terence Tao: Tôi luôn rất bận rộn, nhưng hơi khác trước một chút. Có nghĩa rằng tôi được mời tham dự các sự kiện nhiều hơn. Và tôi cảm thấy mình phải có trách nhiệm nhiều hơn khi trình bày các vấn đề toán học. Nếu tôi nói điều gì đó tôi không suy nghĩ thật kĩ lưỡng thì hậu quả rất nghiêm trọng.

Gazette: *Lời khuyên tốt nhất về định hướng nghề nghiệp mà anh từng nhận được?*

Terence Tao: Chủ yếu mọi người dẫn ra các ví dụ hơn đưa ra lời khuyên rõ ràng, trực tiếp. Tôi nhớ giáo sư hướng dẫn của tôi nói với tôi một lần, điều đó thực sự rất sâu sắc và ý nghĩa. Tôi viết bài báo đầu tiên của mình và tôi đặt một câu chuyện cười trong đó. Tôi nghĩ mình thông minh. Ông nhìn tôi và nói: "Khi anh viết một bài báo, đó sẽ là cái được lưu giữ lại theo thời gian. Ba mươi năm sau mọi người vẫn đọc nó. Những gì anh nghĩ là vui bây giờ, có thể sẽ là không vui sau ba mươi năm nữa". Ông khuyên tôi rằng không nên cho chuyện cười trong bài báo.

Gazette: *Anh đã nghiên cứu nhiều lĩnh vực, chuyên ngành nào anh thích nhất?*

Terence Tao: Tôi nghiên cứu các vấn đề khác nhau qua các năm. Nếu tôi tìm thấy một điều gì đó thú vị và tôi có thể làm, tôi sẽ tập trung vào đó. Tùy từng thời điểm, có những lúc tôi không làm được điều gì. Nó phụ thuộc rất nhiều vào nhóm cộng tác. Hầu hết các công việc của tôi là kết hợp với những người khác, từ các lĩnh vực khác nhau và thông qua đó chúng tôi tìm hiểu điều gì là thú vị và bản chất. Ví dụ, hiện tại tôi đang tập trung nhiều hơn vào lý thuyết số, tổ hợp và ma trận ngẫu nhiên, nhưng năm năm tới tôi muốn được làm điều gì đó khác. Nếu vấn đề làm được và tôi biết nó có ích, tôi thực sự cần một chuyên gia về lĩnh vực đó để nói chuyện.

Gazette: *Cộng tác viên chính của anh là ai?*

Terence Tao: Liên tục thay đổi. Hiện nay tôi cộng tác nhiều với ba người: Ben Green làm về lý thuyết số ở Cambridge; Tamar Ziegler làm lý thuyết ergodic ở Israel; và Vũ Hà Văn là một nhà xác suất tại Rutgers. Khi ở Úc, tôi làm việc ở UNSW và ANU.

Gazette: *Thành tích nào khiến anh thấy tự hào nhất?*

Terence Tao: Tôi không nhìn lại. Tôi luôn có nhiều điều cần làm. Bạn có thể giải quyết một vấn đề và cảm thấy tuyệt vời, nhưng có hàng chục vấn đề khác mà bạn vẫn không thể giải quyết chúng.

Gazette: *Huy chương Fields có ý nghĩa gì với anh?*

Terence Tao: Phản ứng đầu tiên của tôi là "Wow!". Có tin đồn rằng tôi sẽ nhận Fields Medal, nhưng tôi không thực sự nghĩ rằng nhận được nó vào năm 2006. Tôi đã nói chuyện với một người nhận huy chương Fields, và ông nói rằng ông được thông báo từ tháng Tư. Công bố chính thức diễn ra vào tháng Bảy. Tháng Tư đi qua, tôi không nhận được cuộc gọi nào. Tháng năm, Chủ tịch của IMU gọi và hỏi: "Anh có phải Terence Tao không?". Tôi nói, "Vâng". Ông nói, "Chúc mừng anh đã giành được huy chương Fields". Tôi không nhớ những gì tôi nói, nhưng tôi đã rất choáng váng. Tôi không mong đợi nó. Sau đó tôi cảm thấy tôi phải sống theo các tiêu chuẩn như những người đã nhận huy chương Fields khác. Bạn trở thành một đại diện của toán học.

Gazette: *Anh có nhận thấy mình nên tham gia sâu trong cộng đồng toán học Úc?*

Terence Tao: Tôi luôn nỗ lực trong những điều mà tôi có thể làm. Tôi sống ở Los Angeles. Những gì tôi biết nước Úc là gián tiếp. Tôi có nhiều bạn bè ở Úc. Chỉ khi trở lại đây tôi mới có cơ hội nhìn nhận trực tiếp nước Úc. Tôi ở trong ban cố vấn khoa học của viện nghiên cứu Australia AMSI. Tôi cũng đã gặp gỡ và nói chuyện với đội Olympic Australia tại Bremen năm vừa rồi.

Gazette: *Anh có lời khuyên nào cho những người mới bắt đầu làm toán?*

Terence Tao: Làm toán là trường kì. Tôi có một nghiên cứu sinh, anh ta nói "Tôi đang hoàn thành luận án của mình, tôi đã học mọi thứ tôi cần phải biết, và tôi sẽ là người đứng đầu trong lĩnh vực đó" - đây không phải cách làm việc! Bạn phải làm việc từ phổ thông, lên đại học, cao học, nghiên cứu sinh, và sau khi hoàn thành luận án, vẫn còn rất nhiều điều phải học. Toán học rất rộng lớn, bạn phải không ngừng trau dồi, làm đa lĩnh vực, không hạn chế bản thân trong một lĩnh vực hẹp nào, nếu bạn muốn thực sự tiến bộ. Điều đó giống như chạy marathon, bạn không thể chỉ chạy nước rút. Bạn phải liên tục học tập, và cảm nhận vẻ đẹp của toán học. Nếu bạn không thích, bạn sẽ không thể theo đuổi toán học.

Gazette: *Có sự khác nhau nào giữa nền toán học Mỹ và Úc?*

Terence Tao: Có nhiều sự khác biệt. Tôi nghĩ rằng hệ thống phổ thông của Úc tốt hơn ở Mỹ. Trong một thời gian dài, các trường phổ thông của Mỹ thiếu giáo viên toán có trình độ cao. Ở Úc, tình trạng này mới chỉ bắt đầu. Tôi đã giảng dạy cả ở Úc và Hoa Kỳ, tôi nhận thấy sinh viên Úc được chuẩn bị tốt hơn. Tại Úc, các trường đại học chủ yếu nhận tài trợ từ Chính phủ và họ phải tuân theo chỉ thị của Chính phủ. Tính ưu tiên đào tạo bị chi phối bởi các chính sách của Chính phủ. Tại Mỹ, có hệ thống các trường đại học công lập và tư nhân, các trường công lập cũng nhận kinh phí từ Chính phủ, nhưng quyền điều hành thuộc về từng trường. Các nhà quản lý là những người làm khoa học, do đó họ thực sự hiểu giá trị của nghiên cứu khoa học. Họ cạnh tranh cho uy tín nói chung, họ muốn danh tiếng tốt để thu hút học viên. Vì lý do này mà họ quan tâm đến thực chất nghiên cứu nhiều hơn, đồng thời vẫn chú trọng phát triển hình ảnh trong cộng đồng. Họ không chỉ tập trung vào số liệu báo cáo, trong khi điều này lại phổ biến tại Úc.

Gazette: *Anh có nhận xét gì về Hội toán học Úc?*

Terence Tao: Họ đã làm tốt công việc dựa trên các nguồn lực mà họ có. Tôi rất ấn tượng các cuộc họp vì chúng được tổ chức tốt. Tôi muốn hướng nhiều hơn đến các giáo viên phổ thông vì họ không hiểu toán học thực sự là gì; tất nhiên sẽ có một bộ phận chuyên trách làm điều này.

Gazette: *Sở thích của anh là gì?*

Terence Tao: Tôi có nhiều. Nhưng kể từ khi tôi có gia đình, có con nhỏ, tôi không còn thời gian rảnh.

Gazette: *Anh có thể chia sẻ về blog của anh?*

Terence Tao: Tôi bắt đầu viết được hai năm nay. Trước đó, tôi chỉ sử dụng một trang web để cập nhật bài báo của mình. Nhưng sau đó tôi quyết định làm blog. Tôi nhận được nhiều phản hồi qua blog. Ví dụ, các bài giảng của tôi ở Úc, tôi đã đưa lên blog vài tuần trước, và liên tục nhận được phản hồi và chỉnh sửa.

Gazette: *Anh đã xuất bản một cuốn sách về blog của mình?*

Terence Tao: Thực ra là hai cuốn. Ý tưởng là lấy nội dung toán học của blog

http://terryTerence Tao.wordpress.com/

Trích dịch từ Gazette - Hội Toán học Úc, tháng 9/2010
Đỗ Đức Thái & Trịnh Duy Tiến (ĐHSP Hà Nội) dịch

Phỏng vấn Srinivasa Varadhan (tiếp)

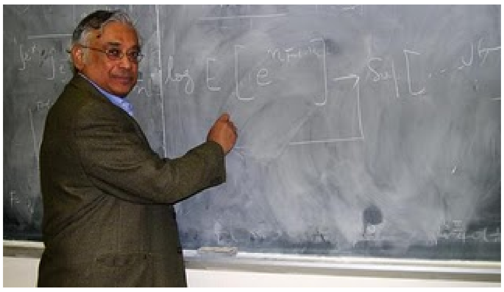
Martin Raussen và Christian Skau

R & S: *Giáo sư là người thứ hai của viện Toán Courant, New York được nhận giải thưởng Abel, sau Peter Lax. Như vậy, viện Courant có một vai trò đặc biệt, ít nhất là trong lĩnh vực toán ứng dụng. Giáo sư có thể giải thích vì sao lại có hiện tượng này? Điều gì đã làm cho viện Courant có một vị trí như vậy?*

Varadhan: Chúng ta hãy trở về những năm 1930, khi viện Courant được thành lập. Lúc đó chưa có ngành toán học ứng dụng ở nước Mỹ. Richard Courant đến nước Mỹ và thành lập viện Toán với trọng tâm là toán ứng dụng. Tầm nhìn của ông ấy đủ rộng để nhận thấy sự cần thiết của toán lý thuyết. Ý tôi muốn nói là, ông ấy không thấy sự khác biệt giữa toán lý thuyết và toán ứng dụng. Ông ấy muốn ứng dụng toán học, do đó ông ấy cần xây dựng những công cụ toán học đủ mạnh. Dựa trên quan điểm đó, tôi nghĩ Giải tích toán học đóng một vai trò rất quan trọng.

Viện Courant luôn rất mạnh về toán ứng dụng và Giải tích. Trong những năm 1960, quỹ Sloan đã tài trợ cho chương trình nghiên cứu Xác suất và Thống kê tại viện. Họ bắt đầu nghiên cứu và đã đạt được thành công với Lý thuyết Xác suất. Thống kê không được thành công như vậy, cho nên ngay cả đến bây giờ viện cũng không mạnh lắm về Thống kê. Chúng tôi rất mạnh về Lý thuyết Xác suất, Giải tích và Toán ứng dụng, và những năm gần đây thì có thêm Hình học Vi phân.

Viện Courant luôn thu hút được những người xuất sắc đến làm việc. Trọng tâm của viện tập trung vào Giải tích và toán ứng dụng. Có lẽ đó là lý do giải thích vì sao viện chúng tôi nhận được hai giải thưởng Abel trong số năm giải đầu tiên đã được trao cho đến nay.



R & S: *Giáo sư đã có những đóng góp sâu sắc đối với Lý thuyết Xác suất. Điều gì đã khiến giáo sư bị hấp dẫn bởi ngành này?*

Varadhan: Khi tôi học chương trình thống kê ở bậc đại học, Lý thuyết Xác suất là một phần của Thống kê, do đó tôi phải học một chút ít về nó. Tôi nhận ra rằng mình có trực giác nhạy cảm đặc biệt với Lý thuyết Xác suất đến mức tôi có thể nhận ra những gì người làm Lý thuyết Xác suất đang cố gắng đạt được, chứ không chỉ là việc tính toán vài con số. Tôi không thể giải thích được, tôi chỉ có thể cảm nhận được nó mà thôi. Trực giác đó giúp tôi rất nhiều, và nó đã thúc đẩy tôi đi sâu vào lĩnh vực này.

R & S: *Lý thuyết Xác suất hiện đại, như lời giáo sư đã đề cập ở trên, được Kolmogorov khởi xướng vào những năm* 1930. *Giáo sư đã có một chuyện thú vị với Kolmogorov: Từ Maxcơva ông ấy đã viết nhận xét về luận án tiến sỹ của giáo sư bảo vệ tại viện Thống kê Ấn Độ năm giáo sư hai mươi hai tuổi như sau: "Tôi nghĩ luận án này không phải là của một sinh viên bình thường, mà là của một nhà toán học trưởng thành". Vậy lúc đó giáo sư đã từng trực tiếp gặp gỡ ông ấy lần nào chưa? Và sau đó giáo sư có trao đổi với ông ấy một vấn đề toán học nào không?*

Varadhan: Có, tôi đã từng gặp Kolmogorov trong lần ông ấy đến Ấn Độ năm 1962. Lúc đó tôi đã nộp luận án và ông ấy là một trong những người phản biện cho luận án. Ông ấy đến để mang luận án về Maxcơva đọc rồi mới viết nhận xét. Điều đó có nghĩa là khi tôi gặp ông ấy thì ông ấy chưa nhận xét về luận án của tôi. Ông ấy ở lại Ấn Độ một tháng, tôi và một số nghiên cứu sinh khác đã đi cùng ông ấy khắp đất nước tôi. Đó là một thời kỳ mà ngày nào chúng tôi cũng gặp ông ấy. Ngày nay, một số tạp chí của Ấn Độ có đề cập đến chuyện đó, nhưng không thực sự chính xác.

