HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2018
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Bài A.1 B.1 — 6 điểm

Cho $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi các điều kiện

$$x_1 = 2019, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2018}x_n^2 + \frac{2017}{2018}x_n \quad \forall n \geqslant 1.$$

1. (*2 điểm*) Chứng minh rằng $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số tăng ngặt và không bị chặn trên.
2. (*2 điểm*) Chứng minh rằng
$$\frac{x_n}{x_{n+1}-1} = 2018\left(\frac{1}{x_n-1} - \frac{1}{x_{n+1}-1}\right) \quad \forall n \geqslant 1.$$
3. (*2 điểm*) Tìm
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1}{x_2-1} + \frac{x_2}{x_3-1} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}-1}\right).$$

Lời giải các bài A.1 B.1 — 6 điểm

- Dễ thấy $x_n > 1$ với mọi $n \geqslant 1$. Hơn nữa, $2018(x_{n+1} - x_n) = x_n^2 - x_n > 0$ (vì $x_n > 1$) với mọi $n \geqslant 1$. Từ đây suy ra $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là một dãy tăng ngặt. **1 điểm**
- Giả sử dãy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bị chặn trên; tức là (do tính tăng của dãy), tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 1$.
  Chuyển $2018x_{n+1} = x_n^2 + 2017x_n$ qua giới hạn ta được $2018a = a^2 + 2017a$; suy ra $a = 0$ hoặc $a = 1$, mâu thuẫn! Vậy, dãy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ không bị chặn trên. **1 điểm**
- Với mọi $n \geqslant 1$, ta có:
$$2018(x_{n+1}-1) = x_n^2 + 2017x_n - 2018 = (x_n+2018)(x_n-1)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x_n-1} = \frac{x_n+2018}{2018(x_{n+1}-1)} = \frac{x_n}{2018(x_{n+1}-1)} + \frac{1}{x_{n+1}-1}$$
$$\Rightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}-1} = 2018\left(\frac{1}{x_n-1} - \frac{1}{x_{n+1}-1}\right).$$
2 điểm
- Suy ra: $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{x_{i+1}-1} = 2018\left(\dfrac{1}{x_1-1} - \dfrac{1}{x_{n+1}-1}\right)$. **1 điểm**
- Vì dãy $\{x_n\}$ tăng và không bị chặn trên nên $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. **0.5 điểm**
- Vậy, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{x_{i+1}-1} = \dfrac{2018}{x_1-1} = 1$. **0.5 điểm**

ĐÁP ÁN

Bài A.2 — 6 điểm

Giả sử $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ là một hàm số khả vi sao cho

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx.$$

Chứng minh rằng tồn tại số thực $c\in(0,1)$ sao cho

$$f(c) = 2018f'(c)\int_0^c f(x)dx.$$

Lời giải bài A.2 — 6 điểm

Cách 1:

- Đặt $F(x) = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$, ta có hàm F khả vi trên $[0,1]$ với $F(0)=F(1)=0$. Theo định lý Rolle, tồn tại $x_0\in(0,1)$ sao cho $F'(x_0)=0$, tức là $\int_0^{x_0} f(t)dt = 0$. **3 điểm**
- Đặt $G(x) = e^{-2018f(x)}\int_0^x f(t)dt$, ta có hàm G khả vi trên $[0,1]$ với $G(0)=G(x_0)=0$. Vẫn theo định lý Rolle, tồn tại $c\in(0,x_0)$ sao cho $G'(c)=0$. Từ đây ta được $f(c) = 2018f'(c)\int_0^c f(t)dt$. **3 điểm**

Cách 2:

- Đặt $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, ta có $F'(x)=f(x)$ và $\int_0^x F(t)dt = xF(x) - \int_0^x tf(t)dt = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$. Do đó, $\int_0^1 F(t)dt = 0$. Theo định lý giá trị trung bình cho tích phân, tồn tại $x_0\in(0,1)$ sao cho $F(x_0)=0$ hay $\int_0^{x_0} f(t)dt = 0$. **3 điểm**
- Đặt $G(x) = e^{-2018f(x)}\int_0^x f(t)dt$, ta có hàm G khả vi trên $[0,1]$ với $G(0)=G(x_0)=0$. Theo định lý Rolle, tồn tại $c\in(0,x_0)$ sao cho $G'(c)=0$. Từ đây ta được $f(c) = 2018f'(c)\int_0^c f(t)dt$. **3 điểm**

ĐÁP ÁN

Bài B.2 — 6 điểm

Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

1. (*2 điểm*) Tính $f'(x)$ nếu $x \neq 0$.
2. (*2 điểm*) Tính $f'(0)$.
3. (*2 điểm*) Hàm f có đạo hàm cấp hai tại điểm $x = 0$ hay không?

