Bài A.1. (Tổng=6 điểm) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 6 & -5 \\ 8 & 12 & -10 \end{pmatrix}.$$

(a) (2 điểm) Tính A^4;

(b) (4 điểm) Tìm số nguyên dương N nhỏ nhất sao cho $\mathbf{rank}(A^k) = \mathbf{rank}(A^{k+1})$ với mọi $k \geq N$, trong đó $\mathbf{rank}(M)$ là hạng của một ma trận M (có giải thích rõ các lập luận và tính toán).

Hướng dẫn giải

(a) (2 điểm)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ -8 & -8 & 8 \\ -16 & -16 & 16 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} -16 & -16 & 16 \\ -32 & -32 & 32 \\ -64 & -64 & 64 \end{pmatrix}.$$

(b) (4 điểm)

Cách 1: Tính trực tiếp.

- Tính $\mathbf{rank}(A) = 2$.
- Tính

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ -8 & -8 & 8 \\ -16 & -16 & 16 \end{pmatrix}.$$

và do đó $\mathbf{rank}(A^2) = 1$.

- Tổng quát, với $k > 1$ thì

$$A^k = \begin{pmatrix} -(-2)^k & -(-2)^k & (-2)^k \\ (-2)^{k+1} & (-2)^{k+1} & -(-2)^{k+1} \\ -(-2)^{k+2} & -(-2)^{k+2} & (-2)^{k+2} \end{pmatrix} = (-2)^k \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

và $\mathbf{rank}(A^k) = 1$.

Vậy $N = 2$.

Cách 2: Sử dụng dạng chuẩn Jordan.

- Tính dạng chuẩn Jordan của A, có

$$A \sim B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Do đó

$$A^k \sim B^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix}$$

với mọi $k > 1$. Nói riêng, $\mathbf{rank}(A^k) = 1$ với mọi $k > 1$.

Vậy số nhỏ nhất cần tìm là $N = 2$.

Bài A.2. (A.2.=B.2.) (Tổng = 6 điểm) Người ta khảo sát một mô hình di cư dân số giữa hai vùng đô thị và nông thôn với quy luật như sau: Hằng năm, có 50% dân số vùng nông thôn chuyển về vùng đô thị và đồng thời có 25% dân số vùng đô thị chuyển về vùng nông thôn sinh sống. Giả sử x, y tương ứng là số dân vùng nông thôn và vùng đô thị ở thời điểm ban đầu ($x, y > 0$).

(a) (4 điểm) Hỏi sau k năm dân số của vùng nông thôn và vùng đô thị là bao nhiêu?

(b) (2 điểm) Giả sử ban đầu số người sống ở nông thôn và đô thị là bằng nhau. Có thể đến lúc nào đó dân số của vùng đô thị vượt quá 80% tổng dân số của cả hai vùng không? Giải thích câu trả lời.

Hướng dẫn giải

(a) (4 điểm)

Cách 1:

- Gọi x_k, y_k tương ứng là số dân tại các vùng nông thôn và vùng đô thị sau k năm. Ví dụ, $x_0 = x, y_0 = y$. Ta có $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{4}y_k, y_{k+1} = \frac{3}{4}y_k + \frac{1}{2}x_k$. Nói cách khác

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}.$$

- Từ đó suy ra,

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = A^n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

trong đó $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

- Đa thức đặc trưng của A là $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = (x-1)(x-\frac{1}{4})$. Từ đây, ta suy ra A có các véctơ riêng $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ tương ứng với các giá trị riêng $1, 1/4$. Vậy, nếu ta đặt $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, thì $P^{-1}AP = D$, trong đó D là ma trận đường chéo với các hệ số trên đường chéo lần lượt là 1 và $1/4$. Ta dễ dàng tính được $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

- Suy ra $A = PDP^{-1}$ và

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3\cdot 4^k} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 4^k} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3\cdot 4^k} & \frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4^k} \end{bmatrix}.$$

- Từ đó,

$$x_k = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3\cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 4^k}\right)y,$$

$$y_k = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3\cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4^k}\right)y.$$

Lưu ý: Để tính A^k cũng có thể dùng quy nạp theo n.

Cách 2: Lập luận tương tự trên, ta có $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{4}y_k, y_{k+1} = \frac{3}{4}y_k + \frac{1}{2}x_k$. Thay $y_k = 4x_{k+1} - 2x_k$ vào phương trình thứ hai, ta được

$$4x_k - 5x_{k-1} + x_{k-2} = 0.$$

Từ đó dẫn đến $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{4^k}y - 2\frac{1}{4^k}x$. Vậy

$$x_k = x_0 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{4^i}y - 2\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{4^i}x.$$

Từ đó suy ra

$$x_k = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^k}\right)y,$$

Tương tự

$$y_k = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3 \cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4^k}\right)y.$$

(b) (2 điểm) Câu trả lời là không. Nếu $y_k = 4x_k$ thì thay vào phương trình trên ta được

$$(2 + 10/4^k)x + (2 - 5/4^k)y = 0.$$

Vì $x, y > 0$ nên điều này chỉ có thể xảy ra $k = 0$ và $y = 4x$, trái với giả thiết.

