HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM KỲ THI OLYMPIC TOÁN THPT 2016

Chủ đề: Một mô hình đô thị lạ

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐỀ THAM KHẢO

Tại thành phố Olympic, mỗi nhà có *số nhà* là một số nguyên dương, còn số nhà của Tòa thị chính là 0. Nhà trong Olympic có số nhà đôi một khác nhau và lấp đầy tập các số nguyên dương. Do bản chất cong đặc thù của đường đi trong thành phố Olympic, người ta nhận thấy khoảng cách từ nhà n đến nhà m được tính như sau: nếu $m-n=3^k l$, trong đó l là một số nguyên không chia hết cho 3 và k là một số nguyên không âm, thì $d(m,n)=3^{-k}$.

1) Trong số các nhà có số nhà dương, bé hơn 100, tìm (kèm theo chứng minh) tất cả những nhà gần tòa thị chính nhất.
2) Thử tìm một dãy vô hạn số nhà (h_n) sao cho $d(17,h_1)>d(17,h_2)>\cdots>d(17,h_n)>\cdots$

Tập tất cả các nhà có cùng khoảng cách đến tòa thị chính như nhà n sẽ được gọi là *lân cận* của nhà n và sẽ được ký hiệu là $\mathcal{N}(n)$. Dưới dạng công thức:

$$\mathcal{N}(n)=\{m\in\mathbb{N}^* \mid d(m,0)=d(n,0)\}.$$

Ta có thể hình dung $\mathcal{N}(n)$ như một đường tròn bán kính $d(n,0)$, với tâm là tòa thị chính.

3) Giả sử nhà n có $d(n,0)=1/27$. Hãy xác định mười số nguyên dương m bé nhất sao cho $m\in\mathcal{N}(n)$.
4) Chứng minh rằng $d(a,c)\le\max\{d(a,b),d(b,c)\}$ với mọi a,b và c.

Có một điều đáng tiếc là thành phố Olympic đã trở nên đông đúc mà người ta không thể xây dựng thêm: mỗi số nguyên không âm đều đã tương ứng với một nhà (hoặc, với tòa thị chính, trong trường hợp số 0). Trong tình thế đó lại có 18 gia đình mới chuyển đến và mong được định cư ở thành phố này. Sau nhiều lần cân nhắc, tuyệt nhiên không chấp nhận việc dùng số nhà âm, thành phố quyết định đi theo một phương án khác: đúng ngày 17 tháng Tư, xe chuyên dụng sẽ đến và chuyển mỗi gia đình từ nhà n sang ở nhà $n+18$, với mọi số nguyên dương n (và như vậy không phải di chuyển tòa thị chính). Chẳng hạn, gia đình đang ở nhà 17 sẽ chuyển sang ở nhà 35.

5) Tìm một nhà có khoảng cách đến tòa thị chính bị thay đổi do sự di chuyển này.
6) Xác định tất cả các giá trị của n sao cho $\mathcal{N}(n)$ bị xê dịch toàn bộ (nghĩa là, khoảng cách đến tòa thị chính của mọi cư dân trong $\mathcal{N}(n)$ đều thay đổi sau khi di chuyển).
7) Một hôm, chủ nhà 23 nói "Tôi có cảm giác như thể tôi đang sống ở tâm của "nhóm 2" (biệt danh được đặt cho tập gồm các nhà $n=3k+2$ với $k\in\mathbb{N}$): mỗi khi nhìn ra cửa sổ, tôi nhận thấy "nhóm 2" gồm đúng những nhà cách tôi một khoảng không quá $1/3$". Chủ nhà 32 khẳng định "tôi cũng thấy thế". Hãy giải thích.

Để đối phó tốt hơn với tình trạng nhập cư, Hội đồng thành phố Olympic cũng quyết định phát triển thành phố theo một phương án đặc biệt: số nhà bây giờ sẽ là các số hữu tỉ, nhưng cần phải đánh số sao cho nguyên tắc khoảng cách vẫn được đảm bảo: khoảng cách giữa hai nhà số x và y là $d(x-y)$, được tính như sau.

