HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.1

Từ công thức truy hồi ta thấy ngay dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ đơn điệu không giảm.

2. Nếu nó hội tụ về ℓ thì $\ell = \ell + (\ell - 2016)^2 \Rightarrow \ell = 2016$.

1. Vì dãy đơn điệu không giảm nên nếu nó hội tụ về ℓ thì $u_n \le \ell = 2016$ $(\forall n \ge 1)$. Đặc biệt,

$$a + (a - 2016)^2 = u_2 \le 2016 \Rightarrow (a - 2016)(a - 2015) \le 0 \Rightarrow 2015 \le a \le 2016.$$

   Đảo lại, cho $2015 \le a \le 2016$. Khi đó, $2015 \le u_1 \le 2016$. Giả sử với $n \ge 1$ nào đó, ta đã có $2015 \le u_n \le 2016$. Suy ra:

$$(u_n - 2016)(u_n - 2016 + 1) \le 0 \Rightarrow (u_n - 2016)^2 + u_n - 2016 \le 0.$$

   Theo công thức truy hồi, bất đẳng thức cuối này có thể viết được thành $u_{n+1} \le 2016$; vậy, $2015 \le u_n \le u_{n+1} \le 2016$. Sử dụng nguyên lý quy nạp ta thu được $2015 \le u_n \le 2016$ với mọi $n \ge 1$.

   Dãy đã cho đơn điệu và bị chặn nên hội tụ.

   Kết luận: các giá trị cần tìm của a là $2015 \le a \le 2016$.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.2

1. Dễ thấy hàm f liên tục trên $(0, 1]$ nên f liên tục trên $[0, 1]$ khi và chỉ khi nó liên tục (bên phải) tại 0.

   Nếu $\alpha > 0$ thì $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha = 0$, nên từ bất đẳng thức $|f(x)| \le x^\alpha$ $(\forall x \in (0, 1])$ ta suy ra ngay $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0 = f(0)$, tức là f liên tục (bên phải) tại điểm 0.

   Đảo lại, vì $x_n := \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1} \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0^+$ với $\sin\frac{1}{x_n} \equiv 1$, ta thấy nếu f liên tục (bên phải) tại điểm 0 thì phải có $\lim\limits_{n\to+\infty} {x_n}^\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(0) = 0$. Suy ra $\alpha > 0$.

2. Dễ thấy hàm f khả vi trên $(0, 1]$ nên f khả vi trên $[0, 1]$ khi và chỉ khi nó có đạo hàm bên phải tại điểm 0.

   Nếu $\alpha > 1$ thì $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0+} x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x} = 0$ (chính là kết quả của phần 1 vì $\alpha - 1 > 0$), nên f có đạo hàm bên phải $f'_+(0) = 0$.

   Đảo lại, vì $y_n := (2n\pi)^{-1} \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0^+$ với $\sin\frac{1}{y_n} \equiv 0$, ta thấy nếu f có đạo hàm bên phải tại điểm 0 thì $f'_+(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0} = 0$.

   Vậy, với x_n như đã nói ở phần 1, ta có $0 = f'_+(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim\limits_{n\to+\infty} {x_n}^{\alpha-1}$. Điều này chỉ xảy ra khi $\alpha > 1$.

3. Dễ thấy hàm f khả vi liên tục trên $(0, 1]$ với

   $$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos\frac{1}{x} \quad \forall x \in (0, 1] \tag{1}$$

   nên f khả vi liên tục khi và chỉ khi nó có đạo hàm bên phải $f'_+(0) = 0$ (kết quả của phần 2) và $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = f'_+(0)$.

   Nếu $\alpha > 2$ thì

   $$(1) \Rightarrow |f'(x)| \le \alpha x^{\alpha-1} + x^{\alpha-2} \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0+} f'(x) = 0 = f'_+(0).$$

   Đảo lại, với y_n như đã dùng ở phần 2, vì $\cos\frac{1}{y_n} \equiv 1$, ta thấy nếu

   $$\lim_{x\to 0+} f'(x) = f'_+(0) = 0$$

   thì $0 = -\lim\limits_{n\to+\infty} f'(y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} {y_n}^{\alpha-2}$. Điều này chỉ xảy ra khi $\alpha > 2$.

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.3

- Trong điều kiện thứ nhất, chọn $x = 0$ ta thấy $f(0)^2 \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Với $x \neq 0$, từ điều kiện này ta cũng có $f(x) \geq \dfrac{f(ax)^2}{a^3x^2} \geq 0$. Vậy, $f(x) \geq 0$ với mọi x.
- Nếu $a = 1$, điều kiện thứ nhất trở thành $f(x)^2 \leq x^2 f(x)$, ta suy ra $f(x) \leq x^2$ với mọi số thực x, nên đpcm là đúng. Bây giờ, xét trường hợp $a > 1$.
- Đặt $g(x) := \dfrac{|f(x)|}{x^2/a} = \dfrac{f(x)}{x^2/a} \geq 0$ với mọi $x \neq 0$. Từ nay, xem $x \neq 0$ và chỉ còn phải chứng minh rằng $g(x) \leq 1$. Theo định nghĩa của g, ta có $f(x) = \dfrac{x^2}{a} g(x)$.
- Từ đó, viết lại theo g điều kiện thứ nhất như sau:

$$\left(\frac{(ax)^2}{a} g(ax) \right)^2 \leq a^3x^2 \frac{x^2}{a} g(x) \Leftrightarrow g(ax)^2 \leq g(x). \tag{1}$$

