HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2019
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải các bài A.1 B.1 — 6 điểm

- 1. Đặt $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$, ta có $f'(x) = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} \geq 0 \ \forall x \geq 0$. **1 điểm**

- Vậy, f đơn điệu không giảm trên $[0, +\infty)$. Do đó, $f(x) \geq f(0) = 0 \ \forall x \geq 0$. Mà $x_1 \geq 0$ nên (bằng quy nạp) $x_{n+1} = f(x_n)$ xác định và không âm với mọi $n \geq 1$. **1 điểm**

- 2. Ta có $(1+x)\cdot(2+x)^2 > x \cdot 4x = 4x^2$ nên $f'(x) = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} < \frac{1}{4} \ \forall x \geq 0$. Vì thế, áp dụng định lý số gia giới nội (định lý giá trị trung bình) của Lagrange, ta có

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \cdot |b-a| \leq \frac{1}{4}|b-a| \tag{1}$$

  với mọi $a, b \in [0, +\infty)$ (c ở giữa và phụ thuộc vào a và b). **1 điểm**

- Từ (1), suy ra

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq \frac{1}{4}|x_n - x_{n-1}| \quad \forall n \geq 2$$

  (điều phải chứng minh). **1 điểm**

- 3. **Cách 1:** Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo $n \geq 1$ rằng

$$|x_n| \leq \frac{2019}{4^{n-1}}. \tag{2}$$

  Hiển nhiên, (2) đúng khi $n = 1$. **0.5 điểm**

- Giả sử $n \geq 2$ và (2) đã đúng đến $n-1$. Khi đó, theo (1) và giả thiết quy nạp,

$$|x_n - 0| = |f(x_{n-1}) - f(0)| \leq \frac{1}{4}|x_{n-1} - 0| \leq \frac{2019}{4^{n-1}};$$

  vậy, (2) đúng với mọi $n \geq 1$. **1 điểm**

- Từ (2), ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. **0.5 điểm**

- 3. **Cách 2:** Từ ý 2., ta thấy

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{4}|x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq \frac{1}{4^{n-1}}|x_2 - x_1|.$$

  Vì thế, với mọi $n, p \in \mathbb{N}^*$ ta có:

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \sum_{k=1}^{p} |x_{n+k} - x_{n+k-1}| \leq \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{4^{n+k-2}} |x_2 - x_1|$$
$$= \frac{1}{4^{n-1}} |x_2 - x_1| \cdot \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{4^{k-1}} \leq \frac{1}{4^{n-1}} |x_2 - x_1| \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \to 0 \text{ khi } n \to +\infty.$$

Vậy, (x_n) là một dãy Cauchy nên nó hội tụ. $\boxed{\text{1 điểm}}$

- Đặt $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n \geq 0$. Chuyển công thức truy hồi qua giới hạn ta được

$$\alpha = \ln(1 + \alpha) - \frac{2\alpha}{2 + \alpha} \Leftrightarrow g(\alpha) = 0; \tag{3}$$

trong đó, $g(x) = x - \ln(1 + x) + \dfrac{2x}{2 + x} = x - f(x)$ với mọi $x \geq 0$. Dễ thấy $\alpha = 0$ thỏa (3). Mặt khác,

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{(1 + x)(2 + x)^2} > 0 \quad \forall x \geq 0.$$

Từ đó, g tăng ngặt trên $[0, +\infty)$. Vậy, $\alpha = 0$ là nghiệm (không âm) duy nhất của (3); suy ra: $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$. $\boxed{\text{1 điểm}}$

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2019
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải bài A.2 — 6 điểm

