ĐỀ THI MÔN: ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 180 phút

Bảng PT

Thí sinh được sử dụng kết quả của các câu trước trong chứng minh của câu sau. Nếu một câu được chứng minh không dựa vào kết quả của các câu trước thì có thể dùng để chứng minh các câu trước.

Quy tắc dấu Descartes và một số ứng dụng

A. Quy tắc dấu Descartes

Cho
$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \tag{1}$$
là một đa thức hệ số thực. Số thực r được gọi là một **nghiệm bội** m của $P(x)$ nếu $P(x) = (x-r)^mQ(x)$, trong đó $Q(x)$ là một đa thức mà $Q(r) \neq 0$ và m là một số nguyên dương (được gọi là **số bội** của nghiệm r). Giả sử tất cả các nghiệm dương (đôi một khác nhau) của đa thức $P(x)$ bao gồm $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ($k \geq 0$), với số bội tương ứng là $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Khi đó, ta gọi đại lượng $N(P) = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ là **số nghiệm dương, tính cả bội** của $P(x)$ (dĩ nhiên, $N(P) = 0$ khi $k = 0$). Số nghiệm dương, tính cả bội của đa thức không (đa thức $P(x) \equiv 0$) được quy ước là $N(0) = 0$.

Ta định nghĩa **số lần đổi dấu** của dãy số thực $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là số bộ (i, j) với $0 \leq i < j \leq n$ sao cho $a_ia_j < 0$ và $a_k = 0$ khi $i < k < j$. Số lần đổi dấu của dãy số thực $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sẽ được kí hiệu là $W(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Với $P(x)$ là đa thức được cho ở (1), ta đặt $W(P) = W(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Nói cách khác, $W(P)$ là số lần đổi dấu của dãy các hệ số của đa thức $P(x)$.

Các kí hiệu và định nghĩa trên được sử dụng cho toàn bộ các bài toán sau.

Bài PT.1. Chứng minh rằng

a) $W(a_0, a_1, \ldots, a_n) = W(-a_n, -a_{n-1}, \ldots, -a_0)$.

b) $W(a_0, a_1, \ldots, a_n) = W(p_0 a_0, p_1 a_1, \ldots, p_n a_n)$ nếu $p_0, p_1, \ldots, p_n$ là các số dương.

Bài PT.2. Chứng minh rằng

a) $W(P) \geq W(P')$, trong đó $P'(x)$ kí hiệu đạo hàm của đa thức $P(x)$.

b) $N(P)$ là một số chẵn nếu $a_0 a_n > 0$; $N(P)$ là một số lẻ nếu $a_0 a_n < 0$.

Bài PT.3. Chứng minh rằng nếu $W(P') \equiv N(P') \pmod 2$ thì $W(P) \equiv N(P) \pmod 2$.

Bài PT.4. (Quy tắc dấu Descartes) Chứng minh rằng

a) $W(P) \geq N(P)$;

b) $W(P) - N(P)$ là một số chẵn.

B. Ứng dụng vào việc tính số nghiệm của một đa thức

Bài PT.5. Đa thức $x^{10} - x^2 - x - 1$ có bao nhiêu nghiệm dương?

Bài PT.6. Chứng minh rằng đa thức

$$Q(x) = 30x^7 - 4x^6 - 1975x^4 - 30x^2 - 4x - 2019$$

có đúng một nghiệm thực.

Bài PT.7. Cho số nguyên dương $n \geq 4$. Đặt

$$P_n(x) = x^{5n^3+1} - 2x^{n^3+n} - 3x^{n^3-3n^2} - 4x^{n^2+n} - 5x^{n^2-1} + 6x^{n-1} + 7.$$

Chứng minh rằng $P_n(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$.

Bài PT.8. Cho đa thức hệ số thực $R(x) = c_0 + c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} + \cdots + c_n x^{m_n}$, trong đó $0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_n$ thỏa mãn $m_i \equiv i \pmod 2$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Giả sử $c_0 \neq 0$. Chứng minh rằng $R(x)$ có không quá n nghiệm thực.

Bài PT.9. Cho các số nguyên dương $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$. Chứng minh rằng tồn tại các số thực $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ sao cho đa thức $c_0 + c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} + \cdots + c_n x^{m_n}$ có đúng n nghiệm dương.

Hết

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*