ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.1 — 6 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
	1	1	CHỨNG MINH TÍNH CHẤT $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$ KHI $n \geqslant 2$	
			Do $u_1 = 1$ ta tính được $u_2 = -1/2 \in (-1, 0)$.	
			Giả sử ta đã có $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$ với $n \geqslant 2$ nào đó. Lúc này, $$-1 \leqslant \frac{{u_n}^2}{2} - 1 \leqslant \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$ tức là $-1 \leqslant u_{n+1} < 0$.	
			Kết luận: $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$ với mọi $n \geqslant 2$ (từ đó, nếu dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn thì giới hạn không dương).	
		2	CHỨNG MINH $\lvert u_n - (1-\sqrt{3})\rvert \leqslant (\sqrt{3}/2)^{n-2}\lvert u_2 - (1-\sqrt{3})\rvert$ khi $n \geqslant 2$	
			Ký hiệu $a = 1 - \sqrt{3}$. Khi đó a là nghiệm âm của phương trình $a = a^2/2 - 1$.	
			Ta có $$\lvert u_{n+1} - a\rvert = \left\lvert \frac{{u_n}^2}{2} - 1 - \left(\frac{a^2}{2} - 1\right)\right\rvert = \frac{1}{2}\lvert u_n - a\rvert\lvert u_n + a\rvert$$ với mọi $n \geqslant 1$.	
			Do $-1 \leqslant u_n \leqslant 0$ với mọi $n \geqslant 2$, ta có $$-\sqrt{3} = -1 + (1-\sqrt{3}) \leqslant u_n + a \leqslant a < 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\lvert u_n + a\rvert < \frac{\sqrt{3}}{2}$$ với mọi $n \geqslant 2$.	
			Vậy ta có đánh giá $$\lvert u_{n+1} - a\rvert \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\lvert u_n - a\rvert \leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\lvert u_2 - a\rvert$$ với mọi $n \geqslant 2$.	
		3	KẾT LUẬN	
			Do $\sqrt{3}/2 < 1$ nên $$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \to 0$$ khi $n \to \infty$.	
			Suy ra: $\lvert u_{n+1} - a\rvert \to 0$ khi $n \to \infty$; tức là, dãy (u_n) hội tụ về $a = 1 - \sqrt{3}$.	

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.2 — 6 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
	1	1	CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG	
			Giả sử phản chứng: tồn tại $\delta > 0$ và $x_0 > 0$ sao cho $$\frac{f'(x)}{(f(x))^{2017}} > \delta$$ với mọi $x \geqslant x_0$.	
			Tích phân hai vế bất đẳng thức trên trên đoạn $[x_0, x]$ ta được $$\delta(x - x_0) < \int_{x_0}^{x} \frac{f'(s)}{(f(s))^{2017}} ds = \frac{1}{2016}\Big(\frac{1}{f(x_0)^{2016}} - \frac{1}{f(x)^{2016}}\Big)$$ với mọi $x \geqslant x_0$.	
			Từ đó ta thu được đánh giá $$\frac{1}{f(x_0)^{2016}} > 2016\,\delta\,(x - x_0)$$ với mọi $x \geqslant x_0$. Cho $x \to \infty$ ta gặp mâu thuẫn; suy ra bất đẳng thức cần chứng minh!	
		2	CHỈ RA PHẢN VÍ DỤ KHI THAY **2017** BỞI **1**	
			Kết luận trên không còn đúng nếu thay số **2017** bởi **1**. Chẳng hạn có thể lấy ví dụ với hàm $f(x) = \exp(x^2)$.	
			Thật vậy trong trường hợp này $$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x\exp(x^2)}{\exp(x^2)} = 2x.$$ Vậy $$\liminf_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \infty.$$	

