HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM   KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

(Đề thi có 02 trang)

Bảng A

Bài A.1. (*6 điểm*) Cho $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi các điều kiện

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}{u_n}^2 - 1 \quad \forall n \geqslant 1.$$

Chứng minh rằng dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Bài A.2. (*6 điểm*) Cho $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ là một hàm số khả vi liên tục. Chứng minh rằng

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{(f(x))^{2017}} \leqslant 0.$$

Kết luận trên còn đúng hay không nếu ta thay số 2017 bởi số 1?

Bài A.3. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

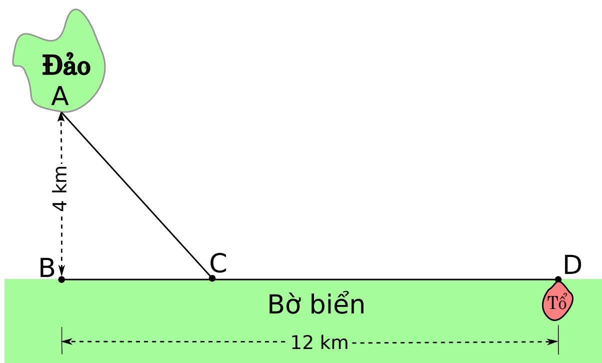
1. (*2 điểm*) Tìm một ví dụ về hàm số liên tục f thỏa mãn cả hai điều kiện trên.
2. (*4 điểm*) Chứng minh rằng tồn tại một khoảng mở $(a, b) \subset (0, 1)$, không rỗng, sao cho

$$|f(x)| > 4 \quad \forall x \in (a, b).$$

Bài A.4. Theo các nhà điểu cầm học, khi bay ngang qua mặt nước chim phải tiêu tốn nhiều năng lượng hơn so với khi bay ngang qua đất liền và, theo bản năng, chim luôn chọn đường bay ít tiêu tốn năng lượng nhất.

Một con chim cất cánh từ đảo A cách bờ biển 4 km. Hãy xem A như là một điểm, bờ biển là một đường thẳng; và gọi B là hình chiếu vuông góc của A lên bờ biển. Quan sát cho thấy: trước tiên chim bay đến một điểm C trên bờ biển, sau đó mới bay dọc theo bờ biển để đến tổ D của nó. Giả sử B và D cách nhau 12 km. Đặt

$$r = W/L;$$



trong đó, W và L lần lượt là năng lượng tiêu tốn mỗi kilômét bay khi chim bay ngang qua mặt nước và khi chim bay ngang qua đất liền.

1. (*2 điểm*) Hãy xác định vị trí của C nếu $r = \sqrt{2}$.
2. (*1 điểm*) Giả sử $BC = 3$ km. Tính r.
3. (*3 điểm*) Vị trí của C thay đổi như thế nào khi r biến thiên trong khoảng $(1, \infty)$?
4. (*1 điểm*) Với những giá trị nào của r thì chim bay thẳng (từ A) đến tổ D? Có khả năng nào để chim bay đến B trước rồi mới bay về tổ D không?

Bài A.5. (*5 điểm*) Cho trước số thực $\alpha \geqslant 1$. Chứng minh rằng tồn tại số thực $C > 0$ sao cho với mọi cặp số thực $x > 0$, $y > 0$, ta đều có

$$\left|(x+y)^\alpha - \alpha x^{\alpha-1} y - x^\alpha\right| \leqslant C x^{\max\{0,\alpha-2\}} y^{\min\{2,\alpha\}} + C y^\alpha.$$

Kết luận trên còn đúng hay không nếu $0 < \alpha < 1$?

HẾT

<u>Ghi chú</u>: *Thí sinh **không** được phép sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi **không** cần giải thích gì thêm.*