Có một sự kiện mà tôi nhớ rất rõ. Lúc đó tôi chuẩn bị có một buổi báo cáo về luận án của mình mà Kolmogorov cũng sẽ đến dự. Thời gian báo cáo dự định là một tiếng đồng hồ nhưng do hăng hái quá nên tôi đã nói liên tục trong một tiếng rưỡi. Mặc dù Kolmogorov không phản ứng gì nhưng một số người khác lại tỏ ra sốt ruột. Sau khi tôi báo cáo xong, ông ấy đứng lên để bình luận một số điều nhưng mọi người lại lục tục bỏ ra ngoài. Điều đó khiến ông ấy rất tức giận. Ông ấy ném viên phấn trên tay rất mạnh xuống đất và rời khỏi phòng với vẻ hết sức giận dữ. Suy nghĩ của tôi ngay lúc đó là: thôi, thế là đi đời cái luận án của mình. Tôi và một nhóm sinh viên ùa theo ông ấy về phòng riêng, tôi xin lỗi ông vì đã nói quá thời gian quy định. Ông nói: "Không, không phải lý do đó. Ở Nga, các buổi xê-mi-na của chúng tôi kéo dài ba tiếng đồng hồ. Tôi tức giận không phải vì anh mà vì những người ngồi nghe bên dưới. Khi Kolmogorov đứng dậy và phát biểu, mọi người nên chờ đợi và lắng nghe".

R & S: *Thật là một câu chuyện thú vị! Trong số rất nhiều đóng góp của ông cho Lý thuyết Xác suất, định lý Độ lệch lớn hẳn là chiếm một vai trò quan trọng hàng đầu. Xin giáo sư nói một cách ngắn gọn về định lý đó, vì sao việc nghiên cứu về độ lệch lớn lại quan trọng như vậy, và nó có những ứng dụng gì?*

Varadhan: Chủ đề về độ lệch lớn được khởi xướng vào những năm 1930. Thực tế, nó bắt nguồn từ bán đảo Scandinave khi người ta nghiên cứu độ rủi ro của ngành công nghiệp bảo hiểm. Người đi tiên phong trong lĩnh vực này là Esscher. Ông ấy nghiên cứu tình huống một công ty bảo hiểm phải đối mặt với quá nhiều vụ đền bù, lúc đó tổng số tiền phải đền bù lớn hơn quỹ bảo hiểm đã được lập ra. Nhiệm vụ đặt ra là tính xác suất xảy ra tình huống đó. Ngày đó người ta thường sử dụng mô hình coi số tiền của một vụ đền bù riêng lẻ là một biến ngẫu nhiên có phân phối xác suất xác định, do đó tổng số tiền đền bù sẽ là tổng của một số lớn các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối. Người ta cần tính xác suất cho biến cố tổng các biến ngẫu nhiên lớn hơn một số cho trước. Điều đó có nghĩa là bạn cần ước lượng xác suất đuôi của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối.

Lúc đó người ta đã biết định lý Giới hạn trung tâm. Định lý này nói rằng tổng số lượng lớn các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối có phân phối xấp xỉ chuẩn. Nếu sử dụng xấp xỉ chuẩn để tính xác suất đuôi thì kết quả thu được sẽ không chính xác. Đó là vì, mặc dù xấp xỉ chuẩn vẫn có hiệu lực, nhưng sai số lại được đo bằng hiệu số. Cả hai số đều rất nhỏ, nên hiệu số cũng rất nhỏ, do đó, định lý giới hạn trung vẫn có hiệu lực. Tuy nhiên, chúng ta quan tâm sai số nhỏ đến mức nào; lúc này chúng ta quan tâm tới tỷ số giữa hai đại lượng đó, chứ không phải đơn giản là hiệu của các số nhỏ này. Ý tưởng chính là: làm sao thế nào để đánh giá được tỷ số thay vì đánh giá hiệu số đó? Esscher phát triển một kỹ thuật nhỏ có tên là độ nghiêng Esscher. Nó là một cách thay đổi phép đo mà bạn dùng trong những trường hợp rất đặc biệt. Với cách nhìn mới này, biến cố đuôi trở thành biến cố trung tâm. Do đó bạn có thể ước lượng nó chính xác hơn nhiều. Phương pháp ước lượng này đặc biệt hữu hiệu khi tính toán xác suất tiệm cận của xác suất đuôi. Đó là nguồn gốc của độ lệch lớn. Thực tế, điều đáng quan tâm nhất là ước lượng xác suất của một biến cố cho trước. Đó là các biến cố có xác suất rất nhỏ. Chúng ta không quan tâm xem biến cố đó xuất hiện theo cách nào mà chỉ quan tâm chúng nhỏ đến mức nào? Hãy chuyển đại lượng đó về dạng mũ âm của cơ số tự nhiên (e), số mũ âm càng lớn thì lũy thừa càng nhỏ. Đó là ý nghĩa được dùng và phát biểu về định lý Độ lệch lớn hiện nay.

R & S: *Định lý Độ lệch lớn có ứng dụng rất rộng rãi, không chỉ trong ngành tài chính, có phải không thưa giáo sư?*

Varadhan: Tôi nghĩ là trong ngành tài chính hay bất cứ ngành nào khác, lý thuyết độ lệch lớn không những cho bạn biết xác suất của biến cố hiếm bằng bao nhiêu, mà còn cho bạn biết nếu biến cố có xác suất nhỏ xảy ra thì nó sẽ xảy ra như thế nào? Bạn có thể lần tìm lại quá khứ của sự kiện đã xảy ra và giải thích nó đã xảy ra như thế nào và có thể xảy ra sự kiện nào khác nữa hay không? Vì vậy, bạn cần phân tích hoàn cảnh tổng thể. Trong phương pháp do Esscher đề xuất, có một nguyên nhân gây ra biến cố, nguyên nhân đó cũng có thể gây ra biến cố khác; nếu sự kiện này xảy ra thì dẫn tới sự kiện này xảy ra hoặc sự kiện khác xảy ra. Do đó định lý Độ lệch lớn cho bạn nhiều thông tin hơn là con số xác suất rất nhỏ của biến cố hiếm. Điều này rất có ích trong ngành tài chính toán học, vì bạn viết lựa chọn thì điều này có nghĩa là: nếu sự kiện nào đó xảy ra trong một khoảng thời gian xác định thì bạn phải trả cho ai đó một khoản tiền tương ứng. Nhưng số tiền bạn phải trả phụ thuộc không chỉ vào thời điểm mà sự kiện đó xảy ra mà còn phụ thuộc vào những sự kiện của những thời điểm trước nữa. Vì vậy bạn muốn biết, nếu như sự kiện đã xảy ra rồi thì lịch sử trước đó đã có thể diễn ra như thế nào? Định lý Độ lệch lớn cho ta khả năng đoán định điều này.

R & S: *Cùng với Donsker, giáo sư đã quy định lý Độ lệch lớn tổng quát thành nguyên lý biến phân rất hiệu quả. Đặc biệt là, giáo sư đã đưa ra hàm tốc độ Donsker-Varadhan và nghiên cứu dáng điệu của nó. Xin giáo sư nói một vài chi tiết về quá trình nghiên cứu và loại hàm tốc độ nào ta có thể điều hành và phân tích?*

Varadhan: Định lý Độ lệch lớn cho tổng các biến ngẫu nhiên do Esscher đề xướng đòi hỏi tính toán hàm sinh mô men. Vì các biến ngẫu nhiên độc lập, nên hàm sinh mô men của tổng là tích của n hàm sinh mô men thành phần. Nếu các biến ngẫu nhiên cùng phân phối thì hàm sinh mô men của tổng sẽ trở thành lũy thừa bậc n của một hàm sinh mô men thành phần. Cái thực sự điều khiển độ lệch lớn chính là loga tự nhiên của hàm sinh mô men tổng, lúc này đơn giản là bội của loga tự nhiên hàm sinh mô men xuất phát. Nếu các biến ngẫu nhiên không độc lập trong tổng thể, nhưng phụ thuộc theo kiểu xích Markov hoặc một kiểu nào đó giống thế, thì lúc này không còn đơn giản là một hàm sinh mô men. Điều quan trọng là phải biết được hàm sinh mô men tổng tăng trưởng như thế nào, tăng trưởng này không giống như sự tăng trưởng của một tích, nhưng mà tăng trưởng theo một cách nào đó. Theo công thức Feynman-Kac, điều này có liên quan với giá trị riêng chính của toán tử cực vi sinh ra quá trình Markov. Có mối liên hệ giữa hàm tốc độ với giá trị riêng chính. Đó là điểm mà lý thuyết của chúng tôi rất hay dùng tới. Hàm tốc độ được xây dựng như là phép biến đổi Legendre hoặc hàm lồi liên hợp của hàm loga giá trị riêng chính.

R & S: *Trước khi kết thúc chủ đề về độ lệch lớn, xin giáo sư bình luận đôi lời về Bổ đề Varadhan dạng tích phân. Vì sao bổ đề này lại có áp dụng rộng rãi như vậy?*

Varadhan: Tôi không nghĩ Bổ đề Varadhan được dùng nhiều, mà có lẽ lý thuyết về độ lệch lớn được áp dụng nhiều hơn. Tôi gọi đó là bổ đề đơn giản vì tôi không muốn gọi nó là định lý. Nội dung của bổ đề rất đơn giản, nó nói rằng nếu xác suất có một tính chất nào đó thì tích phân cũng có một tính chất nào đó. Phép chứng minh chỉ dùng công thức tính xấp xỉ tích phân bởi tổng và những ước lượng sơ cấp. Vấn đề cốt yếu ở đây đúng là ý tưởng chứ không phải là các ước lượng trong công trình, và điều này thì rất hiếm.

R & S: *Nhưng rõ ràng là bổ đề này xuất hiện trong nhiều lĩnh vực đấy chứ, thưa giáo sư?*

Varadhan: Ý tưởng cơ bản ở đây rất đơn giản: Bạn lấy hai số dương a và b, lũy thừa chúng lên với số mũ rất lớn rồi lấy tổng. Khi đó, tổng chỉ phụ thuộc vào lũy thừa của cả số lớn hơn, lũy thừa với số mũ nhỏ không đáng kể, do đó loga tự nhiên của tổng được xấp xỉ bởi loga tự nhiên của lũy thừa với cả số lớn hơn. Vì thế, loga tự nhiên của tổng các lũy thừa có độ tăng trưởng giống như loga tự nhiên của lũy thừa với cả số lớn nhất. Điều đó đúng với tổng hữu hạn, do đó theo một nghĩa nào đó, tích phân cũng có tính chất như vậy nếu chúng ta sử dụng xấp xỉ thích hợp. Đó là cách làm của tôi và nó vẫn đúng trong nhiều trường hợp khác nữa. Tôi cho rằng bản chất ý tưởng đó không quá phức tạp, người ta cũng sử dụng phương pháp đánh giá của tôi trong những lĩnh vực khác.

R & S: *Những kết quả quan trọng của toán học thường như vậy, đơn giản nhưng có nhiều ứng dụng. Ý tưởng thì đơn giản, nhưng điều cốt yếu là tìm ra được ý tưởng đó! Giáo sư đã nhận thấy rằng công thức Mark Kac cổ điển về giá trị riêng thứ nhất của toán tử Schrödinger có thể được giải thích theo ngôn từ độ lệch lớn của chuyển động Brown. Xin giáo sư cho biết vì sao ông lại nhận ra điều này?*

Varadhan: Đó là vào năm 1973, khi tôi mới trở về sau kỳ nghỉ ở Ấn Độ và đang ở văn phòng của Donsker. Hồi đó chúng tôi thường xuyên trao đổi về nhiều vấn đề khác nhau. Ông ấy muốn xem xét giá trị riêng lớn nhất quyết định sự biến thiên tiệm cận của tích phân Kac: tôi nghĩ rằng ngày đó người ta đã biết rằng nếu lấy loga giá trị kỳ vọng của hàm mũ loại Kac, tốc độ tăng trưởng tiệm cận của nó sẽ bằng giá trị riêng thứ nhất. Giá trị riêng thứ nhất được tính qua công thức biến phân; đó là một kết quả cổ điển. Chúng tôi biết rằng nếu tính được độ lệch lớn và tính toán tích phân tiệm cận thì cũng thu được một công thức biến phân khác. Do đó, ông ấy muốn biết liệu có mối liên hệ nào giữa hai công thức biến phân đó hay không: Có hay không một cách giải thích độ lệch lớn cho công thức biến phân này? Tôi nhớ là lúc đó tôi đang thăm trường đại học Duke, vào quãng thời gian cuối thu và đang ngồi trong thư viện trong khi chờ bài thuyết trình của tôi sẽ bắt đầu sau đó vào khoảng nửa giờ đồng hồ. Bỗng nhiên trong đầu tôi nảy ra lời giải cho vấn đề nói trên. Lời giải rất đơn giản. Trong công thức biến phân của Rayleigh-Ritx, có hai biến cố đối lập. Một là tích phân của hàm thế vị nhân với bình phương của một hàm số nào đó. Còn cái kia là dạng Dirichlet của hàm số đó. Nếu bạn thay thế bình phương của hàm số này và gọi nó là một hàm mới thì dạng Dirichlet trở thành dạng Dirichlet của căn bậc hai của hàm ấy. Thật là đơn giản phải không? Vậy hàm tốc độ của độ lệch lớn chính là dạng Dirichlet của căn bậc hai hàm mật độ. Một khi diễn giải theo cách đó thì công thức trở nên rất rõ ràng, và việc chứng minh cũng không khó khăn.

R & S: *Những giải thích của giáo sư làm chúng tôi nảy ra câu hỏi: Nếu một lúc nào đó giáo sư bất chợt lóe lên ý nghĩ trong đầu, nơi mà giáo sư ngay lập tức nhìn thấy lời giải cho bài toán nung nấu bấy lâu, cũng giống như trường hợp giáo sư đã nêu ở trên: Có phải là sự vụt sáng của suy nghĩ phụ thuộc vào sự suy nghĩ bền bỉ cho đến khi giải quyết được vấn đề?*

Varadhan: Đúng như vậy. Những gì diễn ra là: một khi bạn có một vấn đề cần giải quyết, bạn có ý tưởng nào đó về phương hướng đi tới lời giải. Bạn cố gắng tìm ra lời giải đó. Nếu bạn có thể giải quyết được vấn đề theo đúng những suy nghĩ ban đầu thì điều đó không có gì thú vị. Bạn giải quyết xong vấn đề, nhưng bạn không cảm thấy sung sướng. Ngược lại, có thể xảy ra là hầu hết mọi thứ đã được giải quyết trừ một điểm mấu chốt chưa vượt qua được, giống như bạn muốn hoàn thành một ngôi nhà nhưng còn thiếu một điểm ở nền móng mà nếu giải quyết được nó thì bạn sẽ xây xong toàn bộ ngôi nhà. Bạn phải nỗ lực tập trung gỡ nút thắt đó, có thể trong nhiều tháng, trong nhiều năm, thậm chí cả đời! Và cuối cùng, bỗng một ngày kia bạn lóe lên ý tưởng gỡ rối nút thắt đó. Thế là toàn bộ vấn đề được giải quyết. Đó là một cảm giác sung sướng, thỏa mãn mà bạn không thể diễn tả được.