- Theo định nghĩa của D, ta có $|f(x_0) - f(y_0)| \leq |x_0 - y_0|$ với mọi $f \in D$. **1 điểm**
- Suy ra

$$\sup_{f\in D} |f(x_0) - f(y_0)| \leq |x_0 - y_0|. \tag{1}$$

1 điểm

- **Cách 1:** Đặt $g(x) = |x - x_0| \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. **1 điểm**
- Theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$$g(x) - g(y) = |x - x_0| - |y - x_0| \leq |(x - x_0) - (y - x_0)| = |x - y|$$

  với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. **1 điểm**
- Bằng cách hoán đổi vị trí của x và y, ta thấy $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Do đó, $g \in D$. **1 điểm**
- Suy ra $\sup_{f\in D} |f(x_0) - f(y_0)| \geq |g(x_0) - g(y_0)| = |x_0 - y_0|$. Kết hợp với (1) ta có

$$\max_{f\in D} |f(x_0) - f(y_0)| = |x_0 - y_0|.$$

1 điểm

- **Cách 2:** Đặt $g(x) = \max\{x - y_0, 0\} \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. **0,5 điểm**
- Xét tùy ý $x, y \in \mathbb{R}$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$|g(x) - g(y)| \leq |x - y|. \tag{2}$$

  Thật vậy, nếu x và y cùng lớn hơn y_0 thì (2) trở thành đẳng thức. Nếu x và y cùng bé hơn y_0 thì vế trái bằng 0 nên (2) hiển nhiên đúng. **1 điểm**
- Trong trường hợp còn lại, không mất tính tổng quát, xem $x \leq y_0 \leq y$. Khi đó, $|g(x) - g(y)| = |0 - (y - y_0)| = |y_0 - y| \leq |x - y|$ nên (2) luôn đúng. Do đó, $g \in D$. **1 điểm**
- Tương tự, nếu đặt $h(x) = \max\{x - x_0, 0\}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta cũng có $h \in D$. **0,5 điểm**
- Suy ra

$$\begin{aligned}\sup_{f\in D} |f(x_0) - f(y_0)| &\geq \max\{g(x_0) - g(y_0), h(y_0) - h(x_0)\} = \max\{g(x_0), h(y_0)\} \\ &\geq \max\{x_0 - y_0, y_0 - x_0\} = |x_0 - y_0|.\end{aligned}$$

  Kết hợp với (1) ta có

$$\max_{f\in D} |f(x_0) - f(y_0)| = |x_0 - y_0|.$$

1 điểm

ĐÁP ÁN

Lời giải bài B.2 — 6 điểm

- 1. Khi $x \neq 0$, ta có $f(x) = \ln(1+x^2)\cos\frac{1}{x}$ và

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \cdot \cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \cdot \ln(1+x^2) \cdot \sin\frac{1}{x}.$$

2 điểm

- 2. Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \cdot x\cos\frac{1}{x}$. — 1 điểm
- Vì $x \to 0$ và $\cos\frac{1}{x}$ bị chặn (bởi 1) nên $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x}\right) = 0$. — 0.5 điểm
- Do $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$, nên giới hạn ở trên bằng $f'(0) = 1 \cdot 0 = 0$. — 0.5 điểm
- 3. Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x}{1+x^2} \cdot \cos\frac{1}{x} + \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \cdot \sin\frac{1}{x}\right)$.
- Chọn dãy $x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0$ khi $n \to +\infty$. Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(x_n) = 0$. — 1 điểm
- Chọn dãy $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \to 0$ khi $n \to +\infty$. Ta lại có $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(y_n) = 1 \neq 0$, nên $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ không tồn tại. Vậy, hàm số f' không liên tục tại $x = 0$. — 1 điểm

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2019
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải các bài A.3 B.3 — 6 điểm

- Theo đề bài, ta có hàm chi phí sản xuất: $C = 8K + 4L + 100$. Và ta cần tìm K, L sao cho C đạt cực tiểu với điều kiện ràng buộc

$$K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}} = 2000.$$

2 điểm

- **Cách 1:** Theo điều kiện ràng buộc, $L = \dfrac{(2000)^3}{K^2}$, nên ta biểu diễn được

$$C = 8K + 4 \cdot \frac{(2000)^3}{K^2} + 100$$

như là hàm của một biến số $K \in (0, +\infty)$. 1 điểm

- Ta có: $C'(K) = 8 - 8 \cdot \dfrac{(2000)^3}{K^3}$, $C''(K) = 24 \cdot \dfrac{(2000)^3}{K^4}$ với mọi $K \in (0, +\infty)$. 1 điểm

