HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

ĐÁP ÁN

MÔN: ĐẠI SỐ

Bảng B

Bài B.1. (a) Ta tính được $x_3 = 15$, $x_4 = 31$ và $x_5 = 63$.

(b) Bằng cách khai triển Laplace theo hàng đầu tiên ta thu được

$$x_n = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Định thức thứ nhất bằng x_{n-1} còn định thức thứ hai bằng x_{n-2}. Vậy

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}.$$

(c) Từ quan hệ $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ ta suy ra $x_n - x_{n-1} = 2(x_{n-1} - x_{n-2})$. Như vậy,

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= 2(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ &= 4(x_{n-2} - x_{n-3}) \\ &= \cdots \\ &= 2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ &= 2^{n-2}(7-3) = 2^n. \end{aligned}$$

Suy ra

$$x_n - 3 = x_n - x_1 = (x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_2 - x_1) = 2^n + \cdots + 2^2$$

và do đó $x_n = 2^n + \cdots + 2^2 + 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$, hay

$$x_n + 1 = 2^{n+1},$$

với mọi n.

ĐÁP ÁN
MÔN: ĐẠI SỐ

Bảng B

Bài B.2. Giữ nguyên phương trình đầu, cộng phương trình (1) vào pt (2) và m lần pt (1) vào pt (3) ta được hệ tương đương

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = 2+m \\ (2+m)x + (3-m)z = 2+m \\ (2+m)x + (3+m-m^2)z = (2+m)(m+1) \end{cases}$$

Trừ pt (3) cho pt (2) ta được hệ

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = 2+m \\ (2+m)x + (3-m)z = 2+m \\ (2m-m^2)z = (2+m)m \end{cases}$$

TH1: Nếu $m = 0$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}z + 1 \\ y = \frac{1}{2}z + 1 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

TH2: Nếu $m = 2$ thì hệ phương trình dẫn đến $0z = 8$ nên hệ không có nghiệm.

TH3: Nếu $m = -2$ thì hệ có vô số nghiệm

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

TH4: Xét $m \neq 0, 2, -2$, hệ có nghiệm duy nhất là

$$\begin{cases} x = \frac{1}{m-2} \\ y = \frac{m+3}{2-m} \\ z = \frac{m+2}{2-m}. \end{cases}$$

ĐÁP ÁN

MÔN: ĐẠI SỐ

Bảng B

Bài B.3. a) Có $\binom{11}{2} = 55$ cách chọn ra 2 cây trong số 11 cây. Dễ thấy có 10 cách chặt 2 cây liên tiếp trong số 11 cây đó. Như vậy, có tất cả $55 - 10 = 45$ cách chặt cây thoả mãn yêu cầu.

b) Có $\binom{30}{4}$ cách chặt 4 cây bất kì từ 30 cây. Rõ ràng có đúng 30 cách chặt đi 4 cây sao cho cả 4 cây là cạnh nhau. Ta đếm số các cách chặt đi 4 cây sao cho trong số 4 cây bị chặt có đúng 3 cây kề nhau. Có cả thảy 30 cách chặt đi 3 cây liên tiếp. Với mỗi cách chặt đi 3 cây như vậy có đúng 25 cách chặt đi cây thứ 4 sao cho cây này không kề với 3 cây đã bị chặt. Như vậy, có tổng cộng 30×25 cách chặt đi 4 cây trong đó có đúng 3 cây kề nhau. Suy ra số các cách chặt đi 4 cây cần tìm là $\binom{30}{4} - 30 - 30 \times 25 = 27405 - 30 - 750 = 26625$.

c) Đánh dấu 2 cây liên tiếp bất kì. Có 2 khả năng:

- Một trong hai cây được đánh dấu bị chặt. Trong trường hợp này, ta không được phép chặt đi cây nào trong 2 cây bên cạnh cây đã chặt đi này cũng như 2 cây kế tiếp chúng. Như vậy, ông V cần chặt đi 4 cây trong số 25 cây còn lại và sao cho giữa 2 cây bất kì có ít nhất 2 cây không bị chặt. Đánh số các cây này từ 1 đến 25. Thế thì số các cách cần tìm chính bằng số các bộ số nguyên dương $1 \le a < b < c < d \le 25$ sao cho $b - a > 2, c - a > 2, d - c > 2$. Số các bộ như vậy tương ứng $1-1$ với số các bộ số nguyên $1 \le a' < b' < c' < d' \le 19$ qua các song ánh $(a, b, c, d) \mapsto (a, b - 2, c - 4, d - 6)$ và $(a', b', c', d') \mapsto (a', b' + 2, c' + 4, d' + 6)$. Có $\binom{19}{4}$ bộ (a', b', c', d') như vậy. Do các cách chặt cây này khác nhau, số cách chặt cây trong trường hợp này là $2 \times \binom{19}{4}$, trong đó 2 tương ứng với hai cách chặt đi cây đầu tiên trong số hai cây đánh dấu.
- 2 cây được đánh dấu không bị chặt. Trong trường hợp này, ông V cần chặt đi 5 cây trong số 28 cây cần chặt sao cho ở giữa 2 cây bị chặt bất kì còn ít nhất 2 cây nữa. Tương tự như trên, số các cách chặt cây như vậy bằng số các bộ số nguyên $1 \le a < b < c < d < e \le 28$ sao cho $b - a > 2, c - b > 2, d - c > 2, e - d > 2$ và bằng số các bộ số nguyên $1 \le a' < b' < c' < d' < e' \le 17$ do đó bằng $\binom{17}{5}$.

