HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

ĐÁP ÁN

MÔN: ĐẠI SỐ

Bảng A

Bài A.1. (a) Ta tính được $x_3 = 15$, $x_4 = 31$ và $x_5 = 63$.
(b) Bằng cách khai triển Laplace theo hàng đầu tiên ta thu được

$$x_n = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Định thức thứ nhất bằng x_{n-1} còn định thức thứ hai bằng x_{n-2}. Vậy

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}.$$

(c) Từ quan hệ $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$ ta suy ra $x_n - x_{n-1} = 2(x_{n-1} - x_{n-2})$. Như vậy,

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= 2(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ &= 4(x_{n-2} - x_{n-3}) \\ &= \cdots \\ &= 2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ &= 2^{n-2}(7-3) = 2^n. \end{aligned}$$

Suy ra

$$x_n - 3 = x_n - x_1 = (x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_2 - x_1) = 2^n + \cdots + 2^2$$

và do đó $x_n = 2^n + \cdots + 2^2 + 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$, hay

$$x_n + 1 = 2^{n+1},$$

với mọi n.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017**

ĐÁP ÁN

MÔN: ĐẠI SỐ

Bảng A

Bài A.2. Gọi số lượt xe đã qua các đoạn đường AB, BC, CD, DE, EB, EF và AF lần lượt là x, y, z, t, u, w, v

Phân tích tại từng giao lộ, ta có các phương trình sau

$$\begin{cases} x + v = 800 & (\text{ giao lộ } A) \\ x + u = y + 400 & (\text{ giao lộ } B) \\ z + 600 = y & (\text{ giao lộ } C) \\ t + 400 = z + 1600 & (\text{ giao lộ } D) \\ u + w = t - 400 & (\text{ giao lộ } E) \\ v + w = 600 & (\text{ giao lộ } F) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này cho ta

$$\begin{cases} x = w + 200 \\ v = -w + 600 \\ u = z - w + 800 \\ t = z + 1200 \\ y = z + 600 \end{cases}$$

Kết hợp với các quan sát $x = 2w$ và $t = 1,5y$ ta được

$$\begin{cases} x = 400 \\ y = 1200 \\ z = 600 \\ t = 1800 \\ u = 1200 \\ v = 400 \\ w = 200 \end{cases}$$

ĐÁP ÁN
MÔN: ĐẠI SỐ

Bảng A

Bài A.3. a) Có $\binom{11}{2} = 55$ cách chọn ra 2 cây trong số 11 cây. Dễ thấy có 10 cách chặt 2 cây liên tiếp trong số 11 cây đó. Như vậy, có tất cả $55 - 10 = 45$ cách chặt cây thoả mãn yêu cầu.

b) Có $\binom{30}{4}$ cách chặt 4 cây bất kì từ 30 cây. Rõ ràng có đúng 30 cách chặt đi 4 cây sao cho cả 4 cây là cạnh nhau. Ta đếm số các cách chặt đi 4 cây sao cho trong số 4 cây bị chặt có đúng 3 cây kề nhau. Có cả thảy 30 cách chặt đi 3 cây liên tiếp. Với mỗi cách chặt đi 3 cây như vậy có đúng 25 cách chặt đi cây thứ 4 sao cho cây này không kề với 3 cây đã bị chặt. Như vậy, có tổng cộng 30×25 cách chặt đi 4 cây trong đó có đúng 3 cây kề nhau. Suy ra số các cách chặt đi 4 cây cần tìm là $\binom{30}{4} - 30 - 30 \times 25 = 27405 - 30 - 750 = 26625$.

c) Đánh dấu 2 cây liên tiếp bất kì. Có 2 khả năng:

- Một trong hai cây được đánh dấu bị chặt. Trong trường hợp này, ta không được phép chặt đi cây nào trong 2 cây bên cạnh cây đã chặt đi này cũng như 2 cây kế tiếp chúng. Như vậy, ông V cần chặt đi 4 cây trong số 25 cây còn lại và sao cho giữa 2 cây bất kì có ít nhất 2 cây không bị chặt. Đánh số các cây này từ 1 đến 25. Thế thì số các cách cần tìm chính bằng số các bộ số nguyên dương $1 \leq a < b < c < d \leq 25$ sao cho $b - a > 2, c - a > 2, d - c > 2$. Số các bộ như vậy tương ứng $1 - 1$ với số các bộ số nguyên $1 \leq a' < b' < c' < d' \leq 19$ qua các song ánh $(a, b, c, d) \mapsto (a, b - 2, c - 4, d - 6)$ và $(a', b', c', d') \mapsto (a', b' + 2, c' + 4, d' + 6)$. Có $\binom{19}{4}$ bộ (a', b', c', d') như vậy. Do các cách chặt cây này khác nhau, số cách chặt cây trong trường hợp này là $2 \times \binom{19}{4}$, trong đó 2 tương ứng với hai cách chặt đi cây đầu tiên trong số hai cây đánh dấu.
- 2 cây được đánh dấu không bị chặt. Trong trường hợp này, ông V cần chặt đi 5 cây trong số 28 cây cần chặt sao cho ở giữa 2 cây bị chặt bất kì còn ít nhất 2 cây nữa. Tương tự như trên, số các cách chặt cây như vậy bằng số các bộ số nguyên $1 \leq a < b < c < d < e \leq 28$ sao cho $b - a > 2, c - b > 2, d - c > 2, e - d > 2$ và bằng số các bộ số nguyên $1 \leq a' < b' < c' < d' < e' \leq 17$ do đó bằng $\binom{17}{5}$.