- Phương trình $C' = 0$ có nghiệm duy nhất $K = 2000$. Để ý: $C''(K) > 0$ với mọi K. Do đó, C đạt cực tiểu (tuyệt đối) tại $K = 2000$. 1,5 điểm

- Vậy, để chi phí sản xuất là thấp nhất, năm 2019 doanh nghiệp cần thuê $K = 2000$ đơn vị vốn tư bản và $L = 2000$ đơn vị lao động. 0,5 điểm

- **Cách 2:** Áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN cho 3 số dương và sử dụng điều kiện ràng buộc ta có

$$C = 8K + 4L + 100 = 4 \cdot (2K + L) + 100 \geq 4 \cdot 3K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}} + 100 = 24100;$$

3 điểm

- dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $K = L = 2000$. 0,5 điểm

- Vậy, để chi phí sản xuất là thấp nhất, năm 2019 doanh nghiệp cần thuê $K = 2000$ đơn vị vốn tư bản và $L = 2000$ đơn vị lao động. 0,5 điểm

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2019
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải các bài A.4 B.4 — 6 điểm

- 1. Đặt $F(x) = \int_x^1 |f'(t)|\mathrm{d}t$, ta có $F(1) = 0$ và $F'(x) = -|f'(x)|$ $(\forall x \in [0,1])$. — 1 điểm
- Hơn nữa,

$$F(x) = \int_x^1 |f'(t)|\mathrm{d}t \geq \left| \int_x^1 f'(t)\mathrm{d}t \right| = |f(1) - f(x)| = |f(x)| \quad (\forall x \in [0,1]). \tag{1}$$

1 điểm

- Lại có

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x = xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xF'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x|f'(x)|\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Từ (1) and (2) suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. — 2 điểm

- 2. Đặt $f(x) = x(1-x)$, ta có một hàm f khả vi liên tục trên $[0,1]$, với $f(1) = 0$ và

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{6}, \quad \int_0^1 x|f'(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

Vậy, f thỏa yêu cầu đề bài. — 2 điểm

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2019
Môn thi: Giải tích
Thời gian làm bài: 180 phút

ĐÁP ÁN

Lời giải các bài A.5 B.5 — 6 điểm

- 1. Hàm f liên tục, đơn điệu không tăng và bị chặn dưới bởi 0 nên tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. **1 điểm**

- Từ giả thiết suy ra sự hội tụ của tích phân suy rộng

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

1 điểm

- Với $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. Do đó, $\lim\limits_{x\to+\infty}(F(2x)-F(x)) = 0$. **1 điểm**

- Từ tính đơn điệu không tăng của $f \geq 0$, ta có

$$F(2x) - F(x) = \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t \geq xf(2x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

nên $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(2x) = 0$. Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ (điều phải chứng minh). **1 điểm**

- 2. **Cách 1:** Đặt $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$ với mọi $x \geq 0$. Dễ thấy f là một hàm dương, liên tục và giảm trên $[0,+\infty)$, với $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$. Hơn nữa: **1 điểm**

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}\mathrm{d}x = \ln\ln(x+2)\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = +\infty.$$

1 điểm

- **Cách 2:** Đặt $f(x) = \dfrac{2(x+1)}{[(x+1)^2+1]\ln[(x+1)^2+1]}$ với mọi $x \geq 0$. Dễ thấy f là một hàm dương, liên tục trên $[0,+\infty)$, và $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Hơn nữa: **0.5 điểm**

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{2(x+1)}{[(x+1)^2+1]\ln[(x+1)^2+1]}\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1}{u}\mathrm{d}u$$
$$= \ln u\Big|_{u=\ln 2}^{u=+\infty} = +\infty;$$

trong đó, $u = \ln[(x+1)^2+1]$. Vậy, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right) = +\infty$. **1 điểm**

- Cuối cùng, trên $[0,+\infty)$, các hàm $g(x) = \dfrac{x+1}{(x+1)^2+1}$, $h(x) = \dfrac{2}{\ln[(x+1)^2+1]}$ dương và giảm nên $f(x) = g(x)h(x)$ cũng giảm. **0.5 điểm**