  Dùng (1), bằng quy nạp theo $n \in \mathbb{N}$, ta thấy:

$$g(x) \leq g\left(\frac{x}{a^n}\right)^{2^{-n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

- Theo điều kiện thứ hai, tồn tại $m, M \in (0, \infty)$ sao cho $(0 \leq)\ f(t) \leq M$ khi $|t| < m$ (trong bài B2, $m = 1$). Vì $a > 1$ nên cũng tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ (phụ thuộc vào x) để $\left|\dfrac{x}{a^n}\right| < m$ với mọi $n \geq n_0$; và với các số tự nhiên n như thế, (2) kéo theo

$$g(x) \leq \left(\frac{f\left(\frac{x}{a^n}\right)}{\left(\frac{x}{a^n}\right)^2 / a} \right)^{2^{-n}} \leq \frac{a^{\frac{2n+1}{2^n}}}{x^{2^{1-n}}} M^{2^{-n}}. \tag{3}$$

- Dễ thấy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2^n} = 0$ (có thể dùng quy tắc l'Hospital), nên bằng cách cho $n \to \infty$ trong (3), ta có ngay $g(x) \leq 1$, đpcm.

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.4

Giả sử phản chứng rằng phương trình $f''(x) = 0$ vô nghiệm. Theo giả thiết, f'' liên tục nên từ đây suy ra: f'' không đổi dấu trên $\mathbb{R}$. Nếu cần, sẽ thay f bởi $-f$, ta có thể xem rằng $f''(x) > 0$ với mọi x.

Lúc này f' tăng ngặt. Nếu tồn tại a để $f'(a) > 0$ thì với mọi $x > a$ ta có

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t > f(a) + \int_a^x f'(a)\mathrm{d}t = f(a) + f'(a)(x-a);$$

chia hai vế cho $x > \max\{a, 0\}$ rồi lấy $\lim\limits_{x\to+\infty}$, dùng giả thiết ta thấy:

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \geq \lim_{x\to+\infty} \frac{f(a)}{x} + f'(a) \lim_{x\to+\infty} \frac{x-a}{x} = f'(a),$$

vô lý!

Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng $f'(x) \leq 0$ với mọi x. Mà f' tăng ngặt, nên tồn tại b để $f'(b) < 0$. Với mọi $x < b$, ta lại có

$$f(x) = f(b) - \int_x^b f'(t)\mathrm{d}t > f(b) - \int_x^b f'(b)\mathrm{d}t = f(b) + f'(b)(x-b).$$

Chia hai vế của bất đẳng thức này cho $x < \min\{b, 0\}$ rồi lấy $\lim\limits_{x\to-\infty}$, dùng giả thiết ta thấy:

$$0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \leq \lim_{x\to-\infty} \frac{f(b)}{x} + f'(b) \lim_{x\to-\infty} \frac{x-b}{x} = f'(b),$$

cũng vô lý! Tất cả các mâu thuẫn gặp được chứng tỏ rằng phương trình $f''(x) = 0$ phải có ít nhất một nghiệm.

Ghi chú: Thực ra chỉ cần giả thiết f khả vi hai lần (f'' không nhất thiết liên tục). Khi đó, dùng tính chất nhận giá trị trung gian của hàm đạo hàm, ta thấy nếu phương trình $f''(x) = 0$ vô nghiệm thì f'' cũng không đổi dấu trên $\mathbb{R}$.

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.5

- Dùng định lý cơ bản của phép tính vi-tích phân (về đạo hàm theo cận của tích phân xác định):

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{(1/2)x^{-1/2}}{\ln x^{1/2}} = \frac{1 - x^{-1/2}}{\ln x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}\ln x} > 0 \quad \forall x > 1$$

  nên f tăng ngặt và liên tục trên $I := (1, \infty)$.

- Để tìm tập ảnh J của f, ta đánh giá

$$f(x) \geq (x - \sqrt{x}) \min\left\{\frac{1}{\ln t} : \sqrt{x} \leq t \leq x\right\} = \frac{x - \sqrt{x}}{\ln x} = \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\ln x} \underset{(x \to +\infty)}{\longrightarrow} +\infty \quad (1)$$

  (quy tắc l'Hospital).

  Đổi biến số $t = \mathrm{e}^u$, ta có: $f(x) = \int_{(1/2)\ln x}^{\ln x} \mathrm{e}^u \frac{\mathrm{d}u}{u}$ và để ý: với mọi $x > 1$, khi $(1/2)\ln x < u < \ln x$, thì $\sqrt{x} < \mathrm{e}^u < x$, suy ra

$$\begin{aligned} \sqrt{x}\ln 2 &= \sqrt{x}\int_{(1/2)\ln x}^{\ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u} < f(x) < x\int_{(1/2)\ln x}^{\ln x} \frac{\mathrm{d}u}{u} = x\ln 2 \\ &\Rightarrow \lim_{x \to 1^+} f(x) = \ln 2 \end{aligned} \quad (2)$$

  Từ (1)-(2), ta thấy $J = (\ln 2, \infty)$.

  <u>**Ghi chú**</u>: để chứng minh (1) ta có thể dùng bất đẳng thức $\mathrm{e}^t \geq 1 + t > t \Rightarrow \ln t < t \Rightarrow \frac{1}{\ln t} > \frac{1}{t}$ với mọi $t > 1$. Vậy, $f(x) > \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\sqrt{x}$. Suy ra (1).