R & S: *Cảm giác ngây ngất đó kéo dài bao lâu, thưa giáo sư?*

Varadhan: Nó kéo dài cho đến khi bạn viết xong công trình và gửi đi xuất bản. Sau đó bạn tiếp tục theo đuổi một vấn đề mới!

(còn nữa)

Người dịch: **Nguyễn Duy Tiến & Đỗ Văn Cường**

Thống kê trích dẫn

(tiếp theo kỳ trước)

Ý nghĩa của trích dẫn.

Những người cổ động cho việc coi trích dẫn như là thước đo chính cho việc đánh giá chất lượng nghiên cứu không trả lời câu hỏi trọng yếu sau: Ý nghĩa của trích dẫn là gì? Họ thu thập một số lượng lớn dữ liệu về số trích dẫn, gia công các dữ liệu đó để rút ra những thống kê, rồi khẳng định rằng quá trình đánh giá là "khách quan". Nhưng các đánh giá được rút ra từ cách ta diễn giải những thống kê, và việc diễn giải dựa trên ý nghĩa của trích dẫn, một khái niệm khá chủ quan.

Trong những tài liệu cổ động cho cách tiếp cận này, việc tìm những khẳng định rõ ràng về ý nghĩa của trích dẫn khó một cách đáng ngạc nhiên.

"Nguyên tắc của việc điểm các trích dẫn rất đơn giản. Với việc công nhận rằng giá trị của thông tin được xác định bởi những người sử dụng chúng, có cách nào tốt hơn để đánh giá chất lượng bằng việc đánh giá tác động của nó tới cộng đồng trên diện rộng. Số lượng lớn nhất có thể trong cộng đồng khoa học (nghĩa là tất cả những người sử dụng hoặc trích dẫn tài liệu nguồn) xác định ảnh hưởng của ý tưởng và của người đưa ra ý tưởng trong trong kho tàng tri thức của chúng ta." [Thompson Science]

"Mặc dù lượng hóa chất lượng của một cá nhân rất khó, quan điểm chung là công bố càng nhiều càng tốt và số trích dẫn của một bài báo (so sánh một cách tương đối theo từng ngành) là một thước đo có ích để đánh giá chất lượng."

"Tần số trích dẫn phản ánh giá trị của một tạp chí và hiệu dụng của nó..."

"Các trích dẫn là sự công nhận việc mang ơn về tri thức".

Những từ liên quan là "số lượng", "giá trị", "tác động", và "mang ơn về tri thức". Thuật ngữ "ảnh hưởng" (impact) đã trở thành từ chung để gắn cho ý nghĩa của trích dẫn - một khái niệm xuất hiện lần đầu tiên trên một bài báo ngắn của Garfield năm 1955 để cổ vũ cho ý tưởng tạo ra chỉ số trích dẫn. Ông ta viết:

"Như vậy, trong trường hợp của một bài báo xuất sắc, chỉ số trích dẫn có một giá trị định lượng, vì nó có thể giúp các nhà lịch sử đo sự ảnh hưởng của bài báo - nghĩa là, chỉ số ảnh hưởng của nó."

Khả rõ rằng, ở đây, cũng như những chỗ khác, thuật ngữ "chỉ số ảnh hưởng" muốn nói rằng bài báo trích được "xây dựng lên" từ công trình của những bài báo được trích - trích dẫn là cơ chế mà khoa học tiến lên phía trước.

Nhưng rất nhiều tài liệu về ý nghĩa thực sự của trích dẫn cho rằng trích dẫn phức tạp hơn nhiều so với những khẳng định mơ hồ khiến người ta dễ tin ở trên. Chẳng hạn, trong một bài báo năm 1983 về đánh giá nghiên cứu, Martin và Irvine viết:

"Phía sau tất cả những vấn đề liên quan tới việc sử dụng trích dẫn như là thước đo của chất lượng là việc chúng ta bỏ qua lý do tại sao các tác giả lại trích các công trình này mà không phải là những công trình khác. Những vấn đề nói đến ở đây... Việc phân tích trích dẫn đơn giản dựa trên một mô hình đơn giản của quá trình trích dẫn, trong đó trích dẫn chỉ phản ánh sự công nhận đối với những công trình đi trước về chất lượng và tầm quan trọng, và những người có ý định trích đều có cùng một cơ hội để trích một công trình cụ thể..."

Trong bài báo về ý nghĩa của trích dẫn năm 1989, Cozzens khẳng định rằng trích dẫn là kết quả của hai hệ thống trong quá trình tạo ra công bố khoa học, một là hệ thống "trả ơn" và hai là hệ thống "cường điệu". Ý nghĩa của loại thứ nhất là ý nghĩa thông thường của một trích dẫn - sự công nhận rằng bài báo trích "mang ơn về tri thức" bài báo được trích. Loại thứ hai có ý nghĩa hoàn toàn khác - nhắc đến một công trình trước đó mà kết quả của nó có thể hoàn toàn không phải của tác giả được trích. Một trích dẫn "cường điệu" như vậy chẳng qua là một cách tạo ra đối thoại khoa học, không liên quan gì tới sự mang ơn về tri thức. Tất nhiên trong một số trường hợp một trích dẫn có thể mang cả hai ý nghĩa.

Cozzens nhận xét rằng hầu hết các trích dẫn đều là "cường điệu". Điều này được khẳng định bởi hầu hết các nhà toán học thực hiện việc trích dẫn. (Trong cơ sở dữ liệu của Math Review, gần 30% của hơn 3 triệu trích dẫn là tới các quyển sách chứ không phải tới các bài nghiên cứu). Tại sao điều đó lại quan trọng? Vì không giống như "trả ơn", việc chọn bài báo để đưa ra một trích dẫn "cường điệu" phụ thuộc vào nhiều yếu tố - uy tín của tác giả được trích (hiệu ứng "chào hỏi"), quan hệ của tác giả trích và tác giả được trích, tính khả dụng của tạp chí (Các tạp chí mở có được trích thường xuyên hơn không?), sự thuận lợi trong việc trích nhiều kết quả từ cùng một công trình, vân vân. Rất ít trong số các yếu tố này liên quan trực tiếp tới chất lượng của bài báo được trích.

Thậm chí khi trích dẫn là để "trả ơn", chúng cũng có thể phản ánh nhiều động cơ, bao gồm cả "sự lưu hành, chê bai, cung cấp thông tin, thuyết phục, khen ngợi, cảnh bảo người đọc, và ý kiến cộng đồng". Trong đa số trường hợp, trích dẫn được làm bởi nhiều hơn một động cơ. Một số kết quả quan trọng có thể phải chịu hiệu ứng "tẩy xóa", ngay lập tức bị gộp chung vào kết quả của người khác, mà sau đó trở thành cơ sở cho việc trích dẫn tiếp. Một số trích dẫn khác không phải là sự trả ơn tới những nghiên cứu xuất sắc, mà là sự cảnh báo về những kết quả hoặc ý tưởng sai. Báo cáo này sẽ đưa ra nhiều ví dụ của những trích dẫn "cảnh báo" như vậy.

Tính xã hội của trích dẫn là một đối tượng phức tạp - nó nằm ngoài mục tiêu của báo cáo này. Nhưng ngay một thảo luận ngắn ở đây cũng chứng tỏ rằng ý nghĩa của trích dẫn không đơn giản và rằng thống kê dựa trên trích dẫn không thật "khách quan" như những người ủng hộ khẳng định.

Một số người có thể lý luận rằng ý nghĩa của trích dẫn là không cần bàn vì thống kê trích dẫn rất tương quan với một số số thước đo chất lượng khác (chẳng hạn phản biện kín). Ví dụ tạp chí Evidence nhắc tới ở trên lý luận rằng thống kê trích dẫn có thể (và phải) thay thế các cách đánh giá khác vì sự tương thích này:

"Evidence lý luận rằng kỹ thuật đo bằng thư mục có thể tạo ra chỉ số chất lượng nghiên cứu tương đồng với nhận thức của các nhà nghiên cứu."

Kết luận dường như là, thống kê dựa trên trích dẫn, bất kể ý nghĩa chính xác của nó là gì, phải thay thế các phương pháp đánh giá khác, vì nó thường thống nhất với các đánh giá này. Ngoài sự "vòng quanh" của lý luận này, ta dễ thấy tính "ngụy biện" của cách lập luận.

Sử dụng hiệu quả thống kê.

Việc vội vàng dựa quá nhiều vào những thước đo (thống kê) khách quan để đánh giá nghiên cứu không phải là hiện tượng mới hay cá biệt.

Nó được miêu tả hùng hồn trong quyển sách nổi tiếng *Damned lies and statistics*, của nhà xã hội học Joel Best:

"Tồn tại một văn hóa trong đó người ta tin rằng một số thứ có năng lực thần bí; những nhà nhân loại học gọi đó là vật thiêng. Trong xã hội chúng ta, thống kê là một loại vật thiêng. Chúng ta có khuynh hướng coi thống kê như một phép màu, mặc dù chúng chỉ là những con số. Chúng ta coi chúng như là đại diện mạnh mẽ của sự thật; chúng ta hành động với suy nghĩ rằng chúng chắt lọc được sự phức tạp và lẫn lộn của thực tế thành những điều đơn giản. Chúng ta sử dụng thống kê để chuyển những vấn đề xã hội phức tạp thành những đánh giá, phần trăm và tỷ lệ dễ hiểu hơn. Những người thống kê định hướng mối quan tâm của chúng ta; họ chỉ cho chúng ta phải lo lắng về điều gì và lo lắng chừng nào. Theo một nghĩa nào đó, các vấn đề xã hội trở thành thống kê và, vì chúng ta coi thống kê như là sự thật không chối cãi được, chúng trở thành một lực điều khiển thiêng liêng, thần bí cách chúng ta nhìn các vấn đề xã hội. Chúng ta nghĩ rằng thống kê là những điều phát hiện ra, không phải những con số do chính ta tạo ra".

Niềm tin bí hiểm vào sự thần kỳ của thống kê trích dẫn có thể thấy ở khắp các tài liệu về thực hành đánh giá nghiên cứu, ở tầm quốc gia cũng như tại các cơ quan. Nó cũng có thể tìm thấy ở tại công trình của những người cổ động cho chi số h và những biến thể của nó.

Quan điểm này vẫn còn thấy rõ quanh những cố gắng gần đây nhằm hoàn thiện chỉ số trích dẫn bằng cách sử dụng những thuật toán phức tạp hơn, bao gồm cả thuật toán xếp hạng trang (Page rank), để đánh giá trích dẫn. Những người đề xướng thuật toán mới này khẳng định hiệu quả của chúng nhưng những khẳng định đó không được kiểm chứng bởi các phân tích và rất khó tiếp cận. Vì dựa trên những tính toán phức tạp hơn, những giả định (thường không tường minh) phía sau của họ thường khó hiểu với đa số. Chúng ta quen nhìn các con số và thứ hạng với một nỗi khiếp sợ - như trước sự thật thay vì sự sáng tạo.

Nghiên cứu không phải là lĩnh vực đầu tư công đầu tiên bị soi xét, và từ nhiều thập kỷ qua người ta đã tìm cách đưa ra những đánh giá định lượng của mọi thứ, từ hệ thống giáo dục (trường học) tới hệ thống chăm sóc sức khỏe (bệnh viện và thậm chí cả những nhà phẫu thuật). Trong một số trường hợp, các nhà thống kê đã tham gia góp ý những phép đo hợp lý và việc sử dụng đúng đắn thống kê. Nếu ta hỏi ý kiến bác sỹ khi chữa bệnh, tất nhiên ta phải hỏi (và lưu ý tới) ý kiến của những nhà thống kê khi thực hiện việc thống kê. Hai ví dụ điển hình là các công trình của Bird [2005] và Goldstein-Spiegelhalter [1996]. Dù đối tượng xét tới của cả hai công trình không phải là việc nghiên cứu - bài thứ nhất khảo sát hoạt động của lĩnh vực hành chính công, bài thứ hai khảo sát vấn đề y tế/học đường - mỗi bài cho ta một nhận thức về việc sử dụng đúng đắn thống kê trong việc đánh giá nghiên cứu.

Bài báo của Goldstein và Spiegelhalter có xét tới việc sử dụng bảng thứ hạng dựa trên các con số (ví dụ, thành tích của học sinh, hoặc kết quả y tế), và chuyện này có liên hệ cụ thể tới việc đánh giá nghiên cứu bằng cách sắp hạng tạp chí, bài báo, hoặc tác giả sử dụng thống kê trích dẫn. Trong các bài báo trên, các tác giả đề ra cơ chế ba thành phần cho bất kỳ quá trình đánh giá nào:

Dữ liệu

"Dù công tác thống kê có được thực hiện tốt đến mấy thì cũng không thể bù đắp được thiếu sót từ sự thiếu chính xác cũng như thiếu chân thực của những dữ liệu thu thập được." [Goldstein-Spiegelhalter 1996]

Đây là một quan sát quan trọng với việc đánh giá dựa trên trích dẫn. Chẳng hạn, chỉ số trích dẫn dựa trên một tập con của các dữ liệu, chỉ bao gồm những tạp chí được Thompson Scientific chọn. (Chú ý rằng chỉ số trích dẫn bản thân nó là yếu tố chính cho việc chọn tạp chí.) Một số tác giả đặt câu hỏi về tính chân thực của những dữ liệu này [Rossner-VanEpps-Hill 2007]. Một số tác giả khác chỉ ra rằng một số cơ sở dữ liệu khác có thể đầy đủ hơn [Meho-Yang 2007]. Một số nhóm tác giả đề xuất ý tưởng sử dụng Google Scholar để hoàn thiện các chỉ số thống kê kiểu như chỉ số h, nhưng dữ liệu của Google Scholar thường không chính xác (vì một số dữ kiện như tên tác giả thường được lọc ra ngay từ các trang mạng). Thống kê trích dẫn đối với một nhà khoa học cụ thể đôi khi rất khó nhận được vì nhiều tác giả không ghi tên mình một cách thống nhất, và trong một số tình huống, ở một số nước, đây có thể là một trở ngại to lớn cho việc thu thập một cách chính xác chỉ số trích dẫn.

