Bài B.1. (Tổng = 6 điểm) Cho một số thực a và một số nguyên $n > 0$. Xét ma trận vuông cấp n sau

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \dots & 0 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Tính định thức của A trong các trường hợp

(a) (2 điểm) $n = 4$;

(b) (4 điểm) $n = 2018$.

Hướng dẫn giải

Ký hiệu ma trận cần tính định thức là

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \dots & 0 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}$$

(a) (2 điểm) Tính trực tiếp ta được $|A_4| = a^4 - 14a^2$;

(b) (4 điểm) Khai triển theo cột thứ nhất, ta được

$$|A_n| = a|A_{n-1}| + (-1)^{n-1}(n-1)|B|,$$

với

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & n-1 \\ a & \dots & 0 & n-2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a & 1 \end{vmatrix}_{n-1\times n-1} = (-1)^{n-2}(n-1)a^{n-2}.$$

Do đó

$$|A_n| = a|A_{n-1}| - (n-1)^2a^{n-2} = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = a^n - \frac{1}{6}a^{n-2}(n-1)n(2n-1).$$

Vậy $A_{2018} = a^{2018} - 1009.1345.2017.a^{2016} = a^{2018} - 2,737,280,785.a^{2016}$.

Bài B.2. (A.2.=B.2.) (Tổng = 6 điểm) Người ta khảo sát một mô hình di cư dân số giữa hai vùng đô thị và nông thôn với quy luật như sau: Hằng năm, có 50% dân số vùng nông thôn chuyển về vùng đô thị và đồng thời có 25% dân số vùng đô thị chuyển về vùng nông thôn sinh sống. Giả sử x, y tương ứng là số dân vùng nông thôn và vùng đô thị ở thời điểm ban đầu ($x, y > 0$).

(a) (4 điểm) Hỏi sau k năm dân số của vùng nông thôn và vùng đô thị là bao nhiêu?

(b) (2 điểm) Giả sử ban đầu số người sống ở nông thôn và đô thị là bằng nhau. Có thể đến lúc nào đó dân số của vùng đô thị vượt quá 80% tổng dân số của cả hai vùng không? Giải thích câu trả lời.

Hướng dẫn giải

(a) (4 điểm)

Cách 1:

- Gọi x_k, y_k tương ứng là số dân tại các vùng nông thôn và vùng đô thị sau k năm. Ví dụ, $x_0 = x, y_0 = y$. Ta có $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{4}y_k, y_{k+1} = \frac{3}{4}y_k + \frac{1}{2}x_k$. Nói cách khác

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}.$$

- Từ đó suy ra,

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = A^n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

trong đó $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

- Đa thức đặc trưng của A là $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = (x-1)(x-\frac{1}{4})$. Từ đây, ta suy ra A có các véctơ riêng $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ tương ứng với các giá trị riêng $1, 1/4$. Vậy, nếu ta đặt $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, thì $P^{-1}AP = D$, trong đó D là ma trận đường chéo với các hệ số trên đường chéo lần lượt là 1 và $1/4$. Ta dễ dàng tính được $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

- Suy ra $A = PDP^{-1}$ và

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3\cdot 4^k} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 4^k} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3\cdot 4^k} & \frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4^k} \end{bmatrix}.$$

- Từ đó,

$$x_k = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3\cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 4^k}\right)y,$$

$$y_k = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3\cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4^k}\right)y.$$

Lưu ý: Để tính A^k cũng có thể dùng quy nạp theo n.

