HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.1 — 6 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
	1	1	CHỨNG MINH TÍNH CHẤT $-1 < u_n < 0$ KHI $n \geqslant 2$	
			Do $u_1 = 1$ ta tính được $u_2 = -1/2 \in (-1, 0)$.	
			Giả sử ta đã có $-1 < u_n < 0$ với $n \geqslant 2$ nào đó. Lúc này, $$-1 < \frac{{u_n}^2}{2} - 1 < \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$ tức là $-1 < u_{n+1} < 0$.	
			Theo nguyên lý quy nạp, $-1 < u_n < 0$ với mọi $n \geqslant 2$.	
		2	CHỨNG MINH $\lvert u_n - (1-\sqrt{3})\rvert \leqslant (\sqrt{3}/2)^{n-2}\lvert u_2 - (1-\sqrt{3})\rvert$ khi $n \geqslant 2$	
			Ký hiệu $a = 1 - \sqrt{3}$. Ta có $$\lvert u_{n+1} - a\rvert = \left\lvert \frac{{u_n}^2}{2} - 1 - \left(\frac{a^2}{2} - 1\right)\right\rvert = \frac{1}{2}\lvert u_n - a\rvert\lvert u_n + a\rvert$$ với mọi $n \geqslant 1$.	
			Do $-1 < u_n < 0$ với mọi $n \geqslant 2$, ta cũng có $$-\sqrt{3} = -1 + (1-\sqrt{3}) < u_n + a < a < 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\lvert u_n + a\rvert < \frac{\sqrt{3}}{2}$$ với mọi $n \geqslant 2$.	
			Vậy ta có đánh giá $$\lvert u_{n+1} - a\rvert \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\lvert u_n - a\rvert \leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\lvert u_2 - a\rvert$$ với mọi $n \geqslant 2$.	
		3	KẾT LUẬN	
			Do $\sqrt{3}/2 < 1$ nên $$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \to 0$$ khi $n \to \infty$.	
			Suy ra $\lvert u_n - a\rvert \to 0$ khi $n \to \infty$; tức là, dãy (u_n) hội tụ về $a = 1 - \sqrt{3}$.	

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.2 — 8 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
1			**f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$**	**3,00**
	1	1	XÉT TÍNH LIÊN TỤC TRÊN MIỀN $x \neq 0$	
			Khi $x < 0$ thì $f(x)$ là một hàm hằng nên nó liên tục; khi $x > 0$ thì $f(x) = a^x + x^a$ là tổng của hai hàm liên tục nên cũng liên tục.	
		2	XÉT TÍNH LIÊN TỤC TẠI $x = 0$	
			Xét tính liên tục trái tại $x = 0$. Rõ ràng $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1 = f(0).$$	
			Xét tính liên tục phải tại $x = 0$. Rõ ràng $$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} a^x + \lim_{x \to 0+} x^a = a^0 + 0 = 1 = f(0).$$ Vậy $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.	
		3	KẾT LUẬN	
			Vậy f liên tục trên $\mathbb{R}$.	
2			**f không khả vi tại 0**	**5,00**
	1	1	ĐẠO HÀM BÊN TRÁI	
			Theo định nghĩa, $$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - 1}{x} = 0.$$	
		2	ĐẠO HÀM BÊN PHẢI	
			Ta cũng có $$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{a^x + x^a - 1}{x}.$$	
			Sử dụng quy tắc l'Hôpital ta được $$\lim_{x \to 0+} \frac{a^x + x^a - 1}{x} = \lim_{x \to 0+} \left(a^x (\ln a) + a x^{a-1}\right) = \begin{cases} \ln a & \text{nếu } a > 1, \\ 1 & \text{nếu } a = 1, \\ \infty & \text{nếu } a < 1. \end{cases}$$	
		3	KẾT LUẬN	
			Do $f'_-(0) = 0 < f'_+(0)$ nên hàm f không khả vi tại 0.	