Phân tích thống kê và Trình bày

Như chúng tôi đã viết, trong đa số trường hợp, khi mà trích dẫn được dùng để xếp hạng bài báo, cá nhân và chương trình, không có một mô hình nào được xác định trước. Thay vào đó bản thân các dữ liệu xác định mô hình, mà nhiều khi một cách mơ hồ. Có vẻ như là một quá trình vòng tròn, đánh giá cao một đối tượng vì nó được xếp hạng cao hơn (trong cơ sở dữ liệu). Tính không xác định trong những kiểu xếp hạng như vậy thường không được quan tâm đúng mức, và ảnh hưởng của sự không xác định này tới việc xếp hạng (chẳng hạn, sự thay đổi hàng năm của chỉ số trích dẫn) cũng ít được phân tích. Cuối cùng, yếu tố trùng lặp (ví dụ, yếu tố đặc thù của một lĩnh vực, kiểu bài báo mà một tạp chí thường đăng, việc một nhà khoa học cụ thể làm lý thuyết hay thực nghiệm) thường bị bỏ qua trong những xếp hạng như vậy, đặc biệt khi thực hiện các đánh giá cấp nhà nước.

Cách thể hiện và Ảnh hưởng

Việc đánh giá nghiên cứu cũng thu hút được nhiều sự quan tâm của công luận. Đối với một nhà khoa học cụ thể, các đánh giá có thể có ảnh hưởng lớn và lâu dài đối với sự nghiệp; đối với một khoa, nó có thể thay đổi tiền đồ cả trong tương lai xa; đối với một lĩnh vực, một hồ sơ đánh giá có thể tạo nên sự khác biệt giữa thịnh vượng và suy tàn. Vì một quyết định quan trọng như vậy, chắc chắn ta cần phải hiểu cả tính xác đáng cũng như những hạn chế của những công cụ để tiến hành công việc. Các trích dẫn có thể đo được chất lượng nghiên cứu tới mức độ nào? Số trích dẫn có vẻ có liên quan tới chất lượng, và ta thường nghĩ rằng một bài báo chất lượng cao thì được trích nhiều. Nhưng, như đã trình bày ở trên, một số bài báo, đặc biệt trong một số lĩnh vực, được trích dẫn nhiều bởi những lý do khác hơn là chất lượng, và do đó bài báo được trích nhiều không nhất thiết có chất lượng cao hơn. Sự thể hiện chính xác của việc xếp hạng dựa trên thống kê trích dẫn cần phải được hiểu rõ hơn. Ngoài ra, nếu thống kê trích dẫn đóng vai trò quan trong trong đánh giá nghiên cứu, rõ ràng là các tác giả, biên tập viên và thậm chí cả các nhà xuất bản sẽ tìm cách nhào nặn ra các hệ thống có lợi cho họ. Hệ quả lâu dài của chuyện này không rõ ràng và chưa được nghiên cứu.

Bài báo của Goldstein-Spiegelhalter rất đáng được đọc bây giờ bởi vì nó chỉ rõ rằng việc dựa quá nhiều vào những thống kê đơn giản trong đánh giá nghiên cứu không phải là một chuyện đơn lẻ. Các chính phủ, cơ quan và cá nhân đã phải đương đầu với những vấn đề tương tự trong quá khứ dưới những dạng khác, và họ đã tìm ra cách để hiểu rõ hơn những công cụ thống kê và bổ sung thêm những phương thức khác để đánh giá. Goldstein-Spiegelhalter kết thúc bài báo của họ với một phát biểu tích cực về hy vọng:

"Cuối cùng, mặc dù chúng tôi chỉ trích nhiều cố gắng hiện nay nhằm đưa ra những kết luận về các cơ quan, chúng tôi không muốn tạo ra ấn tượng rằng chúng tôi tin mọi so sánh như vậy đều không hoàn thiện. Chúng tôi cho rằng việc so sánh các cơ quan và những cố gắng để hiểu tại sao các cơ quan lại khác nhau là một hoạt động quan trọng nó sẽ được thực hiện một cách tốt nhất trong môi trường cộng tác chứ không phải đối lập. Có lẽ đó là phương thức duy nhất đảm bảo thu được những thông tin khách quan, có thể đưa ta tới hiểu biết và cuối cùng tạo ra tiến bộ. Vấn đề thực tế với những quá trình quá đơn giản mà chúng tôi phê phán là chúng đánh lạc hướng cả sự chú ý lẫn phương sách ra khỏi mục tiêu giá trị hơn."

Có lẽ rất khó để tìm được một cách trình bày tốt hơn để diễn tả mục đích chung của tất cả mọi người liên quan tới việc đánh giá nghiên cứu.

Bản gốc có thể lấy về từ:
www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Report/CitationStatistics.pdf
Phùng Hồ Hải (Viện Toán học) dịch

Giáo sư Hoàng Hữu Như (1932 - 2009)

Nguyễn Duy Tiến (Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội)

Lý lịch sơ lược.

Giáo sư Hoàng Hữu Như sinh ngày 06/08/1932 tại thôn Đông Thái, xã Tùng Ảnh, huyện Đức Thọ, Hà Tĩnh. Trước năm 1950 ông là học sinh trường phổ thông Huỳnh Thúc Kháng, từ 1950 đến 1956 ông tham gia bộ đội chống Pháp và là sinh viên Khoa Toán trường Đại học Tổng hợp Hà Nội thời gian 1956 – 1959. Từ năm 1959 đến năm 1962, ông là sinh viên và từ 1964 – 1967 là nghiên cứu sinh chuyên ngành Xác suất & Thống kê tại Khoa Toán-Cơ Đại học TH Lômônôxốp, Matxcơva (Nga). Từ 1962 đến 1997 ông về làm cán bộ giảng dạy tại Khoa Toán Cơ đại học Tổng hợp Hà Nội, trong đó thời gian 1970 – 1980 ông là phó chủ nhiệm Khoa và là chủ nhiệm Khoa từ 1981 đến 1991. Giáo sư Hoàng Hữu Như bảo vệ tiến sỹ năm 1966, được công nhận phó giáo sư năm 1980 và giáo sư năm 1991.

Hướng nghiên cứu chính của giáo sư Hoàng Hữu Như là "Sự ổn định của các định lý đặc trưng các phân phối Xác suất". Ông đã công bố tám bài báo, viết và cộng tác viết bốn cuốn sách về Xác suất Thống kê. Ông cũng dịch một bộ ba tập giải tích và cộng tác dịch bốn quyển sách khác trong đó có một từ điển Toán học. Có lẽ giáo sư Hoàng Hữu Như là người Việt Nam đầu tiên có bài đăng trong *Theory of Probability and its Applications* (Lý thuyết Xác suất và ứng dụng), là tạp chí uy tín nhất của Nga về chuyên ngành Xác suất Thống kê. Ông có đóng góp đáng kể trong việc phát triển lý thuyết về sự ổn định các định lý đặc trưng phân phối Xác suất và cuốn sách "Lý thuyết Xác suất và các kết luận Thống kê" của ông (Nguyễn Duy Tiến chỉ viết phần phụ lục), có lẽ là giáo trình đại học về Xác suất & Thống kê đầu tiên ở Việt Nam.

Giáo sư Hoàng Hữu Như đã được nhà nước trao tặng huân chương Chiến thắng hạng ba, huân chương Chống Mỹ cứu nước hạng nhất, huy hiệu Vì thế hệ trẻ và danh hiệu Nhà giáo ưu tú (năm 2009).

Giáo sư Hoàng Hữu Như đã báo cáo tại một số hội nghị quốc tế như báo cáo 15 phút tại hội nghị Toán học Thế giới tháng 8/1966 ở Matxcơva, có thông báo trong Information Bulletin No. 5, 6 và báo cáo 45 phút ở hội nghị Thống kê Thái Bình Dương lần thứ hai và Thống kê toán ở Sydney, Australia tháng 7-1990. Ông đã đi trao đổi toán học và đọc báo cáo tại nhiều nước như Ba Lan, Nga, Hungary, Đức, Pháp, Hà Lan, Đan Mạch, Australia. Ông cũng đã tham dự và đọc báo cáo tại nhiều hội nghị trong nước như Đại hội Toán học miền Bắc 1971, Đại hội Toán học toàn quốc lần thứ hai từ 15-19/8/1977, Đại hội Toán học toàn quốc lần thứ ba từ 22-25/7/1985.

Con người và năng lực.

Tôi mạnh dạn viết phần này, vì có lẽ tôi và giáo sư Như gần nhau, và hiểu nhau trong nhiều năm công tác tại bộ môn Xác suất và Thống kê, Khoa Toán-Cơ, Đại học Tổng hợp (ĐHTH) Hà Nội.

Tôi ra công tác được hai năm thì anh Như tốt nghiệp tiến sĩ (1967) ở Liên Xô cũ về Khoa Toán-Cơ ĐHTH. Anh Như là người cận rất nặng (đeo kính 14 đi ốp). Bề ngoài, anh trông khắc khổ, luộm thuộm và hơi khó gần. Tôi gặp anh vào một ngày cuối thu chớm lạnh ở khu sơ tán, xóm Cầu Găng, xã Văn Yên, huyện Đại Từ, Thái Nguyên. Không hiểu sao anh có cảm tình với tôi và nói chuyện rất chân tình về đủ mọi chuyện: Khoa học, đời sống, văn học, tiếu lâm.

Thế rồi một hôm họp tổ Xác suất và Thống kê (GS. Nguyễn Bác Văn là tổ trưởng), anh Như đề nghị "tổ ta cần dịch cuốn sách của Cramer: Phương pháp toán học trong Thống kê, từ tiếng Anh ra tiếng Việt". GS. Văn ủng hộ ý kiến này và phân công "anh Nguyễn Khắc Phúc, Đào Hữu Hồ, Nguyễn Duy Tiến dịch, Hoàng Hữu Như và Nguyễn Bác Văn hiệu đính". Lúc bấy giờ, trình độ tiếng Anh của tôi bằng 0, may sao, có bản tiếng Nga và anh Phúc giỏi tiếng Nga. Hai năm sau, cuốn sách cơ bản nhất về Thống kê được NXB Đại học và Trung học Chuyên nghiệp cho ra mắt bạn đọc Việt Nam. Có thể nói anh Như là người rất quan tâm đến công tác đào tạo những cán bộ và sinh viên về Xác suất & Thống kê. Việc đầu tiên trong công tác này là biên soạn tài liệu để cán bộ và sinh viên có tài liệu học và tham khảo. Một hôm anh Như rủ tôi viết giáo trình Xác suất & Thống kê. Tôi hơi do dự vì đã dạy môn học này bao giờ đâu. Anh Như động viên tôi và nói "mình đã chuẩn bị tài liệu rồi, cậu chỉ cần đọc kỹ và viết thêm phần phụ lục (Độ đo và Tích phân) là đủ". Tôi nhận lời và cùng anh làm việc miệt mài. Anh Như có thói quen là, vừa làm việc vừa đọc thơ. Tôi còn nhớ bài thơ

Nhớ hồi lên chín lên mười
Chiều chiều hai đứa ra đồi hái sim
Em ngồi trao nón cho anh
Hàm răng tím (ngắt) nét mi thanh em nhoẻn cười.
Xa nhau mười mấy năm rồi
Đồi sim xưa đã thành đồi sắn xanh
Em ngồi nướng sắn cho anh

Hàm răng trắng (toát) nét mi cong em mỉm cười.
Anh ăn củ sắn em lùi
Còn ngon gấp mấy cái hồi ăn sim.

Anh đọc say sưa với giọng Hà Tĩnh, rồi ngồi bình với tôi từng câu, từng chữ. Tôi quên không hỏi anh, tác giả bài thơ đó là ai. Trong các nhà thơ Việt Nam, anh Như đặc biệt trân trọng Nguyễn Công Trứ. Anh thuộc khá nhiều thơ của Nguyễn Công Trứ, và lấy làm tâm đắc ý tưởng thơ của cụ: Thơ của cụ không buồn, sảng khoái, yêu tự do pha chút ngang tàng

Kiếp sau xin chớ làm người
Làm cây thông đứng giữ trời mà reo.

Sau này, anh còn cộng tác với nhiều cán bộ trong và ngoài Khoa biên soạn nhiều tài liệu khác. Anh tin vào lớp trẻ, mạnh dạn trao việc cho họ, biết động viên và khích lệ và bản thân anh là người luôn học hỏi, cầu thị. Tôi trân trọng anh ở những nét như thế, mặc dù anh còn nhiều nhược điểm: Kiến thức của anh còn hạn chế mà định giải bài toán Fermat, trong nhiều trường hợp anh còn bảo thủ, cứng nhắc, thích làm công việc quản lý hơn là làm chuyên môn. Một số người cho rằng anh là người thủ đoạn, lắm mưu kế, gây mất đoàn kết, kéo bè cánh và chuyên môn không vững.

Tôi cho rằng anh Như tuy biết không nhiều nhưng kiến thức của anh chắc chắn và sâu sắc. Thật vậy, anh Nguyễn Hữu Việt Hưng rất tâm đắc câu chuyện sau đây.

Năm 1973 – 1974, anh Hưng học năm thứ ba, môn Xác suất do thầy Hoàng Hữu Như dạy. Hôm ấy, thầy Như xác định một đại lượng nào đó, là tích phân trên nửa mặt phẳng giới hạn bởi một đường thẳng nằm nghiêng trên mặt phẳng toạ độ. Do đặc điểm của quá trình tính toán, đại lượng này được xác định bởi một tích phân kép, lấy theo x trước rồi sau đó lấy theo y. Tiếp đó, thầy Như đổi thứ tự hai tích phân để hợp nhất nó với một tích phân khác. Định lý Fubini cần được áp dụng, các hàm biểu thị cận của tích phân cần được xác định. Thầy Như đã giảng đi giảng lại việc đổi thứ tự tích phân đến 2 lần, nhưng một số sinh viên là cán bộ, bộ đội chuyển ngành vẫn không hiểu. Ông nheo nheo mắt, tìm cách diễn đạt, rồi ông nói, giọng Hà Tĩnh đặc sệt: "Lấy tích phân cũng thể như người ta quét nhà, quét dọc quét ngang, miễn sao quét cho sạch". Cả lớp ngớ ra, không còn ai thắc mắc gì nữa.