Lời giải bài B.2 — 6 điểm

- Khi $x \neq 0$, ta có $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ và $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. **2 điểm**
- Xét giới hạn $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$. **1 điểm**
- Vì $x \to 0$ và $\sin \frac{1}{x}$ bị chặn (bởi 1) nên $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. **0.5 điểm**
- Vậy, $f'(0) = 0$. **0.5 điểm**
- Xét giới hạn $\lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} g(x)$ với $g(x) = 2 \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$. **0.5 điểm**
- Chọn dãy $x_n = \dfrac{1}{2n\pi} \to 0$ khi $n \to \infty$. Ta có $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty}(2\sin(2n\pi) - 2n\pi\cos(2n\pi)) = \lim_{n\to\infty}(-2n\pi) = -\infty$.

  (Cũng có thể chọn dãy $y_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi} \to 0$ khi $n \to \infty$. Ta có $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty}(2n+1)\pi = +\infty$.) **1 điểm**
- Từ đó, $g(x)$ không có giới hạn (hữu hạn) khi $x \to 0$; vì thế, hàm f không có đạo hàm cấp hai tại $x = 0$. **0.5 điểm**

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2018
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Bài A.3 — 6 điểm

Cho hai số thực $a < b$. Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi liên tục sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Chứng minh rằng

$$\max_{x\in[a,b]} \left| \int_a^x f(t)dt \right| \le \frac{(b-a)^2}{8} \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Lời giải bài A.3 — 6 điểm

- Đặt $M = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ $(0 \le M < +\infty$ do f' liên tục) và

  $$F(x) = \int_a^x f(t)dt + M\frac{(x-a)(x-b)}{2} \quad (\forall x \in [a, b]).$$

  Ta có: $F(a) = F(b) = 0$ và $F''(x) = f'(x) + M \ge 0 \quad \forall x \in [a, b]$. **2 điểm**

- Do F là hàm lồi trên $[a, b]$ và $F(a) = F(b) = 0$ nên $F(x) \le 0 \quad \forall x \in [a, b]$; vậy,

  $$\int_a^x f(t)dt \le M\frac{(x-a)(b-x)}{2} \le \frac{M}{2}\left(\frac{(x-a)+(b-x)}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{8}M$$

  với mọi $x \in [a, b]$. **2 điểm**

- Đặt $G(x) = \int_a^x f(t)dt - M\frac{(x-a)(x-b)}{2}$ $(\forall x \in [a, b])$, ta có hàm G lõm trên $[a, b]$ và đi đến bất đẳng thức (đối ngẫu):

  $$\int_a^x f(t)dt \ge -\frac{(b-a)^2}{8}M$$

  với mọi $x \in [a, b]$. **2 điểm**

ĐÁP ÁN

Bài B.3 — 6 điểm

Giả sử $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục sao cho

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx.$$

Chứng minh rằng tồn tại số thực $c \in (0,1)$ sao cho

$$f(c) = 2018 \int_0^c f(x)dx.$$

Lời giải bài B.3 — 6 điểm

Cách 1:

- Đặt $F(x) = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$, ta có hàm F khả vi trên $[0,1]$ với $F(0) = F(1) = 0$. Theo định lý Rolle, tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $F'(x_0) = 0$, tức là $\int_0^{x_0} f(t)dt = 0$. **3 điểm**
- Đặt $G(x) = e^{-2018x}\int_0^x f(t)dt$, ta có hàm G khả vi trên $[0,1]$ với $G(0) = G(x_0) = 0$. Cũng theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (0,x_0)$ sao cho $G'(c) = 0$. Từ đây ta được $f(c) = 2018\int_0^c f(t)dt$. **3 điểm**

Cách 2:

- Đặt $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, ta có $F'(x) = f(x)$ và $\int_0^x F(t)dt = xF(x) - \int_0^x tf(t)dt = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$. Do đó $\int_0^1 F(t)dt = 0$. Theo định lý giá trị trung bình cho tích phân, tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $F(x_0) = 0$ hay $\int_0^{x_0} f(t)dt = 0$. **3 điểm**
- Đặt $G(x) = e^{-2018x}\int_0^x f(t)dt$, ta có hàm G khả vi trên $[0,1]$ với $G(0) = G(x_0) = 0$. Theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (0,x_0)$ sao cho $G'(c) = 0$. Từ đó $f(c) = 2018\int_0^c f(t)dt$. **3 điểm**

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2018

Môn thi: Giải tích

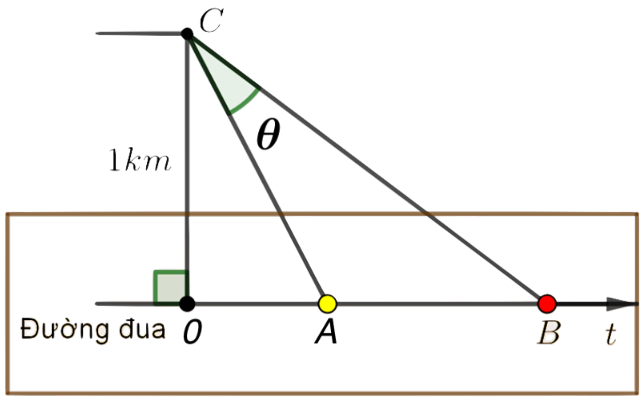
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Bài A.4 B.4 — 6 điểm

Một quan sát viên C đứng cách đường đua Ot một khoảng $OC = 1$ km ($OC \perp Ot$).

