



(Đề thi có 02 trang)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: Giải tích

Thời gian làm bài: 180 phút

**Bảng A**

**Bài A.1.** Cho  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  là dãy số được xác định bởi các điều kiện

$$x_1 = 2019, \quad x_{n+1} = \ln(1 + x_n) - \frac{2x_n}{2 + x_n} \quad \forall n \geq 1.$$

1. (2 điểm) Chứng minh rằng  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  là một dãy số không âm.
2. (2 điểm) Chứng minh rằng tồn tại số thực  $c \in (0, 1)$  sao cho

$$|x_{n+1} - x_n| \leq c|x_n - x_{n-1}| \quad \forall n \geq 2.$$

3. (2 điểm) Chứng minh rằng dãy  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

**Bài A.2.** (6 điểm) Gọi  $D$  là tập hợp tất cả các hàm số  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  sao cho

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Với  $x_0, y_0$  là hai số thực đã được cho trước, hãy tìm

$$\max_{f \in D} |f(x_0) - f(y_0)|.$$

**Bài A.3.** (6 điểm) Một doanh nghiệp sản xuất ô-tô có hàm sản xuất là hàm Cobb-Douglas:

$$Q = K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}};$$

trong đó,  $K$  và  $L$  lần lượt ký hiệu số đơn vị vốn tư bản và số đơn vị lao động mà doanh nghiệp thuê được, còn  $Q$  ký hiệu số ô-tô sản xuất ra được.

Giả sử giá thuê một đơn vị vốn tư bản là  $w_k$ , giá thuê một đơn vị lao động là  $w_l$  và, ngoài chi phí thuê lao động và vốn tư bản, doanh nghiệp còn phải chịu một chi phí cố định là  $C_0$ . Khi đó, hàm số

$$C = w_k K + w_l L + C_0$$

mô tả tổng chi phí mà doanh nghiệp phải bỏ ra, thường được gọi là *hàm chi phí sản xuất*.

Năm 2019 doanh nghiệp dự định sản xuất 2000 chiếc ô-tô. Nếu bạn là chủ doanh nghiệp, để chi phí sản xuất là thấp nhất, bạn sẽ thuê bao nhiêu đơn vị vốn tư bản và bao nhiêu đơn vị lao động trong năm 2019 biết rằng  $C_0 = 100$ ,  $w_l = 4$  và  $w_k = 8$ ?

**Bài A.4.** Cho  $f$  là một hàm số khả vi liên tục trên  $[0, 1]$  và có  $f(1) = 0$ .

1. (4 điểm) Chứng minh rằng

$$\int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 x|f'(x)|dx.$$

2. (2 điểm) Tìm ví dụ về một hàm số  $f$  khả vi liên tục trên  $[0, 1]$ , với  $f(1) = 0$ , sao cho

$$\int_0^1 |f(x)|dx < \int_0^1 x|f'(x)|dx.$$

**Bài A.5.** Cho  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  là một hàm số liên tục và đơn điệu không tăng.

1. (4 điểm) Giả sử tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) + \int_0^x f(t)dt \right) < +\infty.$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0.$$

2. (2 điểm) Tìm ví dụ về một hàm số  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  liên tục, đơn điệu không tăng, sao cho

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) + \int_0^x f(t)dt \right) = +\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0.$$

**HẾT**

Ghi chú: Thí sinh **không** được phép sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi **không** giải thích gì thêm.