Trong nhiều lần nói chuyện vui, anh Hưng thường hay kể lại cho chúng tôi câu chuyện trên. Anh cho rằng tất cả hồn vía của định lý Fubini được thầy Như diễn đạt tuyệt vời trong sáng bằng một câu thật dân dã. Thỉnh thoảng anh cao hứng bình luận rằng thầy Hoàng Hữu Như là người giảng định lý Fubini hay nhất trong những người mà anh từng nghe và những sách anh từng đọc. Anh cho biết, trong nhiều lần giảng Calculus cho sinh viên một số đại học Mỹ, anh đã dùng cách diễn đạt của thầy Như, trong đó anh thay quét nhà bằng việc hút bụi với một Vacuum. Cách diễn đạt đó đạt hiệu quả bất ngờ. Sinh viên Mỹ rất thích, họ chỉ phản ứng vui: "Chẳng ai hút bụi từng hàng thẳng băng như cách mà ông nói".

Tôi còn nhớ, khi viết sách, anh đề nghị tôi chứng minh một bất đẳng thức về mô men, tôi không chứng minh được, anh đã mày mò tìm ra cách chứng minh và nhắc nhở tôi phải làm việc nghiêm túc hơn. Có thể nói, những người đã từng làm việc với anh (Đào Hữu Hồ, Nguyễn Văn Hữu, Nguyễn Bác Văn) đều nhận thấy anh là người được đào tạo bài bản, có nhiều ý tưởng sáng tạo, biết tích lũy kiến thức.

Về mặt con người, anh Như gần gũi với cấp dưới hơn là với cấp trên. Anh quan tâm tới đời sống của cán bộ trong Khoa, thăm hỏi gia đình họ khi họ gặp khó khăn. Anh động viên và khích lệ những người yếu chuyên môn làm việc. Anh là người thủ lĩnh biết hy sinh những lợi ích vật chất trước mắt, dám nghĩ dám làm. Tôi còn nhớ những năm 80, anh đã chịu khó xây dựng "Xí nghiệp" làm sơn, làm phích, rồi đến làm nước mắm vất vả và quyết tâm như thế nào. Cần lưu ý là, anh Như làm lãnh đạo Khoa từ 1970 – 1991 (phó Chủ nhiệm Khoa 1970 – 1981, Chủ nhiệm Khoa 1981 – 1991), thời kỳ đất nước ta có nhiều biến động và khó khăn nhất, đặc biệt là đời sống vật chất. Việc phải làm những việc không gắn với chuyên môn để tồn tại là điều tất yếu. Trong hoàn cảnh như thế, việc Khoa đã xuất bản được ba tập cuốn sách "Một số phương pháp chọn lọc giải Toán sơ cấp" (sách được tái bản nhiều lần, và cho tới nay vẫn được xem là cẩm nang cho học sinh và giáo viên phổ thông) đã đem lại một số tiền nhất định cho Khoa và cán bộ trong Khoa. Phải nói rằng đấy là thành tích tuyệt vời. Nhờ những việc này, anh chiếm được sự tín nhiệm của đa số cán bộ trong Khoa. Mặt khác, anh lại không được hai bộ trưởng tin dùng. Đặc biệt, một số lãnh đạo cấp trên cho rằng, anh Như là phần tử gây mất đoàn kết. Tôi đã có lần tâm sự với anh: một chủ nhiệm Khoa không được lòng một thủ trưởng thì đã khó làm việc lắm rồi, anh có tới hai bộ trưởng liên tiếp không tin dùng thì theo tôi anh nên chuyển công tác. Anh yên lặng không nói gì.

Anh là người yêu Khoa Toán theo cách của anh. Anh rất tự hào là trong thời kỳ anh làm chủ nhiệm Khoa đã tổ chức thành công bảo vệ tiến sĩ (lần đầu tiên) rồi tiến sĩ Khoa học (cũng lần đầu tiên) cho cố giáo sư Hoàng Hữu Đường và giáo sư Nguyễn Thừa Hợp. Tôi còn nhớ hồi gặp nhiều khó khăn khi giữ anh Đặng Hùng Thắng ở lại làm cán bộ Khoa, anh Như đã suy nghĩ và tìm ra một giải pháp tuyệt vời. Đó là giữ anh Thắng ở lại Khoa với tư cách cán bộ nghiên cứu (trường hợp duy nhất của Đại học Tổng Hợp). Nhờ thế mà ban Giám hiệu Đại học Tổng Hợp chấp nhận, và anh Thắng được ở lại Khoa. Anh quyết tâm xây dựng tổ Đại số-Hình học-Tôpô và là người giới thiệu anh Đào Trọng Thi vào Đảng. Anh còn xây dựng tổ Toán Sinh, Toán trong Khoa học Xã hội. Đặc biệt, khi ở Hà Lan và Đan Mạch về anh rất say sưa với Tin học. Năm 1991, anh là người giới thiệu (mặc dù với tư cách cá nhân) anh Trần Văn Nhung thay anh làm chủ nhiệm Khoa. Từ đó, anh Như rời khỏi Khoa và kiếm sống ở Ba Lan (dường như không can thiệp vào công việc nội bộ của Khoa nữa). Năm 1997 anh Như về nghỉ hưu (đúng 65 tuổi).

Tất cả những điều trên chứng tỏ anh là một chủ nhiệm Khoa tâm huyết, có năng lực, nhiều ý tưởng và luôn luôn đổi mới (mặc dù đôi khi anh hơi quá tự tin vào những ý đồ bất thường). Trong suốt thời gian làm chủ nhiệm Khoa, anh sống trong sạch, không nhận một vinh danh nào.

Tuy nhiên, anh là người vừa bảo thủ vừa cấp tiến và không ưa những ai có ý kiến phản đối anh. Đối với cấp dưới anh khiêm nhường bao nhiêu, thì ngược lại anh không nể phục các cấp lãnh đạo bấy nhiêu. Anh sẵn sàng giúp và nâng đỡ một số cán bộ năng lực hạn chế, trong khi anh không tranh thủ được một số cán bộ có năng lực chuyên môn giỏi của Khoa. Đặc biệt, anh và một số Việt kiều, như giáo sư Lê Dũng Tráng, giáo sư Frédéric Phạm, có quan hệ không tốt, điều này làm cho họ mất thiện cảm với Khoa trong một thời gian dài. Trong thời gian anh đương nhiệm, quan hệ giữa Khoa và Viện Toán không gắn bó, và thiếu sự cộng tác vốn có lợi cho cả hai. Mặt khác, anh là người chủ trì đề án VH 25 và tạo được điều kiện cho nhiều cán bộ của Khoa đi học tập và trao đổi khoa học ở Hà Lan (mặc dù anh phải đưa đi một số thuộc dạng chính sách). Anh Nguyễn Hữu Công là kết quả tốt nhất trong công tác này (anh Công đã bảo vệ xuất sắc luận án tiến sĩ tại Hà Lan và sau đó bảo vệ thành công luận án tiến sĩ Khoa học ở Việt Nam).

Các Chủ nhiệm Khoa trong Lễ Kỷ niệm 45 năm ngày thành lập (1956-2001)
Từ phải sang trái: Phạm Kỳ Anh; Đặng Huy Ruận; Phạm Trọng Quát; Trần Văn Nhung; Hoàng Hữu Như; Hoàng Tụy; Phan Văn Hạp; Nguyễn Duy Tiến

Tôi còn nhớ, mùa đông 1983, các anh Hồ Sĩ Đàm, Phạm Trọng Quát, Hoàng Chí Thành và tôi đón anh Như từ Hà Lan sang Ba Lan. Theo sáng kiến của anh Đàm, chúng tôi những người đang học tập ở Ba Lan sẽ mua vé máy bay cho cán bộ của Khoa sang Ba Lan dự hội nghị hoặc trao đổi Khoa học (những người muốn đi phải hoàn lại tiền vé để chúng tôi mua vé cho những người sau). Anh Như hoan nghênh sáng kiến này và tạo điều kiện để cán bộ trong Khoa đi nước ngoài bằng cách đó. Chúng tôi và một số anh trong Khoa (như anh Huỳnh Mùi, anh Trần Văn Nhung) bỏ tiền V_0 mua vé, và chịu trách nhiệm đón tiếp những người của Khoa từ trong nước sang. Anh Hồ Sĩ Đàm phấn khởi lắm và nói vui với tôi: Lịch sử Khoa sẽ ghi nhận chuyện này. Anh Huỳnh Mùi là người đầu tiên bố trí được nhóm Tôpô-Đại số (gồm cố GS. Nguyễn Đình Ngọc, anh Nguyễn Hữu Việt Hưng, anh Phạm Việt Hùng, anh Nguyễn Việt Dũng) sang Ba Lan trao đổi Khoa học (tháng 5/1984) rất thành công. Tiếp theo là nhóm Phương trình Vi phân của cố GS. Hoàng Hữu Đường và anh Trần Văn Nhung (gồm anh Tôn Quốc Bình, anh Nguyễn Văn Minh). Có những tháng cán bộ từ Khoa sang Ba Lan đông tới mức mà có người nói rằng "Khoa Toán kéo nhau sang Ba Lan để họp Khoa". Cá nhân tôi thì rất vui vì anh Như cấp tiến đến như thế, anh đã thu xếp lo chạy các thủ tục cần thiết (thời đó khó khăn và phức tạp lắm) hết sức tốt đẹp.

Cuối cùng, tôi rất thương anh, vì lẽ cuối đời anh sống cô đơn. Lúc anh lâm bệnh (hè 2008) ít người thân cũ ở bên anh. Trông anh nằm trên giường bệnh, tôi và anh Phạm Kỳ Anh hết sức xót xa. Hơn một năm sau (04/12/2009, tức 18/10 âm lịch) anh qua đời, đúng vào lúc tôi đang viết những điều tốt lành về anh. Mấy hôm nay trời trở lạnh, tôi bỗng dưng chợt thấy có lỗi với anh, vì bài viết về anh còn dang dở. Đúng rồi, anh Như mất vào tháng 12. Tôi nhớ năm 1991, tôi và anh Trần Văn Nhung vào Nghệ An công tác, được các anh ở Khoa

Toán Đại học Vinh cho đi thăm mộ Nguyễn Du. Lúc về, chúng tôi vào thăm nhà cụ Nguyễn Công Trứ. Tôi bùi ngùi, xót xa khi thấy nhà cụ Trứ tiêu điều đến thế. Thắp hương lạy cụ, nhà thơ tài hoa và hơi có chút bất cần đời, mà hậu thế ít người ghi nhận (vào thời điểm đó, 1991).

Tôi viết bài này thay nén nhang thắp tưởng nhớ nhân ngày giỗ thứ nhất của anh. Cầu mong hương hồn anh siêu thoát thành *cây thông đứng giữa trời mà reo*.

Thay cho lời kết.

Tôi đề nghị ban chủ nhiệm Khoa Toán-Cơ-Tin học, trường đại học Khoa học Tự nhiên, đại học Quốc gia Hà Nội làm ảnh chân dung của giáo sư Lê Văn Thiêm (1918-1990) và giáo sư Hoàng Hữu Như (1932-2009) treo ở Văn phòng Khoa. Các tổ bộ môn cần có một sổ vàng lưu giữ ảnh của những thầy giáo đã qua đời của mỗi tổ để tại phòng làm việc (chẳng hạn, tổ Giải tích cần lưu giữ ảnh của giáo sư Hoàng Hữu Đường, phó giáo sư Võ Đức Tôn, tiến sỹ Mai Thúc Ngỗi, cử nhân Trần Thiệp).

Tôi chân thành cám ơn tất cả các thầy và các cô đã góp ý, động viên và sửa nhiều lỗi chính tả để bản thảo của tôi được hoàn thiện như bản chính thức này.

Hà Nội, tháng 12/2010.

Dành cho các bạn trẻ

LTS: "*Dành cho các bạn trẻ*" *là mục dành cho Sinh viên, Học sinh và tất cả các bạn trẻ yêu Toán. Tòa soạn mong nhận được các bài viết hoặc bài dịch có giá trị cho chuyên mục.*

Các số nguyên Gauss

Nguyễn Chu Gia Vượng (Viện Toán học)

Aux sombres héros de l'amer
qui ont sû traverser les océans du vide
-Noir Désir-

Trong số học ở trình độ phổ thông trung học, chúng ta thỉnh thoảng bắt gặp các bài toán về các số nguyên mà một lời giải (nếu như không là duy nhất) có thể được trình bày ngắn gọn dựa vào các số phức. Để minh họa cho nhận xét này, bạn đọc hãy thử sức với bài toán sau đây mà gợi ý sẽ được đưa ra ở cuối bài viết.

Bài tập 1. *Cho p là một số nguyên tố. Hãy xác định phần dư của $\prod_{n=1}^{p-1}(n^2+1)$ khi chia cho p.*

Chính những bài toán như vậy đã thôi thúc chúng tôi viết tài liệu này cũng như đem lại một niềm tin rằng những nội dung này, ngoài việc đem lại những hiểu biết toán học mới cho các em học sinh phổ thông, có thể giúp ích tích cực trong việc giải quyết một số bài toán số học. Bài viết này giới thiệu một số tính chất số học của vành các số nguyên Gauss và một số ứng dụng. Nội dung của tài liệu này không yêu cầu các kiến thức cơ sở đặc biệt nào ngoài một số khái niệm cơ bản của trường số phức. Bài viết vì thế hướng tới độc giả là các em học sinh phổ thông trung học cũng như các bạn sinh viên yêu toán học.

