HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2018**

ĐÁP ÁN MÔN: TỔ HỢP

Bảng PT

Bài toán về đàn gà

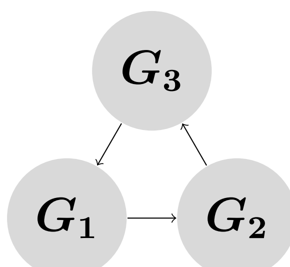
A. Sự tồn tại của gà vua

Bài PT.1. a) Hiển nhiên, vì nếu K_1, K_2 là 2 hoàng đế thì K_1 thắng K_2 (do K_1 là hoàng đế) và K_2 thắng K_1 (do K_2 là hoàng đế), mâu thuẫn.

b) Một đàn gà có 2 con là một ví dụ về đàn gà có 1 hoàng đế.

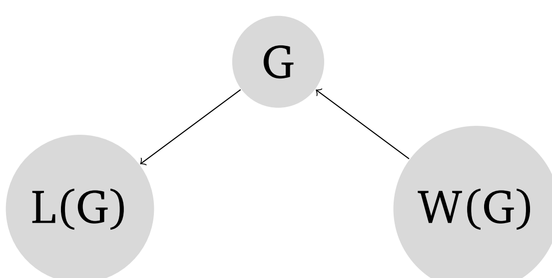
c) Một đàn gà 3 con thắng vòng tròn lẫn nhau là một ví dụ về đàn gà không có hoàng đế.

Trong sơ đồ sau và các sơ đồ khác trong đáp án, mũi tên từ A hướng đến B nói rằng A thắng B.



Bài PT.2. a) Nếu G thắng G' và G' thắng G'' thì ta nói G thắng gián tiếp G''.

Xét các tập $W(G), L(G)$ tương ứng là tập các con gà thắng, thua G.



(Xem tiếp trang sau)

Giả sử G không phải là vua. Khi đó, $W(G) \neq \emptyset$ và hơn nữa, phải tồn tại một con gà $G' \in W(G)$ sao cho G không thắng gián tiếp G'. Ta suy ra không có con gà nào trong $L(G)$ thắng G'. Như vậy, G' thắng mọi con gà trong $L(G)$ nên G' thắng nhiều con gà hơn G (do ngoài $L(G)$ ra, G' còn thắng G), mâu thuẫn.

b) Theo giả thiết, $W(G) \neq \emptyset$. Xét đàn gà $W(G)$ (loại tạm thời các con gà khác khỏi đàn). Theo a), có một con gà K là vua trong $W(G)$: với mọi $G' \in W(G)$, hoặc là K thắng G', hoặc là K thắng gián tiếp G'. Thế nhưng, K thắng G, và rõ ràng, với mọi $G'' \in L(G)$ thì K cũng thắng gián tiếp G'' (qua G). Điều này chứng tỏ K là một vua trong đàn gà ban đầu (và G thua K).

Bài PT.3. Theo PT.2a), đàn gà phải có ít nhất một vua K_1 nào đó. Vẫn theo PT2, do K_1 không phải là hoàng đế, K_1 thua ít nhất môt con gà nào đó và vì thế thua một vua K_2 nào đó. Lại tiếp tục lập luận tương tự với K_2, ta suy ra K_2 thua một vua K_3 nào đó. Chú ý rằng $K_3 \neq K_1$ vì K_1 thua K_2 còn K_3 thắng K_2. Vậy đàn gà có ít nhất ba vua là K_1, K_2, K_3.

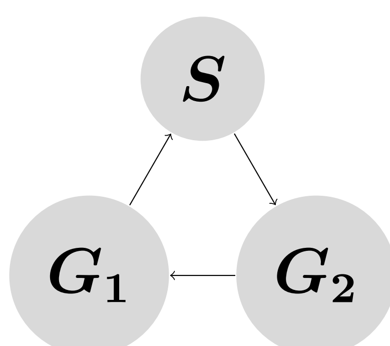
Cách lập luận trực tiếp. Theo PT.2a), đàn gà phải có ít nhất một vua K_1 nào đó. Do K_1 không phải là hoàng đế, $W(K_1) \neq \emptyset$.