Cách 2: Lập luận tương tự trên, ta có $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{4}y_k, y_{k+1} = \frac{3}{4}y_k + \frac{1}{2}x_k$. Thay $y_k = 4x_{k+1} - 2x_k$ vào phương trình thứ hai, ta được

$$4x_k - 5x_{k-1} + x_{k-2} = 0.$$

Từ đó dẫn đến $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{4^k}y - 2\frac{1}{4^k}x$. Vậy

$$x_k = x_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{4^i}y - 2\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{4^i}x.$$

Từ đó suy ra

$$x_k = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^k}\right)y,$$

Tương tự

$$y_k = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3 \cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4^k}\right)y.$$

(b) (2 điểm) Câu trả lời là không. Nếu $y_k = 4x_k$ thì thay vào phương trình trên ta được

$$(2 + 10/4^k)x + (2 - 5/4^k)y = 0.$$

Vì $x, y > 0$ nên điều này chỉ có thể xảy ra $k = 0$ và $y = 4x$, trái với giả thiết.

Bài B.3. (Tổng = 8 điểm) Cho ma trận

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 6 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) (3 điểm) Tính $\boldsymbol{A}^4$;

(b) (5 điểm) Chứng minh rằng hai hệ phương trình sau có cùng tập hợp nghiệm trong $\mathbb{R}^4$,

$$\boldsymbol{Ax = 0}, \tag{1}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{A}^4)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

Hướng dẫn giải

(a) (3 điểm) Ta có

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 15 & 15 & -10 & -10 \\ 15 & 15 & -10 & -10 \\ 35 & 10 & -15 & -15 \\ 10 & 35 & -15 & -15 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 100 & -25 & -25 & -25 \\ 100 & -25 & -25 & -25 \\ 100 & -25 & -25 & -25 \\ 200 & -50 & -50 & -50 \end{pmatrix}$$

Từ đó tính được $\boldsymbol{A}^4 = \boldsymbol{0}$;

(b) (5 điểm)

<u>Cách 1:</u>

- Dễ thấy nghiệm của hệ $\boldsymbol{Ax = 0}$ cũng là nghiệm của hệ còn lại.

- Ngược lại, giả sử véc tơ $\boldsymbol{x}$ là một nghiệm của hệ phương trình (2), ta có

$$\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3\right)\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2\right)\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0},$$

trong đó $\boldsymbol{E}$ là ma trận đơn vị.

- Chứng minh $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}$ là ma trận khả nghịch.

- Vì vậy $\boldsymbol{Ax = 0}$.

Lưu ý: Cũng có thể chứng minh $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2$ là lũy linh để suy ra $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2$ là khả nghịch.

<u>Cách 2:</u>

- Tính trực tiếp ma trận

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 117 & -8 & -33 & -38 \\ 121 & -9 & -34 & -39 \\ 136 & -9 & -39 & -44 \\ 211 & -14 & -59 & -69 \end{pmatrix}$$

- Giải hệ phương trình ta được nghiệm $(\frac{1}{2}x_4, \frac{1}{2}x_4, \frac{1}{2}x_4, x_4)$.

- Mặt khác, giải hệ $Ax = 0$ ta cũng được nghiệm $(\frac{1}{2}x_4, \frac{1}{2}x_4, \frac{1}{2}x_4, x_4)$.

Bài B.4. (Tổng = 4 điểm) Một ma trận vuông được gọi là dương nếu tất cả hệ số của nó là các số thực dương.

(a) (2 điểm) Chứng minh rằng mỗi ma trận dương cấp $\mathbf{2}$ đều có hai giá trị riêng là các số thực khác nhau và giá trị riêng có giá trị tuyệt đối lớn nhất là một số dương;

(b) (2 điểm) Cho $\boldsymbol{A}$ là một ma trận dương cấp $\mathbf{2}$. Giả sử $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ là một véc tơ riêng ứng với giá trị riêng lớn nhất của $\boldsymbol{A}$. Chứng minh rằng hai thành phần của véc tơ $\boldsymbol{v}$ có cùng dấu.

Hướng dẫn giải

(a) (2 điểm) Đặt $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ với $a, b, c, d > 0$. Đa thức đặc trưng của $\boldsymbol{A}$ có dạng $x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$. Biệt thức của đa thức này $\Delta = (a-d)^2 + 4bc > 0$. Vậy $\boldsymbol{A}$ có 2 giá trị riêng phân biệt và đều là số thực.