Trong trình bày này, chúng tôi có tham khảo từ nhiều nguồn khác nhau, trong đó ảnh hưởng lớn nhất đến từ bài báo *The arithmetic of Gaussian integers* của I. Goncharov trong *Kvant Selecta, Algebra and Analysis, 1, Mathematical World, vol. 14.*

1. Định nghĩa và các khái niệm cơ bản

Ta nhắc lại định nghĩa tập các số nguyên Gauss

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi; a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C},$$

trong đó $\mathbb{C}$ là trường các số phức và $i^2 = -1$. Chú ý rằng ta có thể coi $\mathbb{Z}[i]$ là một **vành con** chứa $\mathbb{Z}$ của $\mathbb{C}$. Điều này có nghĩa là, với các phép toán cộng và nhân quen thuộc trên các số phức, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$,

- $\alpha + \beta, \alpha - \beta \in \mathbb{Z}[i]$;
- $\alpha\beta \in \mathbb{Z}[i]$.

Việc kiểm tra các tính chất này là đơn giản và được để lại như bài tập.

Nếu $z = x + yi \in \mathbb{C}$, ta nhắc lại rằng **liên hợp** của z là số phức $\bar{z}$ định nghĩa bởi

$$\bar{z} = x - yi,$$

và **mô-đun** của z là số thực không âm cho bởi công thức

$$||z|| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Về mặt hình học, nếu ta biểu diễn các số phức bằng các điểm trên mặt phẳng tọa độ, mỗi số phức $z = x + yi$ với điểm có tọa độ (x, y) thì mô-đun của z đo khoảng cách từ điểm biểu diễn nó tới gốc tọa độ. Ngoài ra, phép lấy liên hợp giao hoán với các phép $+, \times$:

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}, \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$$

cũng như hàm mô-đun giao hoán với phép nhân $||zz'|| = ||z||||z'||$.

Rõ ràng, tập các số nguyên Gauss là ổn định dưới phép lấy liên hợp: nếu $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ thì $\bar{\alpha} \in \mathbb{Z}[i]$. Bây giờ, nếu như mô-đun của một số nguyên thông thường chính là giá trị tuyệt đối của nó, nói riêng là một số nguyên không âm, thì mô-đun của một số nguyên Gauss nói chung không còn là một số nguyên nữa, chẳng hạn $||1 + i|| = \sqrt{2}$. Chính vì vậy, ta đưa ra khái niệm **chuẩn** thay thế cho khái niệm mô-đun, thuận tiện hơn khi làm việc với số học của vành các số nguyên Gauss. Theo định nghĩa, chuẩn của một số nguyên Gauss là bình phương của mô-đun của nó, nói cách khác, nếu $\alpha = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ thì

$$\mathrm{N}(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2.$$

Ngay lập tức, ta có $\mathrm{N} : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$, $\mathrm{N}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ và do phép lấy liên hợp giao hoán với phép nhân, hàm chuẩn cũng vậy. Ta nói rằng hàm chuẩn có tính chất **nhân**:

$$\mathrm{N}(\alpha\beta) = \mathrm{N}(\alpha)\mathrm{N}(\beta).$$

Nhận xét 1.1. *Với $\alpha = a+bi, \beta = c+di$, các đẳng thức $\mathrm{N}(\alpha\beta) = \mathrm{N}(\alpha)\mathrm{N}(\beta)$ và $\mathrm{N}(\alpha\bar{\beta}) = \mathrm{N}(\alpha)\mathrm{N}(\bar{\beta})$ lần lượt cho ta các đẳng thức đẹp đẽ quen thuộc sau*

(1) $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$;
(2) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.

2. Quan hệ chia hết, phần tử khả nghịch và phần tử bất khả quy

Với hai số nguyên Gauss α và β, ta nói rằng α là một **ước** của β hay β là **bội** của α, kí hiệu là $\alpha \mid_{\mathbb{Z}[i]} \beta$, nếu tồn tại $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$

sao cho $\alpha\gamma = \beta$. Khái niệm này mở rộng khái niệm chia hết quen thuộc trên $\mathbb{Z}$ theo nghĩa sau: với mọi $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \mid b$ (trong $\mathbb{Z}$) khi và chỉ khi $a \mid_{\mathbb{Z}[i]} b$. Chính vì thế, từ bây giờ ta sẽ viết $\alpha \mid \beta$ thay cho $\alpha \mid_{\mathbb{Z}[i]} \beta$.

Một số nguyên Gauss được gọi là **khả nghịch** nếu là ước của 1, nói một cách khác, nếu $\neq 0$ và sao cho nghịch đảo trong $\mathbb{C}$ cũng là một số nguyên Gauss. Chú ý rằng do 1 là ước của mọi số nguyên Gauss, một phần tử là khả nghịch nếu và chỉ nếu là ước của mọi số nguyên Gauss. Tập $\mathbb{Z}[i]^\times$ các phần tử khả nghịch của $\mathbb{Z}[i]$ được miêu tả như sau.

Mệnh đề 2.1. *Tập các phần tử khả nghịch của $\mathbb{Z}[i]$ là*

$$\mathbb{Z}[i]^\times = \{\pm 1, \pm i\} = \{\alpha \in \mathbb{Z}[i]; \mathrm{N}(\alpha) = 1\}.$$

Chứng minh. Thật vậy, giả sử α khả nghịch và $\alpha^{-1} \in \mathbb{Z}[i]$ là nghịch đảo của nó. Ta có $\mathrm{N}(\alpha)\mathrm{N}(\alpha^{-1}) = \mathrm{N}(1) = 1$. Do $\mathrm{N}(\alpha), \mathrm{N}(\alpha^{-1}) \in \mathbb{Z}_{>0}$ nên ta phải có $\mathrm{N}(\alpha) = \mathrm{N}(\alpha^{-1}) = 1$. Ngược lại, nếu $\mathrm{N}(\alpha) = 1$ thì $\alpha\bar{\alpha} = 1$ nên $\bar{\alpha}$ là nghịch đảo của α. Cuối cùng, nhận xét rằng $\mathrm{N}(a+bi) = a^2+b^2 = 1$ kéo theo $(a,b) = (\pm 1, 0)$ hoặc $(a,b) = (0, \pm 1)$, nói cách khác $a + bi = \pm 1$ hoặc $\pm i$. □

Bài tập 2. *Từ định nghĩa $\mathbb{Z}[i]^\times = \{\alpha \in \mathbb{Z}[i]; \alpha^{-1} \in \mathbb{Z}[i]\}$ hãy tìm lại kết quả trên (không dựa vào hàm chuẩn).*

Ta nói hai số nguyên Gauss α, β là **liên kết** với nhau, kí hiệu là $\alpha \sim \beta$, nếu $\alpha \mid \beta$ và $\beta \mid \alpha$. Hai số nguyên Gauss là liên kết với nhau khi và chỉ khi sai khác với nhau bằng phép nhân với một phần tử khả nghịch.

Bài tập 3. *Tìm các liên kết của*

(1) $1 + i$;
(2) $1 + 2i$, $1 - 2i$.

Cuối cùng, có lẽ khái niệm quan trọng nhất trong quan hệ chia hết là về các phần tử **bất khả quy**, khái niệm đóng vai trò tương tự như các số nguyên tố trong vành số nguyên. Ta nói $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ là bất khả quy nếu $\alpha \neq 0, \alpha$ không khả nghịch và nếu $\alpha = \beta\gamma$ thì hoặc β khả nghịch (khi đó $\gamma \sim \alpha$) hoặc γ khả nghịch (khi đó $\beta \sim \alpha$). Nói một cách khác, một số nguyên Gauss là bất khả quy nếu $\neq 0$ và không có các ước thực sự nào. Lưu ý rằng nếu $a \in \mathbb{Z}$ là bất khả quy trong $\mathbb{Z}[i]$ thì $|a|$ là một số nguyên tố thông thường (bạn đọc tự kiểm tra sự kiện đơn giản này). Tuy nhiên, điều ngược lại là không đúng, chẳng hạn 2 không phải là một phần tử bất khả quy của $\mathbb{Z}[i]$ bởi vì $2 = i(1+i)^2$. Ta sẽ nghiên cứu các phần tử bất khả quy một cách chi tiết hơn.

3. Tính Euclid và Định lý cơ bản của số học của vành Gauss

Ta có kết quả bản lề sau.

Mệnh đề 3.1 (Phép chia Euclid trên vành các số nguyên Gauss)**.** *Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ với $\beta \neq 0$. Tồn tại các số nguyên Gauss μ, ρ sao cho $\alpha = \beta\mu + \rho$ và $\mathrm{N}(\rho) < \mathrm{N}(\beta)$.*

Chứng minh. Đặt $\frac{\alpha}{\beta} = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ với trục tung $\mathbb{R}i$ và trục hoành $\mathbb{R}$, tập các số nguyên Gauss chính là tập các điểm có tọa độ nguyên. Ta chọn $\mu \in \mathbb{Z}[i]$ là một điểm tọa độ nguyên gần $x + yi$ nhất. Dễ thấy khi đó khoảng cách giữa μ và $x + iy$ không vượt quá một nửa của độ dài đường chéo một hình vuông đơn vị, nghĩa là $\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, nói riêng luôn nhỏ hơn 1. Điều này lại có nghĩa là $\mathrm{N}(\frac{\alpha}{\beta} - \mu) < 1$. Do đó $\mathrm{N}(\alpha - \beta\mu) = \mathrm{N}\left(\beta\left(\frac{\alpha}{\beta} - \mu\right)\right) = \mathrm{N}(\beta)\mathrm{N}(\frac{\alpha}{\beta} - \mu) < \mathrm{N}(\beta)$. □

Nhận xét 3.2. *Cặp β, γ như trong Mệnh đề trên nói chung là không duy nhất.*

Ví dụ 3.3. *Ta minh họa Mệnh đề 3.1 với $\alpha = 5 - 8i, \beta = 7 + 3i$. Ta có*

$$\frac{5-8i}{7+3i} = \frac{(5-8i)(7-3i)}{(7+3i)(7-3i)} = \frac{11}{58} - \frac{71}{58}i.$$

Số nguyên Gauss gần nhất tới $\frac{11}{58} - \frac{71}{58}i$ là $-i$. Ta có thể lấy thương của phép chia Euclid là $\mu = -i$, khi đó ta nhận được phần dư $\rho = \alpha - \beta\mu = 2 - i$. Đẳng thức

$$8 - 5i = (7+3i)(-i) + (2-i),$$

là một phép chia Euclid $8 - 5i$ cho $7 + 3i$.

Bài tập 4. *Tìm tất cả các phép chia Euclid α cho β với*

(1) $\alpha = 5, \beta = 2$;
(2) $\alpha = 4 + 3i, \beta = 2 + i$.

Kết quả trên cho thấy sự tồn tại của thuật toán Euclid trên vành Gauss. Nhắc lại rằng thuật toán này áp dụng cho một cặp $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i], \beta \neq 0$ cho phép ta tìm được **ước chung lớn nhất** δ của α, β theo nghĩa sau

(1) $\delta \mid \alpha, \delta \mid \beta$;
(2) Với mọi δ' sao cho $\delta' \mid \alpha, \delta' \mid \beta$ thì hoặc δ' liên kết với δ hoặc $\mathrm{N}(\delta') < \mathrm{N}(\delta)$.

Ước chung lớn nhất của hai số nguyên Gauss (mà sự tồn tại được nêu ra ở trên) là không duy nhất. Nếu δ là một ước chung lớn nhất của α, β thì mọi $\delta' \sim \delta$ cũng là một ước chung lớn nhất và tập $\{\delta'; \delta' \sim \delta\}$ là tập các ước chung lớn nhất của α, β. Hơn thế nữa, thuật toán Euclid cũng đem lại hai phần tử $\mu, \nu \in \mathbb{Z}[i]$ sao cho

$$\mu\alpha + \nu\beta = \delta$$

Đẳng thức này được biết đến dưới tên gọi đẳng thức Bézout.

Ta nói rằng hai số nguyên Gauss $\neq 0$ là **nguyên tố cùng nhau** nếu 1 là một ước chung lớn nhất của chúng.

Ví dụ 3.4. *Ta lấy lại $\alpha = 8 - 5i, \beta = 7 + 3i$ như ở ví dụ trên. Thuật toán Euclid cho cặp (α, β) là các phép chia Euclid như sau. Trước hết, ta thực hiện một phép chia Euclid $8 - 5i$ cho $7 + 3i$. Như giải thích ở trên, ta có thể lấy $8 - 5i = (7 + 3i)(-i) + (2 - i)$. Bây giờ thực hiện một phép chia Euclid $7 + 3i$ cho $2 - i$. Tương tự, ta có thể chọn*

$$7 + 3i = (2 + 3i)(2 - i) + (-i).$$

Và cuối cùng phép chia Euclid $2 - i$ cho $(-i)$ tất nhiên là một phép chia với phần dư $= 0$ vì $-i$ là một phần tử khả nghịch. Cụ thể, $2 - i = (1 + 2i)(-i) + 0$. Như vậy, phần dư cuối cùng $\neq 0$ trong thuật toán Euclid là $-i$ và do đó $-i$ là một ước chung lớn nhất của $8 - 5i$ và $7 + 3i$. (Suy ra $8 - 5i$ và $7 + 3i$ là nguyên tố cùng nhau.) Để tìm cặp số nguyên Gauss thỏa mãn đẳng thức Bézout ta dựa vào các phép chia trong thuật toán Euclid ở trên. Ta có

$$\begin{aligned}
-i &= 1(7+3i) + (-2-3i)(2-i) \\
&= (7+3i) + (-2-3i). \\
&\qquad (1(8-5i) + i(7+3i)) \\
&= (7+3i)(1 + (-2-3i)i) \\
&\qquad + (8-5i)(-2-3i) \\
&= (7+3i)(4-2i) + (8-5i)(-2-3i).
\end{aligned}$$

Bài tập 5. *Cho hai số nguyên thông thường $a \neq 0, b \neq 0$. Chứng minh rằng a, b nguyên tố cùng nhau như hai số nguyên khi và chỉ khi nguyên tố cùng nhau trong vành các số nguyên Gauss.*

Tính Euclid của vành $\mathbb{Z}[i]$ cho ta một trường hợp đặc biệt của bổ đề Gauss.