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.3 — 6 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
1			**Tìm một hàm liên tục f thỏa mãn cả hai điều kiện tích phân**	**2,00**
	1	1	XÁC ĐỊNH DẠNG CỦA HÀM	
			Ta sẽ tìm hàm f dưới dạng $f(x) = cx + d$.	
		2	LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHO c VÀ d	
			Ta có $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{2} + d = 0$ và $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{4} + \frac{d}{3} = 1.$	
		3	GIẢI HỆ VÀ KẾT LUẬN	
			Giải hệ (theo c và d) thu được $c = 12$, $d = -6$. Vậy, một ví dụ về hàm liên tục f thỏa mãn các điều kiện là $f(x) = 12x - 6$.	
2			**Chỉ ra sự tồn tại của $\emptyset \neq (a, b) \subset [0, 1]$**	**4,00**
	1	1	SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG	
			Vì f liên tục nên giả sử phản chứng sẽ đưa đến bất đẳng thức $\lvert f(x)\rvert \leqslant 4$ với mọi $x \in [0, 1]$. Khi đó $\displaystyle 1 = \int_0^1 f(x)\Big(x^2 - \frac{1}{4}\Big)dx = \int_0^{1/2} f(x)\Big(x^2 - \frac{1}{4}\Big)dx + \int_{1/2}^1 f(x)\Big(x^2 - \frac{1}{4}\Big)dx \leqslant 4\int_0^{1/2} \Big(\frac{1}{4} - x^2\Big)dx + 4\int_{1/2}^1 \Big(x^2 - \frac{1}{4}\Big)dx = 4 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{6} = 1.$	
		2	CHỈ RA ĐIỀU VÔ LÝ	
			Vậy, dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra. Do f liên tục trên $[0, 1]$, nên $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{nếu } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 4 & \text{nếu } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$ Tuy nhiên trong trường hợp này hàm f không liên tục tại $1/2$.	

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

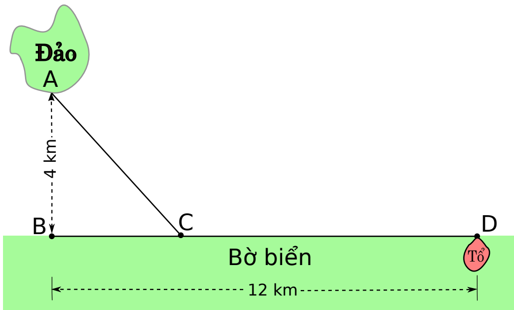
KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.4 — 7 điểm



Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
1			**Xác định vị trí của C nếu $r = \sqrt{2}$.**	**2,00**
	1	1	KHẢO SÁT NĂNG LƯỢNG TIÊU TỐN	
			Để tiện cho các tính toán về sau, ta giả sử $BC = x$ km với $x \in [0, 12]$. Khi đó năng lượng tiêu tốn suốt hành trình bay của chim (theo quan sát) là $$\sqrt{16 + x^2}W + (12 - x)L = Lf(x),$$ với $$f(x) := r\sqrt{16 + x^2} + 12 - x$$ khả vi liên tục trên $[0, 12]$ (và $r = \sqrt{2}$).	
			Khảo sát hàm f ta có: $$f'(x) = \frac{rx}{\sqrt{16 + x^2}} - 1;$$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 := \dfrac{4}{\sqrt{r^2 - 1}} = 4$ (vì $r = \sqrt{2}$).	
		2	CỰC TIỂU HÓA VÀ KẾT LUẬN	
			$f' < 0$ trên $(0, 4)$ nên f giảm ngặt trên $[0, 4]$; $f' > 0$ trên $(4, 12)$ nên f tăng ngặt trên $[4, 12]$.	
			Vậy, $\min_{x \in [0,12]} f(x)$ chỉ đạt tại $x = 4$; tức là, $BC = 4$ km.	
2			**Giả sử $BC = 3$ km. Tính r.**	**1,00**
	1	1	$x_0 = 3$ LÀ MỘT ĐIỂM TỚI HẠN CỦA f	
			Theo giả thiết ở đầu bài, đường bay chim chọn làm cho $$f(3) = \min_{x \in [0,12]} f(x)$$ nên $f'(3) = 0$.	
		2	KẾT LUẬN	