Bài A.3. (Tổng = 6 điểm)

(a) (2 điểm) Giả sử X, A là các ma trận vuông với hệ số thực thoả mãn $X^2 = A$. Chứng minh rằng $AX = XA$;

(b) (4 điểm) Tìm số các ma trận vuông X với hệ số thực thỏa mãn

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Hướng dẫn giải

(a) (2 điểm) Ta có $XA = X^3 = AX$.

(b) (4 điểm) Gọi ma trận bên phải là A, như vậy $X^2 = A$. Dưới đây là hai cách giải

<u>Cách 1:</u> Giải hai hệ $AX = XA$ và $X^2 = A$.

- Giả sử $X = (x_{ij})_{3\times 3}$. Từ $AX = XA$, ta được hệ phương trình của x_{ij}, rút gọn lại là

$$\begin{cases} x_{21} = x_{31} = x_{32} = x_{12} = 0, \\ x_{22} + 6x_{23} - x_{33} = 0 \\ x_{11} + 15x_{13} - x_{33} = 0. \end{cases}$$

- Kết hợp với $X^2 = A$, ta được $x_{11}^2 = 1$, $x_{22}^2 = 4$, $x_{33}^2 = 16$. Từ đó tính được x_{13}, x_{23}, các giá trị nhận được đều thỏa mãn $X^2 = A$. Vậy có tất cả $2^3 = 8$ ma trận thỏa mãn đề bài.

<u>Cách 2:</u> - Đa thức đặc trưng của A là $\Pi_A(x) = \det(xI_3 - A) = (x-1)(x-4)(x-16)$.

- Đa thức có 3 nghiệm đơn nên A có thể chéo hoá được với các hệ số trên đường chéo bằng $1, 4, 16$. Như vậy, ta có thể viết $A = P^{-1}DP$, trong đó D là ma trận vuông với các hệ số trên đường chéo lần lượt là $1, 4, 16$ và P là một ma trận khả nghịch. Ta suy ra $PX^2P^{-1} = D$.

- Như vậy, nếu ta đặt $PXP^{-1} = Y$ thì phương trình ban đầu trở thành

$$Y^2 = D. \quad (*)$$

Theo câu (a), ta suy ra $YD = DY$. Từ đây, dễ thấy Y phải là một ma trận đường chéo. Gọi y_1, y_2, y_3 tương ứng là các hệ số trên đường chéo của Y. Thế thì (*) tương đương với $y_1^2 = 1, y_2^2 = 4, y_3^2 = 16$. Từ đây, ta suy ra 8 nghiệm là $(y_1, y_2, y_3) = (\pm 1, \pm 2, \pm 4)$. Ta kết luận rằng (*) có 8 nghiệm và vì thế phương trình ban đầu có 8 nghiệm.

Bài A.4. (Tổng = 6 điểm) Một ma trận vuông được gọi là dương nếu tất cả hệ số của nó là các số thực dương.

(a) (2 điểm) Chứng minh rằng mỗi ma trận dương cấp 2 đều có hai giá trị riêng là các số thực khác nhau và giá trị riêng có giá trị tuyệt đối lớn nhất là một số dương;

(b) (2 điểm) Cho A là một ma trận dương cấp 2. Giả sử $v \in \mathbb{R}^2$ là một véc tơ riêng ứng với giá trị riêng lớn nhất của A. Chứng minh rằng hai thành phần của véc tơ v có cùng dấu;

(c) (2 điểm) Cho A là một ma trận dương cấp 3. Xét tập các giá trị riêng của A (kể cả các giá trị phức), chứng minh rằng giá trị riêng có mô đun lớn nhất của A là một số thực dương.

Hướng dẫn giải

(a) (2 điểm) Đặt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ với $a, b, c, d > 0$. Đa thức đặc trưng của A có dạng $x^2 - (a + d)x + (ad - bc)$. Biệt thức của đa thức này $\Delta = (a - d)^2 + 4bc > 0$. Vậy A có 2 giá trị riêng phân biệt và đều là số thực.

Vì tổng hai nghiệm bằng $a + d > 0$ nên trị riêng có giá trị tuyệt đối lớn nhất phải là số dương.

(b) (2 điểm) Gọi t là trị riêng lớn nhất và $v = (x, y)$ là véc tơ riêng ứng với t. Ta có

$$(a - t)x + by = cx + (d - t)y = 0.$$

Nếu x và y không cùng dấu thì $a - t$ và b cùng dấu, $d - t$ và c cùng dấu. Do đó $a - t$ và $d - t$ đều > 0. Hay $t < \frac{1}{2}(a + d)$. Điều này mâu thuẫn với việc t là giá trị riêng lớn nhất (vì tổng các trị riêng bằng $a + d$).