Như vậy, số cách chặt cây cần tìm bằng $2 \times \binom{19}{4} + \binom{17}{5} = 7752 + 6188 = 13940$.

ĐÁP ÁN

MÔN: ĐẠI SỐ

Bảng B

Bài B.4. **Cách 1**: Giả sử P là một đa thức bậc $n = 100$ thoả mãn điều kiện bài toán. Bằng cách so sánh bậc và so sánh hệ số cao nhất, rõ ràng ta phải có $nP(x) = (x+a)P'(x)$ với $a \in \mathbb{R}$. Đặt

$$P(x) = c(x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0),$$

trong đó $c \neq 0, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}(x+a)P'(x) &= c(x+a)(nx^{n-1} + c_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + c_1)\\ &= c\left[nx^n + ((n-1)c_{n-1} + an)x^{n-1} + ((n-2)c_{n-2} + a(n-1)c_{n-1})x^{n-2}\right.\\ &\quad \left. + \cdots + (c_1 + a\cdot 2\cdot c_2)x + ac_1\right]\end{aligned}$$

Từ đây, bằng cách so sánh các hệ số của $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x^0$, ở hai vế của đẳng thức $(x+a)P'(x) = nP(x)$ ta lần lượt suy ra

$$nc_{n-1} = (n-1)c_{n-1} + an, \text{ hay } c_{n-1} = na;$$

$$(n-2)c_{n-2} + a(n-1)c_{n-1} = nc_{n-2} \text{ hay } 2c_{n-2} = a(n-1)c_{n-1} \text{ hay } c_{n-2} = \binom{n}{2}a^2;$$

một cách tổng quát,

$$c_{n-k} = \binom{n}{k}a^k, \forall k = 1, \ldots, n.$$

Như vậy,

$$P(x) = c(x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \cdots + \binom{n}{k}a^kx^{n-k} + \cdots + \binom{n}{n}a^n) = c(x+a)^n.$$

Đảo lại, ta dễ dàng kiểm tra được rằng một đa thức có dạng $P(x) = c(x+a)^n$ thoả mãn yêu cầu của bài toán.

Cách 2: Lập luận tương tự như trên, đa thức $P(x)$ có một nghiệm thực $b \in \mathbb{R}$ nào đó. Đặt $P(x) = (x-b)^rR(x)$, với $r > 0$, $R(x)$ là đa thức bậc $n-r$ và b không là nghiệm của $R(x)$. Ta có

$$P'(x) = r(x-b)^{r-1}R(x) + (x-b)^rR'(x) = (x-b)^{r-1}\big(rR(x) + (x-b)R'(x)\big).$$

Thay vào đẳng thức $P(x) = (x-b)^rR(x)$ ta suy ra

$$(1 - \frac{r}{n})R(x) = (x-b)R'(x).$$

Vì b không là nghiệm của $R(x)$ nên suy ra $r = n$ và $R'(x) = 0$. Vậy

$$P(x) = \lambda(x-b)^n,$$

với một hằng số $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ nào đó.

Cách 3: Giả sử P là một đa thức bậc $n = 100$ sao cho $P' \mid P$. Do $\deg P' = \deg P - 1$ nên bằng cách để ý tới hệ số cao nhất của P' ta suy ra $P(x) = \frac{1}{n}(x - \alpha_1)P'(x)$ với $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ nào đó. Điều này chứng tỏ

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{n}{x - \alpha_1}. \quad (*)$$

Bây giờ, nếu $P(x) = c(x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_k)^{m_k}$, trong đó $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ là các nghiệm phức phân biệt của P với các bội tương ứng là $m_1, \ldots, m_k$ thì

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_k}{x - \alpha_k}. \quad (**)$$

Nếu $k \geq 2$ thì ta có ngay điều vô lý vì $(*)$ cho thấy $\lim_{x\to\alpha_2}(x-\alpha_2)\frac{P'(x)}{P(x)} = 0$ còn $(**)$ lại dẫn đến $\lim_{x\to\alpha_2} \frac{P'(x)}{P(x)} = 0 = m_2$. Vậy α_1 là nghiệm duy nhất của P và do đó $P(x) = c(x-\alpha_1)^n$. Đảo lại, mọi đa thức như vậy thoả mãn điều kiện bài toán.