			Trong lời giải Ý 1, ta đã thấy: điểm tới hạn duy nhất của f là $x_0 := \dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}}$; nên $\dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}} = 3 \Leftrightarrow r = 5/3.$	
3			**Vị trí của C thay đổi như thế nào khi r biến thiên trong khoảng $(1, \infty)$?**	**3,00**
	1	1	TRƯỜNG HỢP $x_0 \in (0, 12)$	
			Dễ thấy: $x_0 := \dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}} \in (0, 12) \Leftrightarrow r > \dfrac{\sqrt{10}}{3}.$	
			Với $r > \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ thì $f' < 0$ trên $(0, x_0)$ nên f giảm ngặt trên $[0, x_0]$ và $f' > 0$ trên $(x_0, 12)$ nên f tăng ngặt trên $[x_0, 12]$; vậy, $\min_{x\in[0,12]} f(x)$ chỉ đạt tại x_0; tức là, $BC = \dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}} \in (0, 12)$.	
			Lúc này, ta thấy: $BC = \dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}} \downarrow 0$ (nên $C \to B$) khi $r \uparrow \infty$; $BC \uparrow 12$ nên $C \to D$ khi $r \downarrow \dfrac{\sqrt{10}}{3}$.	
		2	TRƯỜNG HỢP $x_0 \notin (0, 12)$	
			Với $1 < r \leqslant \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ thì $f' < 0$ trên $(0, 12)$ nên f giảm ngặt trên $[0, 12]$; vậy, $\min_{x\in[0,12]} f(x)$ chỉ đạt tại $x = 12$; tức là, $BC = 12$ (nói cách khác, $C \equiv D$).	
4			**Với những giá trị nào của r thì chim bay thẳng đến tổ? Có khả năng nào để chim bay đến B trước rồi mới bay về tổ không?**	**1,00**
	1	1	CHIM BAY THẲNG ĐẾN TỔ	
			Chim bay thẳng về tổ khi và chỉ khi $C \equiv D$. Theo khảo sát ở Ý 3, điều này xảy ra nếu và chỉ nếu $1 < r \leqslant \dfrac{\sqrt{10}}{3}$.	
		2	CHIM BAY ĐẾN B RỒI MỚI VỀ TỔ	
			Luôn có: $BC = x_0 > 0 \Rightarrow C \neq B$. Vậy, chim không bao giờ bay đến B trước rồi mới bay về tổ.	

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.5 — 5 điểm

Ý	Cách	Bước	Nội dung	Điểm
	1	1	XÉT TRƯỜNG HỢP $\alpha \geqslant 2$	
			Bất đẳng thức ta cần có trở thành $$\left\|(x+y)^\alpha - \alpha x^{\alpha-1}y - x^\alpha\right\| \leqslant Cx^{\alpha-2}y^2 + Cy^\alpha.$$	
			Dùng công thức khai triển Taylor, ta thấy $$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + O(1)t^2 \quad \forall t \in [0,1]$$ trong đó $O(1)$ chỉ một đại lượng bị chặn bởi một hằng số không phụ thuộc vào t trên $[0,1]$. **<u>Ghi chú</u>**: *Công thức trên đúng cho α bất kỳ. Cũng có thể thu được công thức này nhờ tính liên tục của $[(1+t)^\alpha - 1 - \alpha t]/t^2$ theo $t \in (0,1]$ và sự tồn tại giới hạn hữu hạn của $[(1+t)^\alpha - 1 - \alpha t]/t^2$ khi $t \to 0^+$ (quy tắc l'Hôpital).*	
			Sử dụng công thức trên ta thu được $$(x+y)^\alpha = x^\alpha\left(1+\frac{y}{x}\right)^\alpha = x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1}y + O(1)x^\alpha\left(\frac{y}{x}\right)^2$$ nếu $y/x \leqslant 1$. Vậy $$\left\|(x+y)^\alpha - \alpha x^{\alpha-1}y - x^\alpha\right\| \leqslant Cx^{\alpha-2}y^2$$ nếu $y/x \leqslant 1$.	
			Trong trường hợp $y/x \geqslant 1$ ta dễ dàng ước lượng $$\left\|(x+y)^\alpha - \alpha x^{\alpha-1}y - x^\alpha\right\| \leqslant \max\{2^\alpha y^\alpha, \alpha y^\alpha + y^\alpha\} = \max\{2^\alpha, \alpha+1\}y^\alpha.$$ Thật ra, ước lượng này đúng khi $y/x \geqslant 1$ với $\alpha \geqslant 1$ nói chung. Vậy tồn tại C đủ lớn để bất đẳng thức cần có là đúng với mọi $x, y > 0$.	
		2	XÉT TRƯỜNG HỢP $1 \leqslant \alpha < 2$	
			Bất đẳng thức cần có trở thành $$\left\|(x+y)^\alpha - \alpha x^{\alpha-1}y - x^\alpha\right\| \leqslant Cy^\alpha.$$	
			Ta vẫn có đánh giá $$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + O(1)t^2 \quad \forall t \in [0,1]$$ trong đó $O(1)$ chỉ một đại lượng bị chặn bởi một hằng số không phụ thuộc vào t trên $[0,1]$.	

