HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN VÀ HỌC SINH NĂM 2018**

(*Đề thi có 02 trang*)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN: ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút.

Bảng A

Bài A.1. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 6 & -5 \\ 8 & 12 & -10 \end{pmatrix}.$$

(a) (2 điểm) Tính A^4;

(b) (4 điểm) Tìm số nguyên dương N nhỏ nhất sao cho $\mathbf{rank}(A^k) = \mathbf{rank}(A^{k+1})$ với mọi $k \geq N$, trong đó $\mathbf{rank}(M)$ là hạng của một ma trận M (có giải thích rõ các lập luận và tính toán).

Bài A.2. Người ta khảo sát một mô hình di cư dân số giữa hai vùng đô thị và nông thôn với quy luật như sau: Hằng năm, có 50% dân số vùng nông thôn chuyển về vùng đô thị và đồng thời có 25% dân số vùng đô thị chuyển về vùng nông thôn sinh sống. Giả sử x, y tương ứng là số dân vùng nông thôn và vùng đô thị ở thời điểm ban đầu ($x, y > 0$).

(a) (4 điểm) Hỏi sau k năm dân số của vùng nông thôn và vùng đô thị là bao nhiêu?

(b) (2 điểm) Giả sử ban đầu số người sống ở nông thôn và đô thị là bằng nhau. Có thể đến lúc nào đó dân số của vùng đô thị vượt quá 80% tổng dân số của cả hai vùng không? Giải thích câu trả lời.

Bài A.3. (a) (2 điểm) Giả sử X, A là các ma trận vuông với hệ số thực thoả mãn $X^2 = A$. Chứng minh rằng $AX = XA$;

(b) (4 điểm) Tìm số các ma trận vuông X với hệ số thực thỏa mãn

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Bài A.4. Một ma trận vuông được gọi là dương nếu tất cả hệ số của nó là các số thực dương.

(a) (2 điểm) Chứng minh rằng mỗi ma trận dương cấp 2 đều có hai giá trị riêng là các số thực khác nhau và giá trị riêng có giá trị tuyệt đối lớn nhất là một số dương;

(b) (2 điểm) Cho A là một ma trận dương cấp 2. Giả sử $v \in \mathbb{R}^2$ là một véc tơ riêng ứng với giá trị riêng lớn nhất của A. Chứng minh rằng hai thành phần của véc tơ v có cùng dấu;

(c) (2 điểm) Cho A là một ma trận dương cấp 3. Xét tập các giá trị riêng của A (kể cả các giá trị phức), chứng minh rằng giá trị riêng có mô đun lớn nhất của A là một số thực dương.

Bài A.5. Cho trước $\mathbf{6}$ điểm phân biệt trên một đường tròn.

(a) (3 điểm) Chia $\mathbf{6}$ điểm đó thành ba cặp và nối hai điểm trong mỗi cặp bởi một dây cung. Hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho không có hai dây cung nào cắt nhau?

(b) (3 điểm) Đánh số một cách ngẫu nhiên các điểm đó từ $\mathbf{1, 2, \ldots, 6}$. Mỗi dây cung nối hai điểm bất kỳ được gán với giá trị tuyệt đối của hiệu các số ở hai đầu mút. Chứng minh rằng luôn tìm được ba dây cung, đôi một không có điểm chung, sao cho tổng của các số gán với ba dây cung đó bằng $\mathbf{9}$.

Hết

<u>Ghi chú</u>: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*