Xét đàn gà $W(K_1)$. Theo PT.2a), có một con gà K_2 là vua trong $W(K_1)$: với mọi $G' \in W(K_1)$, hoặc là K_2 thắng G', hoặc là K_2 thắng gián tiếp G'. Thế nhưng, K_2 thắng K_1, và rõ ràng, với mọi $G'' \in L(K_1)$ thì K_2 cũng thắng gián tiếp G'' (qua K_1). Điều này chứng tỏ K_2 cũng là một vua trong đàn gà ban đầu. (Lập luận này hoàn toàn giống lập luận đã được dùng khi giải PT.2b).)

Ta vẫn lập luận tương tự như trên, do K_2 không phải là hoàng đế, K_2 phải thua ít nhất một con gà nào đó, nghĩa là $W(K_2) \neq \emptyset$. Theo PT.2a), có một con gà K_3 là vua trong $W(K_2)$: với mọi $G' \in W(K_2)$, hoặc là K_3 thắng G', hoặc là K_3 thắng gián tiếp G'. Thế nhưng, K_3 thắng K_2, và rõ ràng, với mọi $G'' \in L(K_2)$ thì K_3 cũng thắng gián tiếp G'' (qua K_2). Điều này chứng tỏ K_3 cũng là một vua trong đàn gà ban đầu. Lưu ý rằng $K_1 \notin W(K_2)$, $K_3 \in W(K_2)$ nên K_1, K_2, K_3 là đôi một phân biệt.

B. Một đàn gà có thể có bao nhiêu vua?

Bài PT.4. Thật vậy, giả sử một đàn gà có đúng 2 con vua là K_1, K_2. Để ý rằng mọi hoàng đế là vua. Do K_1 là vua, hoặc là K_1 thắng K_2, hoặc là K_1 thắng gián tiếp K_2. Nói riêng, K_2 phải thua ít nhất một con gà nào đó. Nhưng theo PT.2b) thì K_2 phải thua một vua nào đó. Do chỉ có 2 vua, ta suy ra K_2 thua K_1. Lập luận tương tự ta cũng có K_1 thua K_2. Như vậy, K_1, K_2 thắng lẫn nhau, mâu thuẫn.



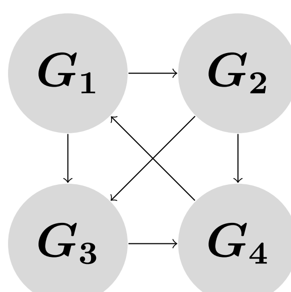
Bài PT.5. Giả sử S là một đàn gà n con mà mỗi con đều là vua. Thêm vào S hai con gà G_1, G_2 sao cho G_1 thắng mọi con gà của S nhưng thua G_2 và G_2 thua mọi con gà của S. Ta sẽ chỉ ra rằng đàn gà T mới cũng có tất cả các con gà là vua.

- Theo xây dựng thì G_1 thắng mọi con gà trong S. Hơn nữa, G_1 thắng gián tiếp G_2 qua một con gà bất kì của S. Do đó G_1 là một vua trong đàn gà T.
- Cũng theo xây dựng thì G_2 thắng G_1. Ngoài ra, G_2 thắng gián tiếp mọi con gà trong S thông qua G_1. Do đó G_2 là một vua trong đàn gà T.
- Theo giả thiết, mọi con gà G trong S thắng hoặc thắng gián tiếp mọi con gà khác trong S. Hơn nữa, theo xây dựng, G thắng G_2 và do đó thắng gián tiếp G_1 thông qua G_2. Chính vì vậy, G vẫn còn là vua trong T.

Như vậy, T là một đàn gà gồm $n + 2$ con mà mỗi một con trong đàn là vua.