Bổ đề 3.5. *Cho α, β, γ là các số nguyên Gauss với α bất khả quy. Nếu $\alpha \mid \beta\gamma$ thì $\alpha \mid \beta$ hoặc $\alpha \mid \gamma$.*

Chứng minh. Giả sử $\alpha \nmid \beta$. Ta biết rằng thuật toán Euclid cho bộ β, α (điều kiện α bất khả quy đảm bảo $\alpha \neq 0$) cho ta ước chung lớn nhất δ của β, α cùng với các số nguyên Gauss μ, ν sao cho $\delta = \beta\mu + \alpha\nu$. Do $\delta \mid \alpha$ và α bất khả quy theo giả thiết,

δ hoặc là một phần tử khả nghịch hoặc là một liên kết của α. Nhưng δ không thể là một liên kết của α vì khi đó ta có $\alpha \mid \delta \mid \beta$. Như vậy δ là một phần tử khả nghịch. Ta suy ra $\gamma = \delta^{-1}\gamma\beta\mu + \delta^{-1}\gamma\alpha\nu$. Vì $\alpha \mid \beta\gamma$ nên đẳng thức này kéo theo $\alpha \mid \gamma$. □

Như một hệ quả của sự tồn tại của phép chia Euclid trên vành các số nguyên Gauss, ta có Định lý cơ bản của số học cho vành $\mathbb{Z}[i]$ như sau.

Định lý 3.6 (Định lý cơ bản của số học cho vành Gauss)**.** *Mọi số nguyên Gauss $\alpha \neq 0$ đều có thể được viết dưới dạng*

$$\alpha = \epsilon\gamma_1 \cdots \gamma_n$$

trong đó ϵ là một phần tử khả nghịch, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ là các phần tử bất khả quy (không nhất thiết phân biệt, thậm chí không nhất thiết đôi một không liên kết). Cách phân tích này là duy nhất theo nghĩa sau: nếu $\alpha = \epsilon'\delta_1 \cdots \delta_m$ là một phân tích tương tự của α thì $m = n$ và tồn tại một hoán vị σ trên tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho với mọi i, ta có $\delta_i \sim \gamma_{\sigma(i)}$.

Chứng minh. **Sự tồn tại**. Ta tiến hành quy nạp theo $\mathrm{N}(\alpha)$. Trường hợp $\mathrm{N}(\alpha) = 1$ là tầm thường vì khi đó α là một phần tử khả nghịch. Giả sử phân tích như vậy tồn tại với mọi $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ sao cho $\mathrm{N}(\beta) < k$ với $k > 1$ là một số nguyên dương nào đó và α là một số nguyên Gauss với $\mathrm{N}(\alpha) = k$. Nếu α là một phần tử bất khả quy thì bài toán không có gì phải chứng minh. Giả sử α là khả quy, viết $\alpha = \mu\nu$ với μ, ν là các phần tử không khả nghịch. Do $\mathrm{N}(\alpha) = \mathrm{N}(\mu)\mathrm{N}(\nu)$ nên $1 < \mathrm{N}(\mu), \mathrm{N}(\nu) < k$. Áp dụng giả thiết quy nạp cho μ và ν ta nhận được một phân tích thỏa mãn các yêu cầu của định lý.

Tính duy nhất. Đây là một hệ quả quen thuộc của tính Euclid. Nếu α là một phần tử khả nghịch thì bài toán là tầm thường. Giả sử α không khả nghịch. Không mất tổng quát, ta có thể viết một phân tích ra tích các phần tử bất khả quy dưới dạng $\alpha = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n$, với γ_i là các phần tử bất khả quy, không nhất thiết đôi một không liên kết. Chú ý rằng phần tử khả nghịch của phân tích nguyên gốc được hấp thụ vào một trong các phần tử bất khả quy.

Giả sử ta có một phân tích khác $\alpha = \delta_1 \cdots \delta_m$. Áp dụng Bổ đề 3.5 ở trên, từ đẳng thức

$$\gamma_1 \cdots \gamma_n = \delta_1 \cdots \delta_m$$

ta suy ra γ_1 liên kết với một trong các phần tử γ_i nào đó. Thật vậy, do $\gamma_1 \mid \delta_1 \cdots \delta_m$, tồn tại i sao cho $\gamma_1 \mid \delta_i$. Thế nhưng δ_i cũng là một phần tử bất khả quy nên ta phải có $\gamma_1 \sim \delta_i$. Bây giờ, chia cả hai vế của đẳng thức $\gamma_1 \cdots \gamma_n = \delta_1 \cdots \delta_m$ cho γ_1 ta nhận được một đẳng thức tương tự với độ dài của phân tích ở mỗi vế giảm đi 1. Tiến hành liên tiếp như vậy ta dễ dàng nhận được điều cần chứng minh. □

Nhận xét 3.7. *Định lý cơ bản của số học trên $\mathbb{Z}[i]$ dễ dàng cho ta một công thức để tính ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất (mà định nghĩa hoàn toàn giống như đối với các số nguyên thông thường). Tuy nhiên, trong thực tế, đây thường không phải là cách tốt nhất để tìm các đại lượng này.*

Bài tập 6. *Bài tập sau mở rộng Bổ đề 3.5. Cho α, β, γ là các số nguyên Gauss sao cho $\alpha \mid \beta\gamma$. Chứng minh rằng nếu α, β nguyên tố cùng nhau thì $\alpha \mid \gamma$.*

4. Các phần tử bất khả quy của vành Gauss

Định lý cơ bản của số học cho vành $\mathbb{Z}[i]$ mà ta đã thiết lập ở trên cho thấy sự cần thiết của việc nghiên cứu các phần tử khả nghịch và các phần tử bất khả quy của vành này. Nhắc lại rằng các phần tử khả nghịch đã được miêu tả tại Mệnh đề 2.1. Đối với các phần tử bất khả quy, trước hết ta có kết quả sau.

Mệnh đề 4.1. *Cho $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ là một phần tử bất khả quy của $\mathbb{Z}[i]$. Tồn tại duy nhất một số nguyên tố $p \in \mathbb{Z}$ sao cho $\gamma \mid p$.*

Chứng minh. Ta có $\gamma \mid \gamma\bar{\gamma} = \mathrm{N}(\gamma)$. Như vậy, theo Bổ đề 3.5 γ là ước của một ước nguyên tố p nào đó của $\mathrm{N}(x)$. Số nguyên tố p như vậy là duy nhất. Thật vậy, nếu tồn tại một số nguyên tố $q \neq p$ sao cho $\gamma \mid q$. Theo Định lý Bezout cho các số nguyên, ta biết rằng tồn tại các số nguyên a, b sao cho $ap + bq = 1$. Do đó $\gamma \mid 1$, mâu thuẫn với giả thiết γ bất khả quy. □

Nhận xét 4.2. *Mệnh đề trên, đơn giản nhưng rất sâu sắc, nói rằng mọi phần tử bất khả quy của $\mathbb{Z}[i]$ đều **nằm trên** một số nguyên tố nào đó. Đây là một miêu tả ban đầu các phần tử bất khả quy của $\mathbb{Z}[i]$.*

Theo Mệnh đề 4.1 và Định lý 3.6, việc miêu tả các phần tử bất khả quy của $\mathbb{Z}[i]$ tương đương với việc miêu tả các nhân tử bất khả quy của các số nguyên tố thông thường p trong vành $\mathbb{Z}[i]$. Ta bắt đầu với $p = 2$.

Mệnh đề 4.3. *Các ước bất khả quy của 2 trong $\mathbb{Z}[i]$ là $1 + i$ và các phần tử liên kết với nó, nghĩa là $\{\pm 1 \pm i\}$.*

Chứng minh. Ta có $2 = (1 + i)(1 - i)$ nên $1 + i \mid 2$ cũng như các phần tử liên kết với $1 + i$, nghĩa là $\pm 1 \pm i$. Mặt khác $1 + i$ là bất khả quy vì $\mathrm{N}(1 + i) = 2$ là nguyên tố. Điều này được suy ra từ nhận xét đơn giản nhưng hữu hiệu sau. □

Bổ đề 4.4. *Cho $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ sao cho $\mathrm{N}(\alpha)$ là một số nguyên tố. Thế thì α là một phần tử bất khả quy.*

Chứng minh. Thật vậy, nếu $\alpha = \beta\gamma$ thì $\mathrm{N}(\beta)\mathrm{N}(\gamma) = \mathrm{N}(\alpha)$ là một số nguyên tố, ta suy ra $\mathrm{N}(\beta) = 1$ hoặc $\mathrm{N}(\gamma) = 1$, nghĩa là một trong hai phần tử β, γ là khả nghịch. □

Bài tập 7. *Để minh họa cho sự tiện ích của kết quả trên (và sự thuận tiện của hàm chuẩn), bạn đọc chỉ dựa vào định nghĩa, hãy chứng minh $1+i, 2+i$ là các số nguyên Gauss bất khả quy.*

Với các số nguyên tố p lẻ, ta chia ra làm hai trường hợp $p \equiv 1 \pmod 4$ và $\equiv 3 \pmod 4$.

Mệnh đề 4.5. *Nếu p là một số nguyên tố $\equiv 3 \pmod 4$ thì p là một phần tử bất khả quy của $\mathbb{Z}[i]$.*

Chứng minh. Giả sử p là khả quy. Viết $p = \alpha\beta$ với α, β là các phần tử không khả nghịch, như vậy $\mathrm{N}(\alpha), \mathrm{N}(\beta) > 1$. Từ tính nhân của chuẩn

$$\mathrm{N}(\alpha)\mathrm{N}(\beta) = \mathrm{N}(p) = p^2$$

và do $\mathrm{N}(\alpha), \mathrm{N}(\beta) > 1$ ta suy ra $\mathrm{N}(\alpha) = \mathrm{N}(\beta) = p$. Viết $\alpha = a + bi, a, b \in \mathbb{Z}$ thế thì $a^2 + b^2 = p \equiv 3 \pmod 4$, nhưng đồng dư này rõ ràng không thể xảy ra. Như vậy p là một phần tử bất khả quy của $\mathbb{Z}[i]$. □

Mệnh đề 4.6. *Giả sử p là một số nguyên tố và $p \equiv 1 \pmod 4$.*

(1) Tồn tại duy nhất một bộ nguyên dương (a, b), chính xác tới thứ tự, sao cho $a^2 + b^2 = p$;
(2) Các ước bất khả quy của p trong $\mathbb{Z}[i]$ gồm $a + bi, a - bi$ (với a, b như trên) và các phần tử liên kết với chúng.

Để minh họa, số nguyên tố $p = 5$ có thể viết duy nhất dưới dạng tổng của hai số chính phương $5 = 1^2 + 2^2$. Số nguyên tố 5 không là bất khả quy trong $\mathbb{Z}[i]$ mà có hai ước bất khả quy $1+2i, 1-2i$. Có nghĩa là 5 có 8 ước bất khả quy gồm các phần tử liên kết với $1+2i$, nghĩa là $\{1+2i, -1-2i, -2+i, 2-i\}$, và các phần tử liên kết với $1-2i$, nghĩa là $\{1-2i, -1+2i, 2+i, -2-i\}$.

Ta nhắc lại kết quả sau.

Bổ đề 4.7 (Lagrange)**.** *Cho p là một số nguyên tố $\equiv 1 \pmod 4$. Tồn tại một số nguyên n sao cho $p \mid n^2+1$.*

Chứng minh. Thật vậy, đặt $p = 4k+1$. Theo Định lý Wilson ta có

$$(4k)! \equiv -1 \pmod p.$$

Mặt khác ta có

$(4k!) = (1\cdot 2\cdots 2k)((2k+1)\cdot(2k+2)\cdots(4k)) \equiv (1\cdot 2\cdots 2k)((-2k)(-2k+1)\cdots(-1)) \equiv (-1)^{2k}(1\cdot 2\cdots 2k)^2 \equiv (2k!)^2 \pmod p$. □

Chứng minh Mệnh đề 4.6. Theo Bổ đề Lagrange, tồn tại một số nguyên n sao cho $p \mid n^2+1$. Như vậy, nếu xét trong vành Gauss, $p \mid (n+i)(n-i)$. Tuy nhiên

$$p \nmid n+i, p \nmid n-i$$

(vì $\frac{n}{p} \pm \frac{1}{p}i \notin \mathbb{Z}[i]$). Từ đó suy ra p không phải là một phần tử bất khả quy. Gọi $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ là một ước bất khả quy của p. Rõ ràng liên hợp $a-bi$ cũng là một ước của p (chỉ cần lấy liên hợp hai vế của một phân tích của p ra tích các phần tử bất khả quy trong $\mathbb{Z}[i]$).

Ta sẽ chỉ ra $a+bi, a-bi$ là các ước bất khả quy duy nhất (sai khác phép liên kết) của p.

Thật vậy giả sử $c+di$ (và do đó $c-di$) là một ước bất khả quy của p không liên kết với $a+bi, a-bi$. Ta suy ra

$$(a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di) \mid p$$

(trong $\mathbb{Z}[i]$). Điều này dẫn đến

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \mid p$$

(trong $\mathbb{Z}[i]$, hay một cách tương đương, trong $\mathbb{Z}$), nhưng đây là một điều vô lý. □

Nhận xét 4.8. *Khẳng định đầu tiên của Mệnh đề 4.6 được biết đến dưới tên gọi Định lý Fermat.*

Kết hợp các Mệnh đề 4.3, 4.5 và 4.6 ta thu được kết quả sau.

Định lý 4.9. *Các phần tử bất khả quy của $\mathbb{Z}[i]$ gồm*

(1) $1+i$ *và các phần tử liên kết của nó, nghĩa là* $\{\pm 1 \pm i\}$*;*
(2) *Các số nguyên tố* $p \equiv 3 \pmod 4$ *và các phần tử liên kết của nó, nghĩa là* $\{\pm p, \pm pi\}$*;*
(3) *Hai nhân tử bất khả quy* $a+bi, a-bi$ *trong phân tích ra tích các nhân tử bất khả quy của một số nguyên tố* $p \equiv 1 \pmod 4$ *và các phần tử liên kết của nó. Các số* (a,b) *có thể được đặc trưng như là bộ số nguyên duy nhất, chính xác tới dấu và tới thứ tự thỏa mãn* $a^2+b^2=p$.

Bài tập 8. *Hãy tìm tất cả các biểu diễn α dưới dạng $\alpha = \epsilon\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_s$ với ϵ là một phần tử khả nghịch, γ_i là các phần tử bất khả quy với α là các số nguyên Gauss sau đây*

(1) $1, i, 2, 3, 4$;
(2) $1+i, 3+2i$.

