HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM   ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN HỌC SINH NĂM 2016

CHỦ ĐỀ: SỐ HỌC

Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng PT

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong chứng minh của câu sau.

Sự phân bố của số nguyên tố trong tập hợp số tự nhiên, cách xây dựng các số nguyên tố là những bài toán được quan tâm từ rất lâu trong Số học. Dưới đây chúng ta sẽ tìm cách chứng minh trường hợp đặc biệt của một trong những kết quả đẹp nhất của Số học: định lý Dirichlet về sự tồn tại vô hạn số nguyên tố trong một cấp số cộng mà số hạng đầu tiên và công sai nguyên tố cùng nhau.

A. Khái niệm cấp

Bài PT.1. Cho a, n là các số nguyên nguyên tố cùng nhau với $n \geq 2$. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương c nhỏ nhất với tính chất $a^c \equiv 1 \pmod{n}$.

Số nguyên c được gọi là cấp của a modulo n và được kí hiệu là $\mathrm{ord}_n(a)$.

Bài PT.2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k, $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ khi và chỉ khi $\mathrm{ord}_n(a) \mid k$.

Bài PT.3. Chứng minh rằng $\mathrm{ord}_n(a) \mid \varphi(n)$, trong đó φ kí hiệu hàm số phi của Euler, định nghĩa bởi công thức: $\varphi(1) = 1$ và với $n > 1$,

$$\varphi(n) = n \prod_{p \text{ là ước nguyên tố của } n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

(Nhắc lại rằng kí hiệu $x \mid y$ nghĩa là x là một ước của y.)

B. Sự tồn tại số nguyên tố trong một số cấp số cộng

Bài PT.4. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố có dạng $4k + 3$.

Bài PT.5. (i) Chứng minh rằng ước nguyên tố lẻ của một số có dạng $n^2 + 1$ luôn đồng dư với 1 modulo 4.

(ii) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố có dạng $4k + 1$.

Bài PT.6. (i) Chứng minh rằng ước nguyên tố $\neq 3$ của số tự nhiên có dạng $n^2 - n + 1$ phải đồng dư với 1 modulo 6.

(ii) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố có dạng $6k + 1$.

C. Sự tồn tại số nguyên tố trong cấp số cộng có dạng $nk + 1$

Trong các bài tập sau đây, ta cố định một số nguyên $k \geq 3$.

Với a là một số nguyên $\neq 0$ và p là một số nguyên tố, ta dùng kí hiệu $v_p(a)$ để chỉ số mũ đúng của p trong phân tích của a ra thừa số nguyên tố, nói cách khác $p^{v_p(a)} \mid a$ nhưng $p^{v_p(a)+1} \nmid a$.

Bài PT.7. Giả sử p là một ước nguyên tố của $k^k - 1$. Kí hiệu c là cấp của k modulo p. Chứng minh rằng $v_p(k^c - 1) = v_p(k^k - 1)$.

Ta nhắc lại rằng một số nguyên dương được gọi là không có ước chính phương nếu trong phân tích ra thừa số nguyên tố của nó, mỗi số nguyên tố đều xuất hiện với số mũ ≤ 1. Như vậy, các số nguyên dương không có ước chính phương đầu tiên là $1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, \ldots$.

Bài PT.8. Kí hiệu $\mathcal{D}$ là tập tất cả các ước nguyên dương d của k sao cho $d < k$ mà $\frac{k}{d}$ là một số nguyên không có ước chính phương. Kí hiệu $\mathcal{D}_1 = \{d \in \mathcal{D} \mid \text{ số ước nguyên tố của } \frac{k}{d} \text{ là lẻ}\}$, $\mathcal{D}_2 = \{d \in \mathcal{D} \mid \text{ số ước nguyên tố của } \frac{k}{d} \text{ là chẵn}\}$. Đặt

$$A = \prod_{d \in \mathcal{D}_1} (k^d - 1), \quad B = \prod_{d \in \mathcal{D}_2} (k^d - 1).$$

(Ta qui ước $A = 1$ nếu $\mathcal{D}_1 = \emptyset$ và tương tự $B = 1$ nếu $\mathcal{D}_2 = \emptyset$.)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p mà $p \mid k^k - 1$ nhưng $p \not\equiv 1 \pmod{k}$ thì ta có $v_p(A) = v_p(B) + v_p(k^k - 1)$.

Bài PT.9. Chứng minh rằng $k^k - 1$ có một ước nguyên tố có dạng $nk + 1$.

Bài PT.10. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố có dạng $nk + 1$.