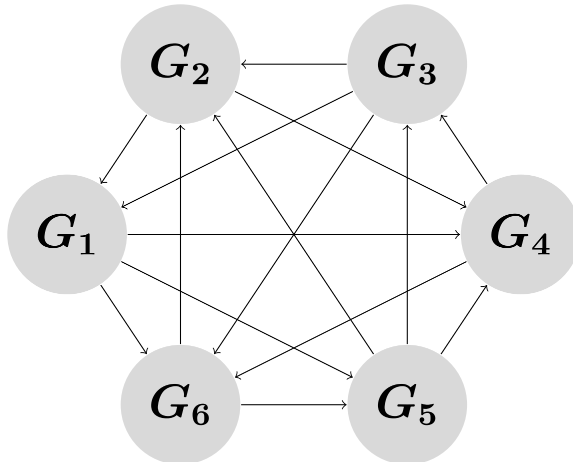
Bài PT.6. Giả sử một đàn gà như vậy tồn tại. Rõ ràng không có con nào thắng mọi con khác: nếu có một con (hoàng đế) như vậy, không con nào trong số các con còn lại có thể thắng hoặc thắng gián tiếp con này, do đó 3 con còn lại không thể là vua. Ta cũng nhận xét rằng không có con nào thua mọi con khác vì một con như vậy không thể là vua được. Từ đó, mỗi con gà trong đàn thắng 1 hoặc 2 con gà khác. Chính vì thế, nếu ta gọi a (tương ứng, b) là số con gà trong đàn thắng đúng 1 (tương ứng, 2) con gà khác thì $a + b = 4$. Hơn nữa, giữa 2 con gà khác nhau bất kì phải có đúng 1 con thắng con còn lại (nói cách khác, số cặp (G, G') mà G thắng G' bằng $\binom{4}{2} = 6$) nên $a + 2b = 6$. Suy ra $a = b = 2$. Vậy, có đúng 2 con thắng đúng 2 con gà và có đúng 2 con thắng đúng 1 con gà. Giả sử G_1, G_2 thắng đúng 2 con gà và G_3, G_4 thắng đúng 1 con gà. Không mất tổng quát, ta có thể giả sử G_1 thắng G_2 và G_3 thắng G_4. Do G_3 chỉ thắng đúng 1 con gà, ta suy ra G_3 thua G_1, G_2. Lại do G_1 thắng đúng 2 con gà, ta suy ra G_1 thua G_4. Bây giờ, vì G_4 thắng đúng 1 con gà nên G_4 thua G_2 (và G_3).

Thế nhưng, G_3 không phải là vua, vì G_3 không thắng G_2 và cũng không thắng gián tiếp G_2 qua bất kì con gà nào. Như vậy, ta có điều mâu thuẫn và do đó không tồn tại đàn gà 4 con nào mà tất cả đều là vua.



Bài PT.7. Đàn gà sau đây thoả mãn. Việc kiểm tra là dễ dàng dựa vào các mũi tên. Chẳng hạn G_1 là vua vì thắng G_4, G_5, G_6 và thắng gián tiếp G_2, G_3 (thông qua G_5).

(Xem tiếp trang sau)

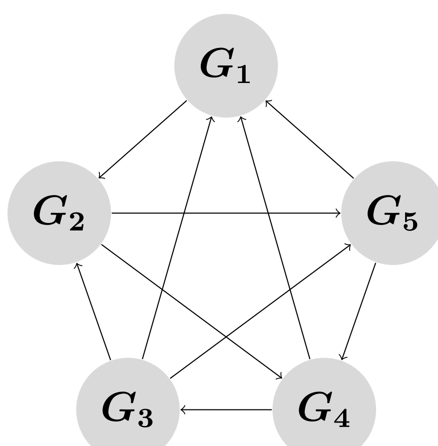


Bài PT.8. Trước hết, xét trường hợp $k \neq 2, k \neq 4$ ($n \geq k$ bất kì). Trước hết, dễ thấy đàn gà 3 con thắng vòng tròn lẫn nhau có cả 3 con là vua. Từ đó, theo PT.5 thì tồn tại đàn gà 5 con mà tất cả các con là vua. Bằng quy nạp, ta suy ra với mọi k lẻ tồn tại đàn gà k con mà tất cả đều là vua (trường hợp $k = 1$ có thể được xem là quy ước). Cũng lập luận bằng quy nạp, dựa vào PT.7 và PT.5, ta suy ra với mọi số nguyên dương chẵn k, tồn tại đàn gà k con mà tất cả đều là vua. Từ đó suy ra với mọi số nguyên dương k mà $k \neq 2, k \neq 4$, tồn tại đàn gà k con mà tất cả đều là vua.

Bây giờ, để xây dựng một đàn gà n con với đúng k vua, ta bắt đầu với một đàn gà S gồm k con mà tất cả đều là vua. Ta sẽ thêm $n - k$ con gà bất kì vào S sao cho chúng thua mọi con gà của S (thứ tự thắng thua giữa $n - k$ con gà mới là bất kì) để có một đàn gà T gồm n con. Khi đó rõ ràng k con gà của S vẫn còn là vua trong T, trong khi đó mọi con gà mới không thể là vua trong T vì chúng thua mọi con gà trong S và cũng không thể thắng gián tiếp bất kì con nào trong S. Do đó T là một đàn gà gồm n con, trong đó có đúng k vua.