Bài tập 9. *Tìm ước chung lớn nhất và bội chung lớn nhất (sai khác một phần tử khả nghịch) của $5-36i$ và $22-20i$ bằng*

(1) Thuật toán Euclid;
(2) Phân tích ra tích các nhân tử bất khả quy.

Bài tập 10. *Cho một số nguyên dương n. Chứng minh rằng n có thể biểu diễn dưới dạng tổng của hai số chính phương khi và chỉ khi trong phân tích ra thừa số nguyên tố của n, các ước nguyên tố $\equiv 3$ đều có lũy thừa chẵn.*

Bài tập 11. *Cho a, b là hai số nguyên nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng mọi ước (nguyên dương) của a^2+b^2 đều có dạng c^2+d^2 với c, d là các số nguyên nguyên tố cùng nhau.*

(còn nữa)

Quy chế tổ chức và hoạt động của Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán

LTS: *Như chúng tôi đã đưa tin trong TTTH tập* 14 *số* 4*, Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán, tên viết tắt tiếng Anh là VIASM, đã được Thủ tướng chính phủ ký quyết định thành lập ngày* 23/12/2010*. Sau đây tòa soạn trích đăng một số mục trong Quy chế Tổ chức và Hoạt động của VIASM ban hành kèm theo quyết định trên. Toàn văn của Quy chế Tổ chức và Hoạt động của VIASM có thể xem tại trang web của Hội Toán học Việt Nam: http://www.vms.org.vn/*

Vị trí pháp lý.

Viện là tổ chức khoa học và công nghệ công lập đặc thù hoạt động trong lĩnh vực nghiên cứu toán học, trực thuộc Bộ Giáo dục và Đào tạo, có tư cách pháp nhân, con dấu, tài khoản riêng và trụ sở tại thành phố Hà Nội.

Viện có tên giao dịch tiếng Anh là: Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics (VIASM).

PTT. Nguyễn Thiện Nhân & GS. Ngô Bảo Châu trong buổi công bố QĐ thành lập VIASM

Chức năng, nhiệm vụ.

1. Chức năng

Viện có chức năng tạo môi trường học thuật đặc biệt cho các nhà khoa học, các giảng viên đại học thực hiện những ý tưởng, đề tài nghiên cứu toán học xuất sắc, có ý nghĩa quan trọng, ứng dụng cao và hỗ trợ công tác đào tạo nhân tài.

2. Nhiệm vụ:

- Tổ chức thực hiện các chương trình, nhiệm vụ, đề tài, dự án nghiên cứu khoa học và công nghệ do các cơ quan nhà nước giao và đặt hàng; chủ động đề xuất các chương trình, nhiệm vụ, đề tài, dự án nghiên cứu khoa học và công nghệ với Nhà nước theo khả năng và phù hợp với lĩnh vực chuyên môn của Viện và tự chịu trách nhiệm tổ chức thực hiện nhiệm vụ;

- Tạo điều kiện làm việc thuận lợi để nâng cao trình độ các nhà toán học trẻ của các trường đại học, viện nghiên cứu và các cơ sở ứng dụng Toán học trong cả nước;

- Tạo điều kiện làm việc thuận lợi để các nhà toán học Việt Nam có năng lực trở thành các chuyên gia quốc tế;

- Hỗ trợ thiết lập và tăng cường hợp tác nghiên cứu và đào tạo của các nhà toán học trong nước; hỗ trợ công tác đào tạo, bồi dưỡng nhân tài;

- Hỗ trợ và thúc đẩy hợp tác giữa Toán học và các ngành khoa học có liên quan như: Vật lý, Khoa học máy tính, Khoa học trái đất, Khoa học sự sống, Kinh tế . . . ;

- Thu hút các nhà toán học Việt Nam ở nước ngoài và các nhà toán học quốc tế tới tham gia nghiên cứu, đào tạo tại Việt Nam;

- Thúc đẩy hợp tác quốc tế trong lĩnh vực Toán học;

- Thực hiện các nhiệm vụ khác do Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo giao.

Cơ cấu tổ chức bộ máy.

Viện có Ban Giám đốc, Văn phòng và một số phòng chức năng khác. Ngoài ra, Viện có Hội đồng Khoa học và các nhóm nghiên cứu.

Biên chế của Viện từ 15 - 20 người, bao gồm công chức, viên chức cơ hữu, làm việc thường xuyên, đảm bảo các hoạt động thường nhật tại Viện, không bao gồm các cán bộ hợp đồng nghiên cứu, khách mời, cộng tác viên của Viện. Số biên chế này gồm: Các thành viên của Ban Giám đốc, Chánh Văn phòng, Kế toán trưởng, Thủ quỹ và một số nhân viên bộ phận hành chính - tổng hợp thuộc Văn phòng.

Cán bộ hợp đồng nghiên cứu .

1. Cán bộ hợp đồng nghiên cứu của Viện được làm việc trên cơ sở hợp đồng có thời hạn. Thời hạn hợp đồng tối thiểu là 02 tháng và thời hạn tối đa là 01 năm. Sau khi hết hạn hợp đồng có thể được gia hạn, nhưng không quá 03 lần liên tiếp.

2. Cán bộ hợp đồng nghiên cứu của Viện được tuyển chọn công khai, nghiêm ngặt trên cơ sở thành tích nghiên cứu Toán học. Trong trường hợp cán bộ được tuyển chọn đang công tác tại các cơ quan, đơn vị sự nghiệp, doanh nghiệp nhà nước thì phải có Quyết định biệt phái đi công tác của cơ quan, đơn vị chủ quản và vẫn được hưởng nguyên lương tại cơ quan, đơn vị chủ quản.

3. Cán bộ hợp đồng nghiên cứu có các nghĩa vụ và quyền lợi sau được ghi rõ trong hợp đồng:

- Thực hiện nghiên cứu theo đề tài của nhóm chuyên môn đã được duyệt;

- Tích cực tham gia các hoạt động khoa học chung của Viện;

- Khi công bố kết quả nghiên cứu được thực hiện toàn bộ hay một phần trong thời gian tại Viện, phải ghi rõ sự tài trợ;

- Được hưởng kinh phí tài trợ nghiên cứu;

- Sau khi kết thúc hợp đồng tại Viện, nếu có điều kiện, được Viện tiếp tục cung cấp thông tin và tạo điều kiện sử dụng các phương tiện của Viện vào mục đích nghiên cứu, giảng dạy và ứng dụng Toán học của mình;

- Được Viện bảo hộ quyền sở hữu trí tuệ và quyền tác giả đối với các kết quả nghiên cứu đã được công bố tại Viện.

Khách mời.

1. Là những nhà khoa học có trình độ cao (trong và ngoài nước), được Ban Giám đốc trực tiếp mời đến trao đổi hoặc cộng tác với một nhóm nghiên cứu trong một thời gian nhất định, đến giảng bài hoặc đọc báo cáo khoa học.

2. Khách mời có thể được trả chi phí đi lại, tiền ăn ở và một phần thù lao theo thỏa thuận giữa hai bên. Mức chi trả căn cứ vào quy chế chi tiêu nội bộ và khả năng tài chính của Viện.

Cộng tác viên.

Cộng tác viên là những nhà khoa học Việt Nam có thành tích nghiên cứu xuất sắc và có hướng nghiên cứu trùng với các hướng được tiến hành tại Viện. Cộng tác viên được tạo điều kiện sử dụng các cơ sở vật chất của Viện, và có thể được nhận một khoản thù lao theo hợp đồng thỏa thuận giữa hai bên căn cứ theo khối lượng và hiệu quả công việc. Mức chi trả căn cứ vào quy chế chi tiêu nội bộ và khả năng tài chính của Viện.

Tin tức hội viên và hoạt động toán học

LTS: *Để tăng cường sự hiểu biết lẫn nhau trong cộng đồng các nhà toán học Việt Nam, Tòa soạn mong nhận được nhiều thông tin từ các hội viên HTHVN về chính bản thân mình, cơ quan mình hoặc đồng nghiệp của mình.*

Hội nghị Khoa học quốc tế và Toán ứng dụng đã diễn ra ngày 14/03/2011 tại trường Đại học Sài Gòn. Tham dự Hội nghị có các nhà toán học đến từ Đức, Pháp, Mỹ, Việt Nam. Các báo cáo mời của hội nghị đề cập đến những vấn đề mới nhất trong Giải tích, Cơ học, Toán kinh tế, Toán tài chính và ứng dụng. Hội nghị do trường Đại học Sài gòn với sự kết hợp của Hội toán học Tp. Hồ Chí Minh tổ chức nhân dịp kỷ niệm sinh nhật lần thứ 85 của NGND. GS. Đặng Đình Áng. Trước đó, vào chiều 13/3, tại Giảng đường I trường Đại học Khoa học tự nhiên Tp. Hồ Chí Minh lễ mừng thượng thọ GS. Đặng Đình Áng cũng đã được tổ chức trang trọng và đầm ấm với sự tham gia của bạn bè, đồng nghiệp và các thế hệ học trò.

Trong khuôn khổ dự án World Bank "Xây dựng toán học tính toán ở Tp. HCM", trong dịp cuối tháng 2 đầu tháng 3, các giáo sư Vladimir Savchenko (ĐH Tokyo, Nhật) và John Borkowsky (ĐH Montana, Mỹ) đã đọc bài giảng về Nhập môn xử lý hình học và Thống kê đại số và thiết kế thí nghiệm tại trường ĐH Bách khoa Tp. Hồ Chí Minh dành cho các học viên cao học và sinh viên năm cuối của các trường thuộc ĐH QG Tp. Hồ Chí Minh. Trong tháng 4, GS. John Borkowsky sẽ tiếp tục các bài giảng của mình.

Seminar "Toán và các vấn đề ứng dụng" đã được thành lập bởi nhóm các giảng viên Toán tại các trường nhóm ngành kỹ thuật (ĐH Kinh tế luật, ĐH Ngân hàng, ĐH CNTT, Đại học Công nghệ,...). Seminar được tổ chức một tháng một lần tại trường Đại học Kinh tế luật thuộc ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh. Buổi sinh hoạt đầu tiên diễn ra vào ngày 28/1 với báo cáo của TS. Dương Tông Đảm (ĐH CNTT, ĐHQG Tp. HCM) "Về bài toán định giá tài sản rủi ro trên thị trường chứng khoán". Tại buổi sinh hoạt thứ hai, với sự tham dự của 50 sinh viên đến từ trường Đại học Cần Thơ, TS. Dương Tông Đảm, TS. Lê Sĩ Đồng (ĐH Ngân hàng Tp. HCM), TS. Trần Nam Dũng (ĐH KHTN, ĐHQG Tp. HCM) đã giới thiệu những ứng dụng của toán học trong cơ học, trong kinh tế và trong thể thao. Buổi sinh hoạt tiếp theo của seminar dự kiến vào ngày 28/04/2011 với chủ đề "Thống kê trong kinh tế".

Kỷ niệm 35 năm thành lập trường CĐSP Nha Trang, trường CĐSP Nha Trang tổ chức Hội thảo Khoa học tự nhiên lần II, ngày 31/3/2011. Các báo cáo được trình bày tại các phiên toàn thể và các tiểu ban Toán-Tin học, Vật lý-Hóa học-Sinh học và tiểu ban Khoa học Giáo dục và Ứng dụng.

Trách nhiệm mới:

GS. Ngô Bảo Châu đã được Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo bổ nhiệm là Giám đốc khoa học của Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán từ ngày 09/03/2011. GS. N. B. Châu sẽ giữ chức vụ này trong thời gian 3 năm và làm việc kiêm nhiệm tại Viện song song với công việc hiện nay tại ĐH Chicago (Mỹ).

Tin buồn.

GS. TS. Nguyễn Thế Hoàn, nguyên giảng viên cao cấp bộ môn Giải tích, khoa Toán-Cơ-Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội, sau một thời gian ngắn lâm bệnh nặng, mặc dù đã được gia đình và các bác sỹ tận tình cứu chữa, đã qua đời vào 01h30 ngày 17/03/2011, hưởng thọ 73 tuổi.

GEOMETRY CONFERENCE

Geometrical methods in Dynamics and Topology

Hanoi National University of Education, Hanoi, 18 – 22/04/2011

This is an international mathematical conference on the occasion of the 60th anniversary of Hanoi National University of Education.

Main speakers:

Marc Chaperon (Paris VII)
Alain Chenciner (Observatoire de Paris--IMCCE)
Jesus Gonzalo (Madrid)
Basak Gurel (Vanderbilt)
Mark Hamilton* (Mount Allison)
Boris Khesin* (Toronto)
Janko Latschev (Hamburg University)
Eva Miranda (Barcelona)
Nguyen Tien Zung (Toulouse)
Ricardo Perez Marco (Paris XIII)
Dietmar Salamon (ETH-Zürich)
Sheila Sandon (Nantes)
Michael Usher (University of Georgia)
Le Hong Van (Praha)
Alberto Verjovsky (Cuernavaca)
Dmitri Zaitsev (Dublin)

(to be completed)

Organizers:

Viktor V. Ginzburg (Santa Cruz, USA)
Eva Miranda (UPC, Barcelona, Spain)
Nguyen Tien Zung (Toulouse, France)
Do Duc Thai (HNUE, Hanoi; main local organizer)

Preliminary program:

18 one-hour talks;
2 mini-courses (designed for students):
- Symmetries in n-body problems (by Alain Chenciner)
- Entropy in physics and mathematics (by Nguyen Tien Zung)

Financial support:

Hanoi National University of Education
Hanoi Institute of Mathematics
Vietnam Science Foundation (NAFOSTED)
European Commission Research Conferences Program
Université Paul Sabatier, Toulouse

Phiếu đăng ký tham dự

Hội nghị Toán học quốc tế

"Các phương pháp hình học trong hệ động lực và tôpô"

Đại học Sư phạm Hà Nội, 18 – 22/04/2011

Họ và tên: Nam/Nữ:
Học hàm, học vị:
Cơ quan:
Địa chỉ:
Điện thoại:
Email:
Phiếu đăng ký trên được gửi qua e-mail theo địa chỉ sau:
ducthoan.pham@gmail.com

THÔNG TIN TOÁN HỌC, Tập 15 số 1 (2011)

Mục lục