Hai vận động viên điền kinh A, B xuất phát tại O và chạy cùng lúc (sang phải, như hình vẽ) trên đường đua. Góc $\theta = \angle(CA, CB)$ được gọi là *góc nhìn* từ C đến hai vận động viên. Giả sử B luôn chạy nhanh gấp bốn lần A.



1. (*2 điểm*) Tính $\tan\theta$ theo $x = OA$ (km).
2. (*4 điểm*) Xác định vị trí của hai vận động viên trên đường đua để góc nhìn θ từ C đến họ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải các bài A.4 B.4 — 6 điểm

- Theo giả thiết, $OA = x$ (≥ 0), $OB = 4x$. **0.5 điểm**
- Ta có

$$4x = \frac{OB}{OC} = \tan(O\hat{C}A + \theta) = \frac{\tan O\hat{C}A + \tan\theta}{1 - \tan O\hat{C}A \cdot \tan\theta} = \frac{x + \tan\theta}{1 - x\tan\theta}.$$

1 điểm

- Vậy, $\tan\theta = \dfrac{3x}{1+4x^2}$. **0.5 điểm**
- Góc θ lớn nhất khi $\tan\theta$ lớn nhất. Và ta cần tìm x sao cho $\tan\theta$ đạt giá trị lớn nhất. **1 điểm**
- Đặt $f(x) = \dfrac{3x}{1+4x^2}$. Ta có: $f'(x) = \dfrac{3(1-4x^2)}{(1+4x^2)^2}$; $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. **1 điểm**
- Ta dễ thấy $f'(x) > 0$ khi $0 \leq x < \dfrac{1}{2}$ và $f'(x) < 0$ khi $x > \dfrac{1}{2}$. Vậy, hàm số f đạt giá trị lớn nhất tại $x = \dfrac{1}{2}$. **1 điểm**

- Vị trí của hai vận động viên trên đường đua để góc nhìn $\boldsymbol{\theta}$ lớn nhất được cho bởi $\boldsymbol{OA = \frac{1}{2}}$ (km) và $\boldsymbol{OB = 2}$ (km). $\boxed{\text{1 điểm}}$

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2018
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Bài A.5 B.5 — 6 điểm

Giả sử $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi, với f' dương và liên tục, sao cho

$$f(0) = 0 \text{ và } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f'(x)(1 + x^2 + f(x))} = +\infty.$$

1. (*3 điểm*) Chứng minh rằng hàm f bị chặn trên.
2. (*1,5 điểm*) Hãy tìm ví dụ về một hàm $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ khả vi và bị chặn trên, với f' dương và liên tục, $f(0) = 0$, sao cho giới hạn
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f'(x)(1 + x^2 + f(x))}$$
tồn tại và hữu hạn.
3. (*1,5 điểm*) Hãy tìm ví dụ về một hàm f thỏa mãn tất cả các điều kiện của đề bài.

Lời giải bài A.5 B.5 — 6 điểm

- Từ giả thiết, f tăng trên $[0, +\infty)$; do đó, $f(x) \geq f(0) = 0$ với mọi $x \geq 0$. **0.5 điểm**
- Vì
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f'(x)(1 + x^2 + f(x))} = +\infty,$$
nên tồn tại $x_0 > 0$ sao cho
$$\frac{1}{f'(x)(1 + x^2 + f(x))} \geq 1 \text{ với mọi } x \geq x_0.$$
Suy ra: $f'(x) \leq \dfrac{1}{1 + x^2 + f(x)} \leq \dfrac{1}{1 + x^2}$ với mọi $x \geq x_0$. **1 điểm**
- $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt \leq \int_{x_0}^{x} \dfrac{dt}{1 + t^2} = \arctan x - \arctan x_0 \quad \forall x \geq x_0$. **1 điểm**
- Do đó $f(x) \leq \dfrac{\pi}{2} - \arctan x_0 + f(x_0) \quad \forall x \geq x_0$. **0.5 điểm**
- Xét hàm số $f(x) = \arctan x$ (bị chặn trên!). Ta có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2} > 0$ trên $[0, +\infty)$. Ngoài ra,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f'(x)(1 + x^2 + f(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + x^2}{1 + x^2 + \arctan x} = 1.$$

1.5 điểm

- **Cách 1:** Xét hàm số $f(x) = \arctan(x^2 + x)$. Ta có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \dfrac{2x+1}{1+(x^2+x)^2} > 0$ trên $[0, +\infty)$. Ngoài ra,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f'(x)(1+x^2+f(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+(x^2+x)^2}{(2x+1)\left(1+x^2+\arctan(x^2+x)\right)} = +\infty.$$

$\boxed{\text{1.5 điểm}}$

Cách 2: Xét hàm số $f(x) = 1 - e^{-x}$. Ta có $f(0) = 0$ và $f'(x) = e^{-x} > 0$ trên $[0, +\infty)$. Ngoài ra,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f'(x)(1+x^2+f(x))} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2+x^2-\dfrac{1}{e^x}} = +\infty.$$

$\boxed{\text{1.5 điểm}}$