(c) (2 điểm) A có ít nhất một giá trị riêng khác 0. Thật vậy, nếu tất cả các trị riêng của A đều bằng 0 thì theo định lý Cayley-Hamilton, $A^3 = 0$. Điều này mâu thuẫn với việc A là ma trận dương.

Đặt t là trị riêng của A mà có mô đun lớn nhất (t có thể là số phức). Sau đây ta ký hiệu $|x|$ là véc tơ mà thành phần là mô đun của các thành phần của véc tơ x. Ta viết $x \geq y$ nếu các tọa độ của x đều $\geq$ tọa độ tương ứng của y. Giả sử x là véc tơ riêng của A ứng với t. Ta có (theo bất đẳng thức tam giác $|a + b| \leq |a| + |b|$),

$$|Ax| \leq A|x|.$$

Từ đó

$$|t||x| = |tx| =\leq A|x|.$$

Ta cần chứng minh dấu bằng xảy ra. Giả sử trái lại. Đặt $B = A/|t|$. Thì $B|x| - |x| = y > 0$. Nghĩa là véc tơ y khác 0 và có các thành phần không âm. Từ đó By có tất cả các thành phần > 0. Đặt $z := B|x|$ thì ta có

$$Bz - z = By.$$

Từ tính chất của By nói trên, tồn tại $\lambda > 1$ sao cho

$$Bz > \lambda z.$$

Theo trên thì z là véc tơ có các thành phần đều dương, B có các trị riêng đều có mô đun ≤ 1. Tác động B nhiều lần vào bất đẳng thức cuối cùng ta suy ra vô lý.

Bài A.5. (Tổng = 6 điểm) Cho trước $\mathbf{6}$ điểm phân biệt trên một đường tròn.

(a) (3 điểm) Chia $\mathbf{6}$ điểm đó thành ba cặp và nối hai điểm trong mỗi cặp bởi một dây cung. Hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho không có hai dây cung nào cắt nhau?

(b) (3 điểm) Đánh số một cách ngẫu nhiên các điểm đó từ $\mathbf{1, 2, \ldots, 6}$. Mỗi dây cung nối hai điểm bất kỳ được gán với giá trị tuyệt đối của hiệu các số ở hai đầu mút. Chứng minh rằng luôn tìm được ba dây cung, đôi một không có điểm chung, sao cho tổng của các số gán với ba dây cung đó bằng $\mathbf{9}$.

Hướng dẫn giải

(a) (3 điểm) Kí hiệu các điểm được đánh dấu, theo chiều kim đồng hồ, lần lượt là $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Dễ thấy rằng A_1 phải được nối với A_2, A_6 hoặc A_4.

- Nếu A_1 nối với A_4 thì ta phải nối A_2 với A_3 và A_5 với A_6.

- Nếu A_1 nối với A_2 thì hoặc là A_6 nối với A_5 còn A_3 nối với A_4, hoặc là A_6 nối với A_3 và A_5 nối với A_4.

- Tương tự, nếu A_1 nối với A_6 thì hoặc là A_2 nối với A_3 và A_4 với A_5 hoặc là A_2 nối với A_5 và A_3 với A_4.

Như vậy, có cả thảy $\mathbf{5}$ cách nối.

(b) (3 điểm) Gọi X là tập 3 điểm được gán các số $\mathbf{1, 2, 3}$ và Y là tập 3 điểm còn lại. Ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại 3 dây cung không có điểm chung, mỗi dây cung nối một điểm của X và một điểm của Y. Một cách nối như vậy thoả mãn yêu cầu bài toán vì tổng các số tương ứng với 3 dây cung này bằng $\mathbf{4+5+6-1-2-3=9}$.

- Dễ thấy rằng có một điểm của X nằm kề một điểm của Y (đó là hai điểm liên tiếp nếu ta đi theo chiều kim đồng hồ). Kẻ dây cung nối 2 điểm này rồi loại bỏ 2 điểm đánh dấu này lẫn dây cung đi, ta còn lại 4 điểm được đánh dấu trên đường tròn và 2 tập con X', Y' tương ứng, mỗi tập gồm 2 điểm được đánh dấu.

- Bây giờ, lập luận tương tự, ta cũng suy ra có một điểm của X' kề nhau với một điểm Y' trên đường tròn đã bỏ đi 2 điểm trước đó. Kẻ dây cung nối 2 điểm này cũng như dây cung nối 2 điểm còn lại. Bây giờ, khôi phục lại dây cung ban đầu. Dễ thấy, 3 dây cung được kẻ đôi một không có điểm chung. Bài toán được giải quyết.