Để kết thúc, ta còn phải xét trường hợp $k = 4$, $n \geq 5$. Tương tự như trên, ta chỉ cần xây dựng một đàn gà gồm 5 con, trong đó có đúng 4 con vua. Sau đó, tương tự như trên, để xây dựng một đàn gà gồm $n \geq 5$ con, trong đó có đúng 4 vua, ta chỉ cần thêm vào $n - 5$ con gà mới mà mỗi con gà mới thua cả 5 con trong đàn gà ban đầu.

Một ví dụ về đàn gà 5 con với đúng 4 vua được mô tả qua hình vẽ sau.



Ta kiểm tra được rằng G_2, G_3, G_4, G_5 là vua còn G_1 thì không. Với G_1: G_1 không thắng G_3 cũng như không thắng gián tiếp G_3. Chẳng hạn, với G_2: G_2 thắng G_4, G_5 và thắng gián tiếp G_1, G_3 (thông qua G_4).

C. Sắp thứ tự đàn gà

Bài PT.9. Ta lập luận bằng qui nạp theo n khẳng định mạnh hơn: với mọi đàn gà n con, tồn tại một cách đánh số các con gà $G_1, \ldots, G_n$ thoả mãn điều kiện của bài toán, và hơn thế nữa G_1 là vua của đàn gà. Trường hợp $n = 2$ là khá hiển nhiên. Giả sử $n \geq 3$ và khẳng định của bài toán đã được chứng minh là đúng với $n - 1$, ta sẽ chỉ ra khẳng định là đúng với n. Xét một đàn gà S gồm n con gà. Gọi G là một vua của S (tồn tại theo PT.2a)). Tạm loại bỏ G ra khỏi S và gọi đàn gà còn lại là T. Theo giả thiết, ta có thể đánh số các con gà của T là $G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}$ sao cho, với mọi $i \geq 2$, G_{i-1} thắng G_i và G_i là vua của đàn gà chỉ gồm $G_i, G_{i+1}, \ldots, G_{n-1}$. Ta bỏ lại G vào đàn gà. Gọi $1 \leq j \leq n-1$ là chỉ số nhỏ nhất sao cho G thắng G_j (một chỉ số như vậy tồn tại do G là vua của S) và đánh số lại các con gà dựa vào thứ tự: $G_1, G_2, \ldots, G_{j-1}, G, G_j, G_{j+1}, \ldots, G_{n-1}$. Ta sẽ chỉ ra rằng cách đánh số, hay sắp thứ tự này, thoả mãn yêu cầu của bài toán. Muốn vậy, ta chỉ cần chỉ ra rằng:

(1) Với mọi $1 \leq i \leq j - 1$, G_i là vua trong đàn gà gồm $G_i, \ldots, G_{j-1}, G, G_j, \ldots, G_{n-1}$;

(2) G là vua trong đàn gà gồm $G, G_j, G_{j+1}, \ldots, G_{n-1}$;

(3) Với mọi $i \geq j$, G_i là vua trong đàn gồm $G_i, G_{i+1}, \ldots, G_{n-1}$.

(3) là hiển nhiên theo cách xây dựng. Ta hãy chứng minh (1). Do G_i là vua trong đàn gồm $G_i, G_{i+1}, \ldots, G_{n-1}$ và do $i \leq j - 1$, nên G_i thắng G và do đó G_i thắng hoặc thắng gián tiếp mọi con gà *còn lại* trong đàn $\{G_i, \ldots, G_{j-1}, G, G_j, \ldots, G_{n-1}\}$. Vậy (1) được chứng minh.

Cuối cùng ta chứng minh (2). Theo cách chọn G là vua của S nên với mọi $j \leq k \leq n - 1$, G thắng G_k hoặc thắng gián tiếp G_k thông qua một con gà khác trong S. Tuy nhiên, cũng theo cách chọn, G thua toàn bộ $G_1, \ldots, G_{j-1}$ nên nếu G thắng gián tiếp G_k thì nó phải thắng gián tiếp G_k thông qua một con gà nào đó trong $\{G_j, G_{j+1}, \ldots, G_{n-1}\} \setminus \{G_k\}$. Từ đó ta có (2).

Hết