Để xác định $d(p/q)$, với p và q là các số nguyên mà $pq\neq 0$, người ta viết $p/q=3^k p'/q'$, trong đó cả p' lẫn q' đều là các số nguyên không chia hết cho 3, và k là một số nguyên (không nhất thiết dương); khi đó, $d(p/q)=3^{-k}$.

8) Một người nhập cư đến từ thành phố IMO có nguyện vọng như sau: "*Số nhà cũ của tôi là*

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

Số nhà của các bạn của tôi ở đây là toàn bộ các tổng riêng: $H_n=\dfrac{1}{0!}+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$. *Tôi muốn ở số nhà sao cho khoảng cách từ đó với nhà H_n tiến dần tới 0 khi n tiến ra vô cùng*". Điều này có thể thực hiện được không, tại sao?

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM KỲ THI OLYMPIC TOÁN THPT 2016

Chủ đề: Đa thức Tchebyshev

Thời gian làm bài: 180 phút

ĐỀ THAM KHẢO

Mục tiêu của bài toán là tìm hiểu một số tính chất đại số, giải tích và tổ hợp của các đa thức Tchebysev. Trong toàn bộ đề bài, các đa thức được hiểu là các đa thức với hệ số thực.

Các đa thức Chebysev

Các đa thức Chebysev $(T_n(x))_{n\geq 0}$ được định nghĩa như sau: $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$, và với mọi $n \geq 2$,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

1) Chứng minh rằng với mọi $n \geq 0$ và $t \in \mathbb{R}$ thì $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.
2) Chứng minh rằng khi $|x| \geq 1$ thì với mọi $n \geq 0$

$$T_n(x) = \frac{(x - \sqrt{x^2-1})^n + (x + \sqrt{x^2-1})^n}{2}.$$

Mô tả tổ hợp của các đa thức Chebysev

Cho một dải ô vuông $1 \times n$ với n là một số nguyên dương cho trước. Xét các cách lát dải ô vuông bởi các ô vuông đơn vị 1×1 và các đôminô 1×2. Ta gán mỗi ô vuông 1×1 với trọng $2x$ (x là một biến) và mỗi đôminô với trọng -1.

3) Ta định nghĩa **trọng của một cách lát** như là tích của tất cả các trọng của các ô vuông đơn vị và các đôminô trong cách lát đã cho. Gọi $U_n(x)$ là tổng của các trọng của tất cả các cách lát dải $1 \times n$. Như vậy, $U_1(x) = 2x, U_2(x) = 2x \cdot 2x + (-1) = 4x^2 - 1, \ldots$. Ta quy ước $U_0(x) = 1$. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 2$,

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x).$$

4) Trọng của một cách lát dải $1 \times n$ với đúng k đôminô bằng bao nhiêu ? Từ đó hãy chỉ ra rằng với mọi $n \geq 0$,

$$U_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}.$$

5) Ta định nghĩa **trọng điều chỉnh của một cách lát** như là
   - tích của tất cả các trọng của các ô vuông đơn vị và các đôminô trong cách lát đã cho nếu ô vuông đầu tiên của dải $1 \times n$ không được lát bởi ô vuông đơn vị (do đó phủ bởi một đôminô);
   - tích của tất cả các trọng của các ô vuông đơn vị và các đôminô trong cách lát đã cho chia cho 2 nếu ô vuông đầu tiên của dải $1 \times n$ được lát bởi ô vuông đơn vị.

   Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$, $T_n(x)$ là tổng các trọng điều chỉnh của tất cả các cách lát dải $1 \times n$.
6) Chứng minh rằng với mọi $m \geq 1, n \geq 1$ thì

$$T_{m+n}(x) = T_m(x)U_n(x) - T_{m-1}(x)U_{n-1}(x).$$