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM — KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.3 — 5 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
	1	1	ĐỔI BIẾN	
			Ta sử dụng phép đổi biến $$\sqrt{2+\sqrt{1+x}} = y.$$ Khoảng biến thiên tương ứng của y là $$\sqrt{3} \leqslant y \leqslant 2.$$ Giải x theo y ta được $$x = y^4 - 4y^2 + 3.$$	
		2	XÁC ĐỊNH VI PHÂN dx THEO BIẾN MỚI	
			Từ công thức $x = y^4 - 4y^2 + 3$ ta có $$dx = 4(y^3 - 2y)dy.$$	
		3	CHUYỂN TÍCH PHÂN TỪ BIẾN CŨ SANG BIẾN MỚI	
			Ta có $$\int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{1+x}}dx = 4\int_{\sqrt{3}}^2 (y^4 - 2y^2)dy$$	
		4	KẾT LUẬN	
			Rõ ràng $$\int_{\sqrt{3}}^2 (y^4 - 2y^2)dy = \Big(\frac{y^5}{5} - \frac{2y^3}{3}\Big)\Big\|_{\sqrt{3}}^2 = \frac{32-9\sqrt{3}}{5} - \frac{16-6\sqrt{3}}{3}.$$ Vậy $$\int_0^3 \sqrt{2+\sqrt{1+x}}dx = \frac{64}{15} + \frac{4\sqrt{3}}{5}.$$	

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

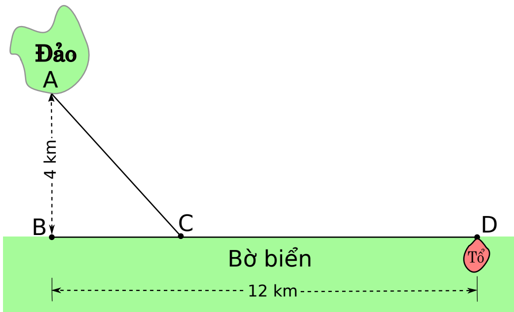
KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.4 — 6 điểm



Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
1			**Xác định vị trí của C nếu $r = \sqrt{2}$.**	**2,00**
	1	1	KHẢO SÁT NĂNG LƯỢNG TIÊU TỐN	
			Để tiện cho các tính toán về sau, ta giả sử $BC = x$ km với $x \in [0, 12]$. Khi đó năng lượng tiêu tốn suốt hành trình bay của chim (theo quan sát) là $$\sqrt{16+x^2}W + (12-x)L = Lf(x),$$ với $$f(x) := r\sqrt{16+x^2} + 12 - x$$ khả vi liên tục trên $[0, 12]$ (và $r = \sqrt{2}$).	
			Khảo sát hàm f ta có: $$f'(x) = \frac{rx}{\sqrt{16+x^2}} - 1;$$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 := \dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}} = 4$ (vì $r = \sqrt{2}$).	
		2	CỰC TIỂU HÓA VÀ KẾT LUẬN	
			$f' < 0$ trên $(0, 4)$ nên f giảm ngặt trên $[0, 4]$; $f' > 0$ trên $(4, 12)$ nên f tăng ngặt trên $[4, 12]$.	
			Vậy, $\min_{x\in[0,12]} f(x)$ chỉ đạt tại $x = 4$; tức là, $BC = 4$ km.	
2			**Giả sử $BC = 3$ km. Tính r.**	**1,00**
	1	1	$x_0 = 3$ LÀ MỘT ĐIỂM TỚI HẠN CỦA f	
			Theo giả thiết ở đầu bài, đường bay chim chọn làm cho $$f(3) = \min_{x\in[0,12]} f(x)$$ nên $f'(3) = 0$.	
		2	KẾT LUẬN	

			Trong lời giải Ý 1, ta đã thấy: điểm tới hạn duy nhất của f là $x_0 := \dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}}$; nên $$\frac{4}{\sqrt{r^2-1}} = 3 \Leftrightarrow r = 5/3.$$	
3			**Vị trí của C thay đổi như thế nào khi r biến thiên trong khoảng $(1, \infty)$?**	**3,00**
	1	1	TRƯỜNG HỢP $x_0 \in (0, 12)$	
			Dễ thấy: $$x_0 := \frac{4}{\sqrt{r^2-1}} \in (0, 12) \Leftrightarrow r > \frac{\sqrt{10}}{3}.$$	
			Với $r > \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ thì $f' < 0$ trên $(0, x_0)$ nên f giảm ngặt trên $[0, x_0]$ và $f' > 0$ trên $(x_0, 12)$ nên f tăng ngặt trên $[x_0, 12]$; vậy, $\min_{x\in[0,12]} f(x)$ chỉ đạt tại x_0; tức là, $BC = \dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}} \in (0, 12)$.	
			Lúc này, ta thấy: $BC = \dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}} \downarrow 0$ (nên $C \to B$) khi $r \uparrow \infty$; $BC \uparrow 12$ nên $C \to D$ khi $r \downarrow \dfrac{\sqrt{10}}{3}$.	
		2	TRƯỜNG HỢP $x_0 \notin (0, 12)$	
			Với $1 < r \leqslant \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ thì $f' < 0$ trên $(0, 12)$ nên f giảm ngặt trên $[0, 12]$; vậy, $\min_{x\in[0,12]} f(x)$ chỉ đạt tại $x = 12$; tức là, $BC = 12$ (nói cách khác, $C \equiv D$).	