Như vậy, số cách chặt cây cần tìm bằng $2 \times \binom{19}{4} + \binom{17}{5} = 7752 + 6188 = 13940$.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2017

ĐÁP ÁN

MÔN: ĐẠI SỐ

Bảng A

Bài A.4. (a) $n = 3$: Dễ tìm được đa thức bậc 2 thỏa mãn điều kiện của bài toán, ví dụ $-(x-1)(x-2)$, với $x_1 = 1, x_3 = 2$ và $x_2 = 3/2$. Do đó nếu $P(x)$ là đa thức có bậc nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện thì $\deg P(x) \leq 2$. Nếu $\deg P(x) = 1$ thì hiển nhiên không tồn tại x_1, x_2, x_3 như vậy. Vậy $\deg P(x) = 2$.

(b) Đáp số 2016. Ta sẽ giải bài toán tổng quát với 2017 được thay bởi $n \geq 2$. Việc tồn tại đa thức bậc $n-1$ thỏa mãn giả thiết là hiển nhiên, ví dụ xét đa thức

$$H(x) = -(x-1)(x-2)\dots(x-2017).$$

Ta sẽ chỉ ra rằng nếu $P(x)$ thoả mãn điều kiện bài ra thì $\deg(P) \geq n-1$.

Cách 1. Với $n = 2$ khẳng định là hiển nhiên ($P(x)$ khác hằng). Giả định $n \geq 3$.

Ta có quan sát sau đây.

Sự kiện. Cho đa thức $Q(x) \not\equiv 0$ sao cho $Q(a) \leq 0 \leq Q(b)$ với $a < b$ nào đó. Khi đó tồn tại $a < c < b$ sao cho $Q'(c) > 0$.

Thật vậy, nếu $Q'(x) \leq 0$ trên khoảng (a, b) thì hàm $Q(x)$ nghịch biến trên khoảng này, do đó $Q(a) \geq Q(b)$. Theo giả thiết ta phải có $Q(x)$ đồng nhất bằng 0 trên $[a, b]$, vô lý. Vậy tồn tại c sao cho $Q'(c) > 0$.

Ứng dụng vào bài toán. Theo giả thiết và quan sát trên, tồn tại các số $c_i \in (x_i, x_{i+1}), i = 1, 2, \dots, n-1$ sao cho $P'(c_1) > 0$, $P'(c_2) < 0$,... Từ đó, giữa các số c_i và c_{i+1} tồn tại số d_i sao cho $P'(d_i) = 0$, với $i = 1, 2, \dots, n-2$. Vậy $P'(x)$ có ít nhất $n-2$ nghiệm. Từ đó $P(x)$ có bậc lớn hơn hoặc bằng $n-1$.

Cách 2. Chứng minh bằng quy nạp theo n. Với $n = 2$ khẳng định là hiển nhiên. Giả sử khẳng định đúng tới $n-1 \geq 2$. Ta chứng minh khẳng định đúng với n.

Trường hợp 1: $P(x_1) = 0$. Xét đa thức $Q(x) = -P(x)/(x-x_1)$. Khi đó $Q(x)$ thỏa mãn giả thiết quy nạp cho $n-1$ ($Q(x)$ không thể là hằng số vì khi đó $P(x)$ có bậc 1 không thỏa mãn giả thiết quy nạp cho $n \geq 3$). Từ đó $Q(x)$ có bậc ít nhất $n-2$, ta có đpcm.

Trường hợp 2: $P(x_1) < 0$ và $P(x_2) > 0$. Khi đó tồn tại $c \in (x_1, x_2)$ sao cho $P(c) = 0$, vậy ta có thể thay x_1 bởi c và bài toán quy về trường hợp 1.

Trường hợp 3: $P(x_1) < 0$ và $P(x_2) = 0$. Nếu tồn tại $c < x_2$ để $P(x) = 0$ thì ta có thể thay x_1 bởi c và quy về trường hợp 1. Nếu tồn tại $x_1 < c < x_2$ để $P(c) > 0$ thì ta thay x_2 bởi c và quy về trường hợp 2. Vậy ta có thể giả thiết $P(x) \leq 0$ trong lân cận của x_2. Từ đó x_2 là nghiệm bội. Xét $Q(x) = -P(x)/(x-x_2)$. Đa thức này thỏa mãn giả thiết quy nạp với các điểm $x_2, \dots, x_n$. Từ đó ta có đpcm.