



(Đề thi có 02 trang)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng B

Bài B.1. Cho $(u_n)_{n=1}^\infty$ là dãy số được xác định bởi các điều kiện

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - 1 \quad \forall n \geq 1.$$

1. (2 điểm) Chứng minh rằng

$$-1 < u_n < 0 \quad \forall n \geq 2.$$

2. (4 điểm) Chứng minh rằng dãy số $(u_n)_{n=1}^\infty$ có giới hạn và giới hạn của nó là $1 - \sqrt{3}$.

Bài B.2. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số được xác định theo công thức

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \leq 0, \\ a^x + x^a & \text{nếu } x > 0, \end{cases}$$

trong đó $a > 0$ là một hằng số thực. Chứng minh rằng:

1. (3 điểm) f là một hàm số liên tục trên \mathbb{R} .

2. (5 điểm) f không khả vi tại 0.

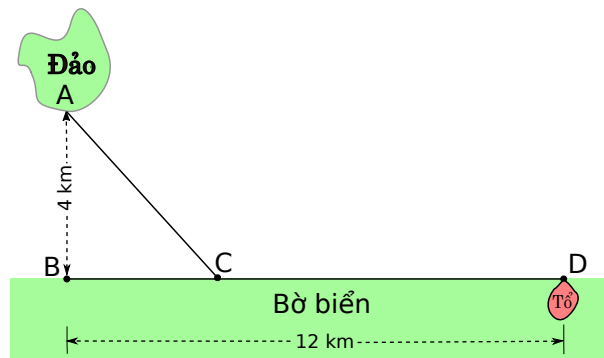
Bài B.3. (5 điểm) Tính

$$\int_0^3 \sqrt{2 + \sqrt{1+x}} \, dx.$$

Bài B.4. Theo các nhà điều cầm học, khi bay ngang qua mặt nước chim phải tiêu tốn nhiều năng lượng hơn so với khi bay ngang qua đất liền và, theo bản năng, chim luôn chọn đường bay ít tiêu tốn năng lượng nhất.

Một con chim cất cánh từ đảo A cách bờ biển 4 km. Hãy xem A như là một điểm, bờ biển là một đường thẳng; và gọi B là hình chiếu vuông góc của A lên bờ biển. Quan sát cho thấy: trước tiên chim bay đến một điểm C trên bờ biển, sau đó mới bay dọc theo bờ biển để đến tổ D của nó. Giả sử B và D cách nhau 12 km. Đặt

$$r = W/L;$$



trong đó, W và L lần lượt là năng lượng tiêu tốn mỗi kilômét bay khi chim bay ngang qua mặt nước và khi chim bay ngang qua đất liền.

1. (2 điểm) Hãy xác định vị trí của C nếu $r = \sqrt{2}$.
2. (1 điểm) Giả sử $BC = 3$ km. Tính r .
3. (3 điểm) Vị trí của C thay đổi như thế nào khi r biến thiên trong khoảng $(1, \infty)$?

Bài B.5. (5 điểm) Cho trước số thực $\alpha \geq 1$. Chứng minh rằng tồn tại số thực $C > 0$ sao cho với mọi số thực $x > 0$ ta đều có

$$|(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x| \leq Cx^{\min\{2, \alpha\}} + Cx^\alpha.$$

Kết luận trên còn đúng hay không nếu $0 < \alpha < 1$?

HẾT

Ghi chú: Thí sinh **không** được phép sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi **không** cần giải thích gì thêm.