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM — KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.5 — 5 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
	1	1	XÉT TRƯỜNG HỢP $\alpha \geqslant 2$	
			Bất đẳng thức ta cần có trở thành $$\left|(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x\right| \leqslant Cx^2 + Cx^\alpha.$$	
			Dùng công thức khai triển Taylor, ta thấy $$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + O(1)t^2 \quad \forall t \in [0,1]$$ trong đó $O(1)$ chỉ một đại lượng bị chặn bởi một hằng số không phụ thuộc vào t trên $[0,1]$. **Ghi chú**: *Công thức trên đúng cho α bất kỳ. Cũng có thể thu được công thức này nhờ tính liên tục của $[(1+t)^\alpha - 1 - \alpha t]/t^2$ theo $t \in (0,1]$ và sự tồn tại giới hạn hữu hạn của $[(1+t)^\alpha - 1 - \alpha t]/t^2$ khi $t \to 0^+$ (quy tắc l'Hôpital).*	
			Sử dụng công thức trên ta thu được $$\left|(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x\right| \leqslant Cx^2$$ nếu $x \leqslant 1$.	
			Trong trường hợp $x \geqslant 1$ ta dễ dàng ước lượng $$\left|(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x\right| \leqslant 2^\alpha x^\alpha + x^\alpha + \alpha x^\alpha = (1+\alpha+2^\alpha)x^\alpha.$$ Thật ra, ước lượng này đúng khi $x \geqslant 1$ với $\alpha \geqslant 1$ nói chung. Vậy tồn tại C đủ lớn để bất đẳng thức cần có là đúng với mọi $x > 0$.	
		2	XÉT TRƯỜNG HỢP $1 \leqslant \alpha < 2$	
			Bất đẳng thức cần có trở thành $$\left|(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x\right| \leqslant Cx^\alpha.$$	
			Ta vẫn có đánh giá $$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + O(1)t^2 \quad \forall t \in [0,1]$$ trong đó $O(1)$ chỉ một đại lượng bị chặn bởi một hằng số không phụ thuộc vào t trên $[0,1]$.	
			Trong trường hợp $x \leqslant 1$ ta tiếp tục sử dụng công thức đánh giá ở trên, với chú ý $x^2 \leqslant x^\alpha$, để thu được $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + O(1)x^2 = 1 + \alpha x + O(1)x^\alpha.$$ Suy ra đpcm.	

			Trong trường hợp $x \geqslant 1$ ta dễ dàng ước lượng $$\begin{aligned}\left\|(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x\right\| &\leqslant \max\left\{2^\alpha x^\alpha, \alpha x + 1\right\}\\ &\leqslant \max\left\{2^\alpha, \alpha + 1\right\} x^\alpha.\end{aligned}$$ **<u>Ghi chú</u>**: *Để thu được ước lượng trên thì điều kiện $\alpha \geqslant 1$ là quan trọng, do ta muốn có $x \leqslant x^\alpha$ với $x \geqslant 1$.*	
		3	XÉT TRƯỜNG HỢP $0 < \alpha < 1$	
			Trong trường hợp này không thể tồn tại số thực $C > 0$ để bất đẳng thức $$\left\|(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x\right\| \leqslant C x^\alpha$$ đúng với mọi $x > 0$.	
			Thật vậy bằng phản chứng giả sử tồn tại một hằng số $C > 0$ có tính chất như trên. Chia hai vế cho số dương x^α ta đi đến $$\left\|\left(1+\frac{1}{x}\right)^\alpha - \frac{1}{x^\alpha} - \alpha x^{1-\alpha}\right\| \leqslant C.$$ Lấy giới hạn khi $x \to \infty$ ta gặp phải mâu thuẫn, do vế trái tiến ra vô cùng!	