			Với trường hợp $y/x \leqslant 1$ ta tiếp tục sử dụng đánh giá trên, với chú ý $x^\alpha(y/x)^2 = (y/x)^{2-\alpha}y^\alpha$, để có đánh giá $$\begin{aligned}(x+y)^\alpha =& x^\alpha\Big(1+\alpha\frac{y}{x}+O(1)(\frac{y}{x})^2\Big)\\ =& x^\alpha+\alpha x^{\alpha-1}y+O(1)x^\alpha(\frac{y}{x})^2\\ =& x^\alpha+\alpha x^{\alpha-1}y+O(1)(\frac{y}{x})^{2-\alpha}y^\alpha.\end{aligned}$$ Nhưng nếu $y/x \leqslant 1$ thì $(y/x)^{2-\alpha} \leqslant 1$ nên từ đây ta có đpcm.	
			Trong trường hợp $y/x \geqslant 1$ ta dễ dàng ước lượng $$\begin{aligned}\big\|(x+y)^\alpha-\alpha x^{\alpha-1}y-x^\alpha\big\| \leqslant& \max\big\{2^\alpha y^\alpha, \alpha y^{\alpha-1}y+y^\alpha\big\}\\ =& \max\big\{2^\alpha, \alpha+1\big\}y^\alpha.\end{aligned}$$ **<u>Ghi chú</u>**: *Để thu được ước lượng trên thì điều kiện $\alpha \geqslant 1$ là quan trọng, do ta muốn có $x^{\alpha-1} \leqslant y^{\alpha-1}$ khi đã có $0 < x \leqslant y$.*	
		3	XÉT TRƯỜNG HỢP $0 < \alpha < 1$	
			Trong trường hợp này không thể tồn tại số thực $C > 0$ để bất đẳng thức $$\big\|(x+y)^\alpha-\alpha x^{\alpha-1}y-x^\alpha\big\| \leqslant Cy^\alpha$$ đúng với mọi $x > 0$, $y > 0$. Thật vậy bằng phản chứng giả sử tồn tại một hằng số $C > 0$ có tính chất như trên. Xét $y = kx$ trong đó $k > 0$. Thay vào bất đẳng thức ta thu được $$\big\|(1+k)^\alpha x^\alpha-\alpha kx^\alpha-x^\alpha\big\| \leqslant Ck^\alpha x^\alpha.$$	
			Chia hai vế cho số dương $k^\alpha x^\alpha$ ta đi đến $$\Big\|\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^\alpha-\alpha k^{1-\alpha}-\frac{1}{k^\alpha}\Big\| \leqslant C.$$ Lấy giới hạn khi $k \to \infty$ ta có ngay điều vô lý do vế trái tiến ra vô cùng.	