Vì tổng hai nghiệm bằng $a + d > 0$ nên trị riêng có giá trị tuyệt đối lớn nhất phải là số dương.

(b) (2 điểm) Gọi t là trị riêng lớn nhất và $v = (x, y)$ là véc tơ riêng ứng với t. Ta có

$$(a-t)x + by = cx + (d-t)y = 0.$$

Nếu x và y không cùng dấu thì $a - t$ và b cùng dấu, $d - t$ và c cùng dấu. Do đó $a - t$ và $d - t$ đều > 0. Hay $t < \frac{1}{2}(a+d)$. Điều này mâu thuẫn với việc t là giá trị riêng lớn nhất (vì tổng các trị riêng bằng $a + d$).

Bài B.5. (Tổng = 6 điểm) Cho trước $\mathbf{6}$ điểm phân biệt trên một đường tròn.

(a) (3 điểm) Chia $\mathbf{6}$ điểm đó thành ba cặp và nối hai điểm trong mỗi cặp bởi một dây cung. Hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho không có hai dây cung nào cắt nhau?

(b) (3 điểm) Đánh số các điểm đó lần lượt từ $\mathbf{1, 2, \ldots, 6}$. Mỗi dây cung nối hai điểm bất kỳ được gán với giá trị tuyệt đối của hiệu các số ở hai đầu mút. Chọn ra 3 dây cung, đôi một không có đầu mút chung, rồi lấy tổng của các số gán với các dây cung đó. Hỏi giá trị lớn nhất của tổng nhận được bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

(a) (3 điểm) Kí hiệu các điểm được đánh dấu, theo chiều kim đồng hồ, lần lượt là $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_6}$. Dễ thấy rằng $\boldsymbol{A_1}$ phải được nối với $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_6}$ hoặc $\boldsymbol{A_4}$.

- Nếu $\boldsymbol{A_1}$ nối với $\boldsymbol{A_4}$ thì ta phải nối $\boldsymbol{A_2}$ với $\boldsymbol{A_3}$ và $\boldsymbol{A_5}$ với $\boldsymbol{A_6}$.

- Nếu $\boldsymbol{A_1}$ nối với $\boldsymbol{A_2}$ thì hoặc là $\boldsymbol{A_6}$ nối với $\boldsymbol{A_5}$ còn $\boldsymbol{A_3}$ nối với $\boldsymbol{A_4}$, hoặc là $\boldsymbol{A_6}$ nối với $\boldsymbol{A_3}$ và $\boldsymbol{A_5}$ nối với $\boldsymbol{A_4}$.

- Tương tự, nếu $\boldsymbol{A_1}$ nối với $\boldsymbol{A_6}$ thì hoặc là $\boldsymbol{A_2}$ nối với $\boldsymbol{A_3}$ và $\boldsymbol{A_4}$ với $\boldsymbol{A_5}$ hoặc là $\boldsymbol{A_2}$ nối với $\boldsymbol{A_5}$ và $\boldsymbol{A_3}$ với $\boldsymbol{A_4}$.

Như vậy, có cả thảy $\mathbf{5}$ cách nối.

(b) (3 điểm) Tổng của các số gán cho các dây cung là

$$\boldsymbol{S = |a - x| + |b - y| + |c - z|,}$$

với $\boldsymbol{a, b, c, x, y, z}$ là các số từ $\mathbf{1, 2, \ldots, 6}$. Tổng này lớn nhất khi $\boldsymbol{a, b, c}$ lớn nhất và $\boldsymbol{x, y, z}$ nhỏ nhất.

Kết luận: $\boldsymbol{\max(S) = 9}$, đạt được nếu $\boldsymbol{x = 1, y = 2, z = 3}$, $\boldsymbol{a = 4}$, $\boldsymbol{b = 5}$, $\boldsymbol{c = 6}$.